

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



انتشارات
۷۰۹

بهینه سازی خطی

دکتر حسین تقی زاده کاخکی
عضو هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

سرشناسه: تقی‌زاده کاخکی، حسین، ۱۳۳۱ -
 عنوان و نام پدیدآور: بهینه‌سازی خطی/ حسین تقی‌زاده کاخکی؛ ویراستار علمی نظام‌الدین مهدوی امیری.
 مشخصات نشر: مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۹۸.
 مشخصات ظاهری: ۳۱۶ ص. جدول، نمودار.
 فروست: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۷۰۹.
 شابک: ISBN: 978-964-386-384-5
 وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا.
 یادداشت: کتابنامه
 موضوع: تحقیق در عملیات
 موضوع: برنامه‌ریزی خطی
 موضوع: بهینه‌سازی ریاضی
 موضوع: الگوریتم‌های خطی
 شناسه افزوده: دانشگاه فردوسی مشهد. انتشارات.
 رده‌بندی کنگره: T ۵۷/۶
 رده‌بندی دیویی: ۰۰۳
 شماره کتابشناسی ملی: ۵۷۸۶۸۶۶

بهینه‌سازی خطی



پدیدآورنده: دکتر حسین تقی‌زاده کاخکی
 ویراستار علمی: دکتر نظام‌الدین مهدوی امیری
 ویراستار ادبی: هانیه اسدیپور فعال مشهد
 مشخصات: وزیری، ۲۵۰ نسخه، چاپ اول، زمستان ۱۳۹۸
 چاپ و صحافی: چاپخانه آستان قدس رضوی
 بها: ۴۵۰/۰۰۰ ریال
 حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
 تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶ - ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)
 مؤسسه کتابیران: تهران، خیابان کارگر جنوبی، خیابان لبافی‌نژاد، بین خیابان فروردین و اردیبهشت،
 شماره ۲۳۸، تلفن: ۶۶۴۹۴۴۰۹ - ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)
 مؤسسه دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شماره ۱۴۲
 تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

<http://press.um.ac.ir>

Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

۱۳	پیش‌گفتار
۱۵	۱ مدل‌سازی ریاضی
۱۵	۱-۱ مقدمه
۱۶	۲-۱ مثال‌های کاربردی
۴۹	۳-۱ تمرین‌ها
۵۱	۴-۱ یادداشت‌ها
۵۴	۲ مقدمات ریاضی
۵۴	۱-۲ مقدمه
۷۳	۲-۲ روش‌های حل
۷۳	۱-۲-۲ روش فوریه - ماترکین
۷۶	۲-۲-۲ روش ترسیمی (هندسی)
۷۹	۳-۲ تمرین‌ها
۸۱	۴-۲ یادداشت‌ها
۸۳	۳ روش سیمپلکس
۸۳	۱-۳ مقدمه
۸۴	۲-۳ الگوریتم سیمپلکس
۹۷	۳-۳ تعبیر اعداد جدول سیمپلکس
۱۰۰	۴-۳ الگوریتم سیمپلکس از دیدگاهی دیگر

۵-۳	پیدا کردن جواب پایه ممکن اولیه	۱۰۴
۶-۳	تبهگنی	۱۱۱
۱-۶-۳	قاعده لکزیکوگرافی	۱۱۵
۲-۶-۳	قاعده بلند	۱۱۷
۷-۳	سیمپلکس برای متغیرهای کراندار	۱۲۰
۸-۳	تمرین‌ها	۱۲۴
۹-۳	یادداشت‌ها	۱۲۸

۴	دوگانی	۱۳۰
۱-۴	تعاریف و چند کاربرد	۱۳۰
۲-۴	قضایای دوگانی	۱۳۷
۱-۲-۴	وجود جواب مکمل اکید	۱۴۳
۲-۲-۴	قضیه گلدمن-تاکر	۱۴۵
۳-۴	دوگان لاگرانژ	۱۴۷
۴-۴	شرایط لازم و کافی برای بهینگی	۱۴۹
۱-۴-۴	اثبات دیگری برای لم‌فارکاش	۱۵۵
۵-۴	تمرین‌ها	۱۵۵
۶-۴	یادداشت‌ها	۱۶۰

۵	تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتری	۱۶۱
۱-۵	تغییر ضرایب در تابع هدف (c_j)	۱۶۱
۲-۵	تغییر در مقادیر سمت راست (b_i)	۱۶۴
۳-۵	تغییر ضرایب یک متغیر در ماتریس ضرایب (A)	۱۶۷
۴-۵	اضافه کردن یک فعالیت (متغیر یا ستون) جدید	۱۶۹
۵-۵	اضافه کردن یک قید (یا سطر) جدید	۱۷۰
۶-۵	تغییر هم‌زمان ضرایب تابع هدف (قاعده ۱۰۰٪)	۱۷۰
۷-۵	تغییر هم‌زمان مقادیر سمت راست (قاعده ۱۰۰٪)	۱۷۱
۸-۵	تحلیل پارامتری	۱۷۳
۹-۵	روش پارامتری خود دوگان	۱۸۰

فهرست مطالب ۵

۱۸۲	۱۰-۵ تمرین‌ها
۱۸۷	۱۱-۵ یادداشت‌ها

۱۸۸	فرم‌های دیگر الگوریتم سیمپلکس ۶
۱۸۸	۱-۶ روش سیمپلکس اصلاح شده
۱۹۱	۲-۶ روش سیمپلکس دوگان
۱۹۴	۳-۶ پیدا کردن جواب پایه اولیه
۱۹۶	۴-۶ تحلیل حساسیت: اضافه کردن یک قید به مسئله
۱۹۸	۵-۶ روش سیمپلکس اولیه- دوگان
۲۰۵	۶-۶ روش تجزیه دنتزیگ-ولف
۲۰۹	۱-۶-۶ تولید ستون
۲۱۲	۲-۶-۶ برنامه ریزی خطی تعمیم یافته
۲۱۷	۷-۶ تمرین‌ها
۲۱۹	۸-۶ یادداشت‌ها

۲۲۲	روش‌های دیگر حل برنامه‌های خطی ۷
۲۲۲	۱-۷ پیچیدگی محاسباتی الگوریتم سیمپلکس
۲۲۵	۲-۷ الگوریتم بیضی‌گون
۲۳۸	۳-۷ روش‌های نقطه درونی
۲۳۸	۱-۳-۷ روش دیکین
۲۴۵	۲-۳-۷ روش نقطه درونی اولیه- دوگان
۲۵۲	۴-۷ نرم افزارها
۲۵۵	۵-۷ تمرین‌ها
۲۵۷	۶-۷ یادداشت‌ها

۲۶۱	مدل‌های شبکه ۸
۲۶۱	۱-۸ مقدمه
۲۶۱	۱-۱-۸ مسئله عمومی شبکه جریان (مسئله جریان با کمترین هزینه)
۲۶۵	۲-۱-۸ مسئله شبکه جریان با کمترین هزینه بدون ظرفیت

۲۷۲	۳-۱-۸ مسئله حمل و نقل
۲۸۱	۴-۱-۸ مسئله تخصیص (واگذاری)
۲۹۲	۲-۸ تمرین‌ها
۲۹۶	۳-۸ یادداشت‌ها
۲۹۹	مراجع
۳۰۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۳۱۲	نمایه

فهرست جداول

۱-۱	مقدار ویتامین در مواد غذایی	۱۶
۲-۱	فاصله بین شهرها (برحسب کیلومتر)	۱۹
۳-۱	تعداد پرستار موردنیاز در شیفت‌های مختلف	۲۳
۴-۱	میزان اشعه دریافتی (برحسب کیلوراد)	۲۵
۵-۱	الگوهای برش	۲۹
۶-۱	اطلاعات مربوط به بیمارستان‌ها	۴۴
۷-۱	نرخ تولید (تعداد واحد در ساعت)	۵۰
۱-۳	جدول یا تابلوی اولیهٔ سیمپلکس برای مثال نوعی	۸۵
۲-۳	جدول سیمپلکس مثال نوعی	۸۷
۳-۳	جدول بهینه برای مثال نوعی	۸۸
۴-۳	جدول سیمپلکس مثال ۱-۲-۳	۸۹
۵-۳	جدول سیمپلکس برای مثال ۲-۲-۳	۹۰
۶-۳	جدول سیمپلکس برای مثال ۳-۲-۳	۹۱
۷-۳	جدول سیمپلکس برای مثال ۳-۲-۳	۹۲
۸-۳	شکل کلی جدول سیمپلکس	۹۶
۹-۳	جدول اولیهٔ سیمپلکس	۱۰۵
۱۰-۳	جدول سیمپلکس فاز ۱	۱۰۶
۱۱-۳	جدول سیمپلکس فاز ۲	۱۰۶
۱۲-۳	جدول سیمپلکس فاز ۱	۱۰۹

۱۱۱	جدول سیمپلکس (M بزرگ)	۱۳-۳
۱۱۲	جدول سیمپلکس	۱۴-۳
۱۱۳	تکرار اول سیمپلکس	۱۵-۳
۱۱۳	جدول بهینه	۱۶-۳
۱۱۵	جدول بهینه برای مثال	۱۷-۳
۱۲۳	جدول اولیه سیمپلکس برای مثال	۱۸-۳
۱۲۳	جدول سیمپلکس برای مثال	۱۹-۳
۱۲۴	جدول سیمپلکس برای مثال	۲۰-۳
۱۳۷	روابط میان قیدها و متغیرها در مسئله اولیه و دوگان	۱-۴
۱۶۲	جدول بهینه	۱-۵
۱۶۳	بازه مجاز تغییرات ضرایب در تابع هدف	۲-۵
۱۶۵	بازه مجاز تغییرات مقادیر سمت راست	۳-۵
۱۶۸	جدول سیمپلکس پس از تغییر ضرایب a_1	۴-۵
۱۶۹	جدول سیمپلکس پس از تغییر ضرایب a_1	۵-۵
۱۷۴	تکرار اول سیمپلکس	۶-۵
۱۷۵	تکرار دوم سیمپلکس	۷-۵
۱۷۵	تکرار سوم سیمپلکس	۸-۵
۱۷۶	نتایج تحلیل پارامتری برای مثال	۹-۵
۱۷۹	تکرار سوم سیمپلکس	۱۰-۵
۱۸۱	جدول اولیه	۱۱-۵
۱۸۱	تکرار اول	۱۲-۵
۱۸۲	تکرار دوم	۱۳-۵
۱۸۲	تکرار سوم	۱۴-۵
۱۸۹	جدول اولیه برای روش سیمپلکس اصلاح شده	۱-۶
۱۹۰	جدول نتایج تکرار اول سیمپلکس اصلاح شده	۲-۶
۱۹۰	جدول نتایج تکرار دوم سیمپلکس اصلاح شده	۳-۶
۱۹۰	جدول نتایج تکرار سوم سیمپلکس اصلاح شده	۴-۶

فهرست جداول ۹

۱۹۱	۵-۶ جدول نتایج تکرار چهارم سیمپلکس اصلاح شده
۱۹۳	۶-۶ سیمپلکس دوگان برای مثال (۱-۲-۶)
۱۹۳	۷-۶ ادامه مثال
۱۹۳	۸-۶ جدول بهینه سیمپلکس دوگان
۱۹۴	۹-۶ جدول سیمپلکس
۱۹۵	۱۰-۶ ادامه مثال
۱۹۵	۱۱-۶ ادامه مثال
۱۹۶	۱۲-۶ ادامه مثال
۱۹۷	۱۳-۶ سیمپلکس دوگان برای مثال (۱-۱-۵)
۱۹۷	۱۴-۶ ادامه مثال
۱۹۷	۱۵-۶ ادامه مثال
۱۹۸	۱۶-۶ ادامه مثال
۱۹۸	۱۷-۶ ادامه مثال
۲۰۷	۱۸-۶ جدول اولیه برای مثال ۱-۶-۶
۲۰۸	۱۹-۶ ادامه محاسبات برای مثال ۱-۶-۶
۲۰۹	۲۰-۶ جدول بهینه برای مثال ۱-۶-۶
۲۱۰	۲۱-۶ الگوهای برش
۲۷۵	۱-۸ جدول داده‌ها
۲۷۶	۲-۸ جدول اولیه داده‌ها برای مثال ۶-۱-۸
۲۷۶	۳-۸ تکرار اول
۲۷۶	۴-۸ تکرار دوم
۲۷۷	۵-۸ تکرار سوم
۲۷۷	۶-۸ جدول چهارم
۲۷۷	۷-۸ جدول داده‌ها برای روش فوگل
۲۷۸	۸-۸ تکرار اول روش فوگل
۲۷۸	۹-۸ تکرار دوم روش فوگل
۲۷۸	۱۰-۸ تکرار سوم روش فوگل
۲۷۹	۱۱-۸ پایه اولیه به دست آمده از روش گوشه شمال غربی

- ۸-۱۲ قاعده سنگ پله برای تعیین متغیر خروجی ۲۸۰
- ۸-۱۳ جواب جدید ۲۸۰
- ۸-۱۴ جدول هزینه‌های مسئله تخصیص ۲۸۳
- ۸-۱۵ هزینه‌های تخصیص برای مثال ۲۸۴
- ۸-۱۶ مقادیر جدید جدول ۲۸۴
- ۸-۱۷ داده‌ها برای مثال ۲۸۶
- ۸-۱۸ جدول پس از کسر می‌نیم هر سطر از درایه‌های همان سطر ۲۸۶
- ۸-۱۹ جدول پس از کسر می‌نیم ستون ۲۸۶
- ۸-۲۰ داده‌ها برای مثال ۲۸۷
- ۸-۲۱ جدول پس از کسر می‌نیم سطرها ۲۸۷
- ۸-۲۲ جدول پس از کسر می‌نیم ستون‌ها ۲۸۷
- ۸-۲۳ جدول پس از پوشش صفرها با کمترین خطوط ۲۸۸
- ۸-۲۴ جدول پس از کم کردن و اضافه کردن می‌نیم درایه‌های خط نخورده ۲۸۸
- ۸-۲۵ داده‌های مسئله برای مثال ۲۸۹
- ۸-۲۶ جدول پس از کسر می‌نیم هر سطر از درایه‌های همان سطر ۲۸۹
- ۸-۲۷ جدول پس از کسر می‌نیم هر ستون از درایه‌های همان ستون ۲۸۹
- ۸-۲۸ جدول پس از رسم خطوط افقی و عمودی ۲۸۹
- ۸-۲۹ جدول پس از کم کردن و اضافه کردن می‌نیم درایه‌های خط نخورده ۲۹۰
- ۸-۳۰ جدول پس از رسم خطوط افقی و عمودی ۲۹۰
- ۸-۳۱ جدول پس از کم کردن و اضافه کردن ۲۹۰

فهرست تصاویر

۱-۱	مقطعی از بدن بیمار و ناحیه تومور (غده)	۲۴
۲-۱	مثال نوعی از نحوه تبدیل نفت خام به محصولات نهایی	۳۰
۳-۱	رابطه بین متغیرها در مسئله برنامه ریزی تولید چندمرحله‌ای	۳۴
۴-۱	شماره‌گذاری خطوط (اضلاع) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت	۳۶
۵-۱	نمونه‌ای از تابع قطعه‌ای خطی و محدب	۳۹
۱-۲	مجموعه محدب، مجموعه غیرمحدب و نقطه فرین	۶۱
۲-۲	چندوجهی مثال	۶۵
۳-۲	ناحیه ممکن برای مثال ۱-۲-۳۵	۶۹
۴-۲	ناحیه ممکن برای مثال	۷۲
۵-۲	جواب بهینه منحصر به فرد	۷۷
۶-۲	جواب بهینه چندگانه (چندین جواب بهینه)	۷۸
۷-۲	ناحیه ممکن بی کران (جواب بهینه متناهی)	۷۹
۸-۲	ناحیه ممکن بی کران (مسئله بی کران)	۷۹
۱-۳	رفتن از A به نقطه گوشه‌ای بهتر مجاور یعنی B	۸۸
۱-۴	تعبیر هندسی لم فارکاش	۱۵۲
۱-۵	ناحیه ممکن و جواب‌های مثال به ازای مقادیر مختلف λ	۱۷۶
۲-۵	بازه تغییرات λ	۱۷۷

- ۱-۷ بیضی‌گون گوی واحد و قید نقض شده $x_1 \geq 0$ ۲۳۰
- ۱-۸ یک شبکه ۲۶۳
- ۲-۸ شبکه مثال ۲۶۸
- ۳-۸ درخت پوشای اولیه ۲۶۸
- ۴-۸ درخت پوشا با یک کمان اضافه ۲۶۹
- ۵-۸ درخت متناظر با جواب ۲۷۰
- ۶-۸ درخت پوشا با یک کمان اضافه ۲۷۱
- ۷-۸ درخت متناظر با جواب ۲۷۲
- ۸-۸ نمونه‌ای از یک گراف دوبخشی ۲۷۳

پیشگفتار

خوشبختانه در سال‌های اخیر رشته تحقیق در عملیات در دانشگاه‌های مختلف مورد توجه قرار گرفته است و دانشجویان بسیاری نیز در این گرایش در سطوح کارشناسی ارشد و دکتری فارغ التحصیل شده‌اند. کتاب‌های متعددی نیز در این زمینه به چاپ رسیده‌اند که عمدتاً ترجمه کتاب‌های معتبر و شناخته‌شده این رشته هستند. اما کتاب حاضر حاصل سال‌ها تدریس این درس توسط مؤلف است که در ابتدا صرفاً برای آشنایی دانشجویان کارشناسی رشته‌های مختلف (علوم کامپیوتر، مهندسی، مدیریت و ریاضی) با تحقیق در عملیات و بهینه‌سازی خطی به رشته تحریر درآمده بود، اما برای اینکه کتاب برای دانشجویان ارشد و دانشجویانی که به درک عمیق‌تر مطالب علاقه‌مندند هم قابل استفاده باشد، مباحث پیشرفته‌تر نیز بر آن افزوده شد.

در فصل اول به مدل‌سازی می‌پردازیم. به دلیل اعتقاد مؤلف به اهمیت مدل‌سازی، مثال‌های نسبتاً ساده و متعددی از مسائل خطی برای آشنایی دانشجویان آورده شده است. در فصل دوم به مقدمات ریاضی می‌پردازیم. تعاریف، مفاهیم اساسی و قضایایی که برای درک ساختار مسئله لازم است و مبنا و پشتوانه نظری روش‌های حل مسئله به خصوص الگوریتم سیمپلکس را تشکیل می‌دهند، مورد بحث قرار می‌گیرند. در فصل سوم یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی خطی، یعنی روش سیمپلکس معرفی می‌شود. در فصل چهارم به یکی از مباحث مهم برنامه‌ریزی خطی، یعنی دوگانگی می‌پردازیم. در فصل پنجم به تحلیل حساسیت و برنامه‌ریزی پارامتری می‌پردازیم و تأثیر تغییرات ضرایب تابع هدف و مقادیر سمت راست بر جواب بهینه را بررسی می‌کنیم. در فصل ششم به فرم‌های دیگر الگوریتم سیمپلکس، از جمله سیمپلکس اصلاح‌شده، سیمپلکس دوگان و روش اولیه-دوگان می‌پردازیم. در فصل هفتم روش‌های دیگر حل برنامه‌های خطی از جمله الگوریتم بیضی‌گون و دو روش متداول از روش‌های نقطه‌درونی توضیح داده می‌شوند و بالاخره در فصل هشتم، مدل‌های خاص خطی، یعنی مدل‌های شبکه معرفی می‌شوند و به‌طور اخص مسئله حمل و نقل و تخصیص و چند روش حل خاص آن‌ها بررسی می‌شوند.

فصل اول و بخش‌هایی از فصل‌های دوم تا ششم و فصل هشتم برای تدریس در دوره کارشناسی مناسب است. بخشی از فصل ششم و فصل هفتم به‌اضافه مباحث پیشرفته‌تر از فصل‌های دیگر را می‌توان در سرفصل درسی دانشجویان کارشناسی ارشد گنجانید.

ذکر این نکته ضروری است که در نگارش این کتاب سعی شده است مفاهیم حتی‌الامکان به گونه‌ای ساده مطرح شوند، اما به دلیل نبود اتفاق نظر در معادل فارسی برخی از تعاریف و اصطلاحات، علاوه بر ذکر یک یا چند

معادل مصطلح، این مفاهیم زیرنویس هم شده‌اند. به عنوان مثال، به جای Feasible Solution جواب ممکن یا شدنی و به جای Constraint قید یا محدودیت آورده شده است.

علاوه بر آن، برای یکدست شدن نمادها و سهولت درک معادلات و روابط ریاضی، تمام بردارها ستونی فرض شده‌اند. این امر ممکن است در ابتدا غیرضروری و حتی در بعضی موارد ناخوشایند نیز به نظر برسد، اما پس از اندکی تأمل، خواننده به درک بهتری از روابط خواهد رسید.

در پایان بر خود لازم می‌دانم از داوران محترمی که زحمت داوری این کتاب را برعهده داشتند، تشکر کنم، به ویژه از همکار گرامی، استاد فرهیخته جناب آقای دکتر نظام‌الدین مهدوی امیری که زحمت ویراستاری علمی این کتاب را تقبل فرمودند، قدردانی می‌کنم. همین‌طور از سرکار خانم اسدپور که زحمت ویراستاری ادبی کتاب را برعهده گرفتند، تشکر می‌کنم.

همچنین لازم می‌دانم از زحمات سرکار خانم گمرکی که چند فصل اول کتاب را سال‌ها قبل با نرم‌افزار ورد^۱ تایپ کردند و از سرکار خانم ساری که جهت تبدیل این فایل‌ها به نرم‌افزار زی‌پرشین^۲ و نیز تهیه اشکال و جداول زحمت بسیاری را متقبل شدند، تشکر کنم. از همکار گرامی استاد فرهیخته جناب آقای دکتر هدایت ذکایی آشتیانی و همین‌طور از جناب آقای دکتر احسان منبئی برای پیشنهادهای ارزنده و نیز از آقای سیدمهدی موسوی و آقای سینا حاجی کاظمی برای کمک‌های فراوان جهت اجرای نرم‌افزار زی‌پرشین قدردانی می‌کنم. از جناب آقای مصطفی قندهاری و همکاران محترمشان در مدیریت نشر دانشگاه فردوسی مشهد که همواره با گشاده‌رویی و دقت نظر پیگیر کار انتشار این کتاب بودند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

بالاخره از دانشجویان عزیزی که در سال‌های مختلف این درس را با من گذرانند و مشوق اصلی من برای تألیف این کتاب بودند، سپاسگزارم و امیدوارم که این مختصر برای دانشجویان علاقه‌مند دیگر نیز مفید باشد.

حسین تقی‌زاده کاخکی

پاییز ۱۳۹۸