به نام خداوند جان و خرد

انتشارات
۶۹۵

نظریه گراف و کاربردهای آن

ویرایش دوم

دکتر مصطفی توکلی
عضو هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

دکتر فریدون رهبرنیا
عضو هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

سرشناسه: توکلی، مصطفی، ۱۳۶۵ -
عنوان و نام پدیدآور: نظریهٔ گراف و کاربردهای آن/ مصطفی توکلی، فریدون رهبرنیا؛ ویراستار علمی کاظم خشیارمنش.
وضعیت ویراست: [ویراست ۲].
مشخصات نشر: مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهری: ۱۷۲ ص. مصوّر.
فروست: دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۶۹۵.
شابک: ISBN: 978-964-386-672-3
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا.
یادداشت: واژه‌نامه. کتابنامه. نمایه.
موضوع: نظریهٔ گراف
موضوع: Graph theory
موضوع: نظریهٔ گراف -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
موضوع: Graph theory --Problems, exercises, etc. (Higher)
شناسه افزوده: رهبرنیا، فریدون، ۱۳۳۹ -
شناسه افزوده: خشیارمنش، کاظم، ۱۳۴۶ - ، ویراستار
شناسه افزوده: دانشگاه فردوسی مشهد.
رده‌بندی کنگره: QA۱۶۶
رده‌بندی دیویی: ۵۱۱/۵
شماره کتابشناسی ملی: ۱۰۳۵۵۵۱۵

انتشـــارات
۶۹۵

نظریه گراف و کاربردهای آن (ویرایش دوم)

پدیدآورنده: دکتر مصطفی توکلی؛ دکتر فریدون رهبرنیا
ویراستار علمی: دکتر کاظم خشیارمنش
مشخصات: وزیری، ۱۰۰ نسخه، چاپ دوم، زمستان ۱۴۰۴ (اوّل، ۱۳۹۷)
چاپ و صحافی: همیار
بها : ۲٫۹۰۰٫۰۰۰ ریال

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶- ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)

مؤسّسهٔ کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)

مؤسّسهٔ دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شمارهٔ ۱۴۲
تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ – ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

http://press.um.ac.ir Email: press@um.ac.ir

فهرست نمادها و علائم ریاضی

نام	نماد
مجموعهٔ کمان‌ها	A
ماتریس مجاورت گراف	A
بستار G	$c(G)$
درجهٔ رأس v در G	$deg_G(v)$
درجهٔ وجه f	$deg(f)$
درجهٔ ورودی رأس v	$\rho(\overleftarrow{v})$
درجهٔ خروجی رأس v	$\rho(\overrightarrow{v})$
فاصلهٔ دو رأس u و v از G	$d_G(u,v)$
گراف جهت‌دار	D
مجموعهٔ یال‌ها	E
مجموعهٔ وجه‌ها	F
گراف	G
زیرگراف G القاءشده توسط V'	$G[V']$
گراف کامل دوبخشی	$K_{n,m}$
ماتریس وقوع	M
مجموعهٔ رأس‌ها	V
عدد استقلال	α
عدد پوشانه	β
کمترین درجه	δ
بیشترین درجه	Δ
همبندی	κ

نام	نماد
همبندی یالی	κ'
چندجمله‌ای رنگی گراف G	$P_G(k)$
تعداد درخت‌های فراگیر	τ
تعداد وجه‌ها	r
عدد رنگی	χ
عدد رنگی ستاره‌ای	χ_s
عدد رنگی مساوی	χ_e
عدد رنگی لیستی	χ_L
عدد رنگی یالی	χ'
تعداد مؤلّفه‌ها	ω
مکمّل G	G^c
دوگان G	G^*
انقباض e	$G \cdot e$
زیرگراف به‌دست‌آمده از حذف رأس v	$G - \{v\}$
زیرگراف به‌دست‌آمده از حذف یال e	$G - \{e\}$
حذف S	$G - S$
یک‌ریختی	$\cong$
زیرگراف G	$H \subseteq G$
زیرگراف سره G	$H \subset G$
اجتماع G و H	$G \cup H$
اشتراک G و H	$G \cap H$
پیوند G و H	$G + H$

نام	نماد
حاصل‌ضرب تانسوری دو گراف G و H	$G \otimes H$
حاصل‌ضرب دکارتی دو گراف G و H	$G \times H$
حاصل‌ضرب قوی دو گراف G و H	$G \boxtimes H$
گراف پترسن	P
گراف چرخ از مرتبهٔ n	W_n
گراف دوبخشی کامل	$K_{m,n}$
گراف دور از مرتبهٔ n	C_n
گراف ستاره از مرتبهٔ n	S_n
گراف کامل از مرتبهٔ n	K_n
گراف مسیر از مرتبهٔ n	P_n
گراف نردبانی از مرتبهٔ n	L_n

فهرست

پیشگفتار

تقریباً سه قرن پیش، یکی از تفریحات مردم کونیگسبرگ[1] قدم‌زدن بر روی پل‌های واقع بر رودخانهٔ پرجل[2] بود. این تفریح رفته‌رفته سبب ایجاد یک بازی فکری به‌این‌صورت شد که آیا می‌توانیم در هنگام قدم‌زدن، هر پل رودخانهٔ پرجل را فقط یک بار پیموده و به نقطهٔ شروع خود بازگردیم. در سال ۱۷۳۶، ریاضی‌دان بزرگ سوئیسی، لئونارد اویلر[3]، برای پاسخ به این سؤال، مدلی اجرا کرد که تا آن زمان استفاده نشده بود. او مسئله خود را با نظریهٔ گراف، مدل و سپس حل کرد. پس از آن استفاده از گراف‌ها شروع شد و از سال ۱۹۳۰ به بعد علاقهٔ شدید و مداوم به نظریهٔ گراف به‌عنوان یک شاخهٔ ریاضی نمایان شد. زمانی که از گراف برای مدل و حل‌کردن مسئله پل‌های کونیکسبرگ استفاده می‌شد، شاید هرگز کسی تصوّر نمی‌کرد روزی از نظریهٔ گراف برای درمان برخی اختلالات مغزی استفاده شود. تا سال‌های اخیر، شاید هنوز قابل‌باور نبود که نظریهٔ گراف در شناساییRNA های موجود در طبیعت جایگاه ویژه پیدا کند. امروزه از نظریهٔ گراف برای مدل‌سازی مسائل در زمینه‌های گوناگونی نظیر پزشکی، زیست‌شناسی، شیمی، کامپیوتر، اقتصاد، توزیع خدمات، مدیریت، بازاریابی، مدل‌سازی انرژی، انتقال اطّلاعات و برنامه‌ریزی حمل‌ونقل استفاده می‌شود.

با در نظر داشتن کاربردهای گسترده این شاخه و علاقه فزایندهٔ جامعهٔ علمی کشور به آن، و در عین حال، فقدان منبعی درخور به زبان فارسی، وظیفهٔ خود دانستیم که اثری شایسته در این زمینه تدوین نماییم. شایان ذکر است که این کتاب، پاسخ‌گوی نیازهای علمی دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در المپیاد، دانشجویان دورهٔ کارشناسی و حتّی منبعی برای آشنایی مقدّماتی دانشجویان کارشناسی ارشد است.

مؤلفان

پائیز ۱۴۰۴

---

1. Königsberg
2. Pregel River
3. Leonhard Euler

۱

تعاریف بنیادی و نمادگذاری‌ها

لئونارد اویلر[1] ریاضی‌دانی سوئیسی بود که بیشتر عمر خود را در شهر سن‌پترزبورگ به‌سر برد. او از جملهٔ پرکارترین ریاضی‌دانان جهان در تاریخ ریاضیات به‌شمار می‌رود. او حتّی پس از آنکه بینایی خود را از دست داد، در سال ۱۷۶۶ با همان سرعت قبل به کار خود ادامه داد. جشن ۲۵۰ سالگی نظریهٔ گراف در سال ۱۹۸۶ براساس مقالهٔ اویلر دربارهٔ مسئلهٔ پل کونیکسبرگ، برگزار شد. امروزه کونیکسبرگ یکی از شهرهای کالینینگراد در روسیه است. اویلر در ۱۸ سپتامبر ۱۷۸۳ هنگامی که مشغول محاسبهٔ مسیر سیّارهٔ اورانوس بود، ناگهان با گفتن کلمهٔ «من مُردم» زندگی را بدرود گفت.

۱-۱ مقدّمه

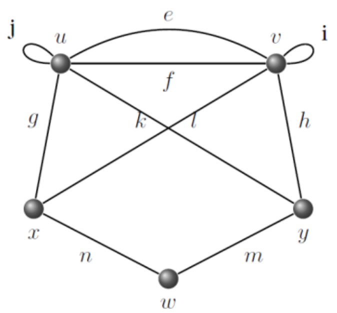
زمانی که صحبت از ارتباط میان اشیاء یا افراد می‌شود، نظریهٔ گراف ابزاری مفید برای مدل‌سازی مسئله است. به‌عنوان مثال، می‌توان به جادّه‌های متّصل کنندهٔ شهرهای کشور، ارتباط‌های موجود در شبکه‌های

1. Leonhard Euler

اجتماعی میان کاربران، ارتباط بین آکسون‌های مغز انسان از طریق فضاهای سیناپسی و پیوندهای مولکولی اشاره کرد. در این فصل، به تعریف دقیق گراف و مفاهیم کلیدی موردنیاز در فصل‌های آتی خواهیم پرداخت.

۱-۲ گراف ساده و چندگانه

گراف[1] یا **گراف چندگانهٔ** G[2]، یک سه‌تایی مرتّب $(V(G),E(G),\psi_G)$ است که تشکیل شده از یک مجموعهٔ ناتهی $V(G)$ از **رأس‌ها**[3] و یک مجموعهٔ $E(G)$ (مجزّای از $V(G)$) از **یال‌ها**[4] و یک **تابع وقوع**[5] ψ_G که به هر یال G، یک زوج نامرتّب از رأس‌های G را که الزاماً متمایز نیستند، نسبت می‌دهد. اگر e یک یال و u و v دو رأس باشند، به‌طوری‌که $\psi_G(e) = uv$ ؛ در این صورت گفته می‌شود e رأس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است و همچنین رأس‌های u و v، دو سر یال e نامیده می‌شوند. یالی با دو رأس انتهایی یکسان را **طوقه**[6] و یال با رئوس انتهایی متمایز را **یال پیوندی**[7] نامیم. یال‌های متمایزی را که دارای زوج رئوس انتهایی یکسان هستند، **یال‌های چندگانه**[8] می‌گوییم. در گراف‌های چندگانه علاوه‌بر یال‌های پیوندی، ممکن است طوقه و یال‌های چندگانه نیز وجود داشته باشند (چون در تابع ψ_G ممکن است زوج رئوس انتخاب‌شده، متمایز نباشند و یا ψ_G ، تابعی یک به یک نباشد). گرافی را که طوقه و یال چندگانه نداشته باشد، **گراف ساده**[9] گوییم. اگر G گراف ساده باشد، آنگاه می‌توان آن را به‌صورت دوتایی مرتّب $(V(G),E(G))$ معرفی کرد که در آن $V(G)$ مجموعه ناتهی از رأس‌ها و $E(G)$ مجموعه جفت‌های نامرتب از رأس‌ها است.



شکل ۱-۱ گراف چندگانهٔ G

1. Graph
2. Multigraph
3. Vertex
4. Edge
5. Incidence function
6. Loop
7. Link
8. Multiple edge
9. Simple graph

مثال ۱-۲-۱. گراف چندگانهٔ G نمایش داده‌شده در شکل ۱-۱ با مجموعه یال‌های $E(G) = \{e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$ و مجموعه رئوس $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ با تابع وقوع ψ_G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_G(e) = uv, \psi_G(f) = uv, \psi_G(i) = vv, \psi_G(h) = vy, \psi_G(g) = ux,$$
$$\psi_G(j) = uu, \psi_G(k) = vx, \psi_G(l) = uy, \psi_G(m) = wy, \psi_G(n) = xw.$$

در این گراف، یال‌های i و j را طوقه و یال‌های e و f را یال‌های چندگانه می‌نامند.

مجموعهٔ $V(G)$ می‌تواند نامتناهی نیز در نظر گرفته شود؛ در این صورت مجموعهٔ $E(G)$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. تعداد رأس‌ها، یعنی $|V(G)| = n$ را **مرتبهٔ**[1] گراف G و تعداد یال‌ها، یعنی $|E(G)| = m$ را **اندازهٔ**[2] گراف G می‌گوییم. در این کتاب، به حالتی پرداخته‌ایم که $V(G)$ متناهی است.

۱-۲-۱ درجهٔ رأس‌ها

فرض کنید $e = uv$ یال دلخواهی از گراف G باشد. به رأس‌های u و v، **رأس‌های انتهایی**[3] یا به‌طور خلاصه دو انتهای یال e می‌گوییم. رأس‌های $u, v \in V(G)$، **همسایه** یا **مجاور**[4] نامیده می‌شوند، هرگاه یالی مانند $e \in E(G)$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که u و v دو رأس انتهایی e باشند. همچنین دو یال در G را با هم مجاور گوییم، هرگاه دارای یک رأس مشترک باشند. اگر دو رأس u و v با هم مجاور باشند، آنگاه می‌گوییم u یک **همسایه**[5] v است (و رأس v هم یک همسایه u خواهد بود). مجموعهٔ تمام رئوس مجاور با رأس u را با $N(u)$ نشان می‌دهیم. برای اختصار، یال $e = \{u, v\}$ را به‌صورت $e = uv = vu$ نمایش می‌دهیم. **درجهٔ**[6] هر رأس v، در گراف G، را تعداد یال‌های گذرنده بر آن در نظر می‌گیریم و آن را با نماد $deg_G(v)$ یا به‌اختصار با $d(v)$ نشان می‌دهیم. ماکسیمم و مینیمم درجه در یک گراف G، معمولاً (به ترتیب) با نمادهای $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ (یا به‌اختصار Δ و δ) نشان داده می‌شود. رأس با درجهٔ زوج را رأس زوج و همچنین رأس با درجهٔ فرد را رأس فرد می‌خوانیم.

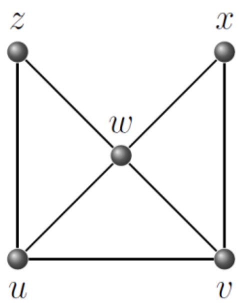
مثال ۱-۲-۲. گراف G نشان داده‌شده در شکل ۱-۲ را درنظر بگیرید. مطلوب است محاسبهٔ δ و Δ.

حل: برای محاسبهٔ ماکسیمم و مینیمم درجه، ابتدا درجهٔ تمام رأس‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$deg(z) = deg(x) = 2, \qquad deg(u) = deg(v) = 3, \qquad deg(w) = 4.$$

بنابراین، $\Delta = 4$ و $\delta = 2$. □

1. Order
2. Size
3. Ends
4. Incident
5. Neighbour
6. Degree



شکل ۱-۲ گراف G

قضیه ۱-۲-۳. برای هر گراف دلخواه G داریم:

$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|$$

برهان. با توّجه به اینکه دو رأس بر هر یال پیوندی واقع است، پس هنگام شمارش درجهٔ رئوس، هر یال دو بار شمرده می‌شود و بنابراین تساوی بدیهی است. □

نتیجه ۱-۲-۴. در هر گراف، تعداد رئوس فرد، عددی زوج است. □

دنبالهٔ $\mathrm{d} = (d_1, d_2, \dots d_n)$ **دنبالهٔ گرافی**[1] نامیده می‌شود، هرگاه یک گراف ساده با دنباله درجه‌های d وجود داشته باشد.

گزاره ۱-۲-۵. (هاول-حکیمی[2]**)** اگر $(d_1, d_2, \dots d_n)$ یک دنبالهٔ غیرصعودی از اعداد صحیح نامنفی باشد و $\mathrm{d}' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$، آنگاه دنبالهٔ $\mathrm{d} = (d_1, d_2, \dots d_n)$ گرافی است اگر و فقط اگر دنباله d' گرافی باشد.

برهان. فرض کنیم d دنبالهٔ گرافی باشد، پس گرافی مانند G با دنباله درجات d وجود دارد. فرض کنیم $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. اگر v_1 مجاور رئوس $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ باشد، آنگاه $G - v_1$ دارای دنبالهٔ درجات d' است و بنابراین d' دنبالهٔ گرافی است. در غیر این صورت، v_1 با حداقل یک رأس مانند v_j (که $2 \le j \le d_1 + 1$) مجاور نیست و با رأسی مانند v_k (که $d_1 + 2 \le k \le n$) مجاور است.

اگر $deg(v_k) = deg(v_j)$ ، آنگاه نام رأس‌های v_j و v_k را جابه‌جا می‌کنیم و مجدداً طبق توضیحات قبل، d' دنبالهٔ گرافی است. در غیر این صورت، $deg(v_j) > deg(v_k)$. بنابراین رأسی مانند v_l وجود

1. Graphic sequence
2. Havel–Hakimi

دارد که با رأس v_j مجاور است، ولی با رأس v_k مجاور نیست. با حذف دو یال v_1v_k و v_jv_l از G و اضافه‌کردن دو یال v_1v_j و v_kv_l به گراف G، گرافی مانند H حاصل می‌شود که دنبالهٔ درجات H برابر d است. رأس v_1 در H، با رئوس $v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}$ مجاور است و بنابراین $H - v_1$ دارای دنبالهٔ درجات d' است. بنابراین d' دنبالهٔ گرافی است.

برعکس، فرض کنیم d' دنبالهٔ گرافی است. پس گرافی مانند G با دنبالهٔ درجات رئوس d'، وجود دارد. اکنون با افزودن رأس v_1 و یال‌های $v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_{d_1+1}$ به این گراف، گرافی مانند H ایجاد می‌شود که دنبالهٔ درجات آن، برابر d است. بنابراین d یک دنبالهٔ گرافی است. □

مثال ۱-۲-۶. آیا دنبالهٔ (۵,۳,۳,۳,۲,۲,۱,۱) گرافی است؟

حل: برای پاسخ به این سؤال، بنابر قضیهٔ هاول- حکیمی گام‌های زیر را برروی این دنباله اجرا می‌کنیم. اگر دنبالهٔ d دنباله‌ای از n عدد صحیح باشد، آنگاه:

۱. اگر عددی بزرگ‌تر از $n-1$ در d باشد، آنگاه d گرافی نیست.
۲. اگر تمام اعداد دنباله صفر باشند، آنگاه d گرافی است و اگر عددی منفی در دنباله باشد، آنگاه dگرافی نیست.
۳. دنبالهٔ d را به‌صورت غیرصعودی مرتّب کن.
۴. اگر i اوّلین عدد دنباله است، آنگاه اوّلین عدد دنباله را حذف کرده و از i تا عدد بعدی نیز، یک واحد کم کن و به گام ۲ برو.

با اجرای الگوریتم فوق، برروی دنبالهٔ مذکور داریم:

$$(۵,۳,۳,۳,۲,۲,۱,۱) \to (۲,۲,۲,۱,۱,۱,۱) \to (۱,۱,۱,۱,۱,۱)$$
$$\to (0,۱,۱,۱,۱) \to (0,۱,۱,0) \to (0,0,0).$$

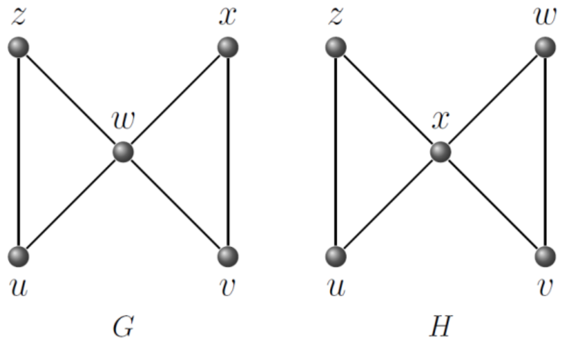
بنابراین، دنبالهٔ (۵,۳,۳,۳,۲,۲,۱,۱) گرافی است. □

۱-۲-۲ همسانی و یک‌ریختی گراف‌ها

اگر برای دو گراف دلخواه G و H تساوی‌های $V(G) = V(H)$، $E(G) = E(H)$ و $\psi_G = \psi_H$ را داشته باشیم، آنگاه دو گراف G و H را همسان گوییم و می‌نویسیم $G = H$. واضح است که برای دو گراف همسان، می‌توان نمودارهای یکسانی رسم کرد. امّا باید دقّت داشته باشیم که برخی گراف‌های ناهمسان نیز دارای نمودارهای یکسانی هستند که دلیل آن یک‌ریختی آن‌ها است.

دو گراف G و H را **یک‌ریخت**[1] نامیم و می‌نویسیم $G \cong H$ اگر نگاشت دوسویی $f: V(G) \to V(H)$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$.

برای توضیح بیشتر، گراف‌های G و H نمایش داده‌شده در شکل ۱-۳ را در نظر می‌گیریم. در گراف G، دو رأس u و w مجاورند، درحالی‌که در گراف H مجاور نیستند و این یعنی $\psi_G \neq \psi_H$؛ بنابراین $G \neq H$. ولی نگاشت $f: V(G) \to V(H)$ به‌صورت $f(u) = u, f(v) = v, f(w) = x, f(z) = z$ و $f(x) = w$ برای این دو گراف وجود دارد، به‌طوری که $uv \in E(G)$ اگر و فقط اگر $f(u)f(v) \in E(H)$؛ بنابراین $G \cong H$.



شکل ۱-۳. دو گراف ناهمسان ولی یک‌ریخت

توّجه کنید که برای تشخیص اولیهٔ غیریک‌ریخت بودن دو گراف، می‌توان به درجات رئوس و سایر ویژگی‌های آن‌ها دقّت کرد. براساس تعریف یک‌ریختی، واضح است که دو گراف یک‌ریخت دارای دنباله درجات برابر هستند؛ همچنین طول و تعداد دورهای موجود در آن‌ها با هم برابر است. به‌عنوان مثال، اگر در گرافی رأسی از درجهٔ ۵ موجود باشد ولی دیگری دارای رأسی با چنین درجه نباشد، آنگاه دو گراف غیریک‌ریخت هستند. به‌عنوان مثالی دیگر، اگر در گرافی دو رأس درجهٔ ۵ مجاور باشند و گراف دیگری دارای دو رأس درجهٔ ۵ باشد ولی هیچ دو رأس درجهٔ ۵ در این گراف با هم مجاور نباشند، آنگاه دو گراف غیریک‌ریخت هستند. یا اینکه، اگر در گرافی دور به طول ۳ وجود داشته باشد ولی در دیگری وجود نداشته باشد، آنگاه دو گراف غیریک‌ریخت هستند.

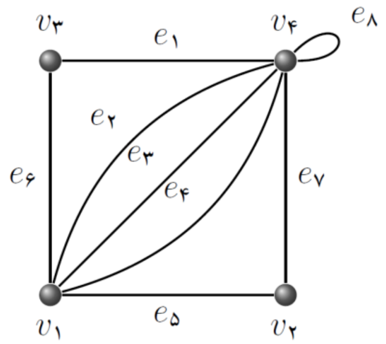
۱-۳ ماتریس وقوع و ماتریس مجاورت

متناظر با هر گراف G از مرتبهٔ n و اندازهٔ m، یک ماتریس $n \times m$ وجود دارد که **ماتریس وقوع**[2] نامیده

1. Isomorphism
2. Incidence matrix

می‌شود. اگر مجموعهٔ رأس‌ها و یال‌های G به‌صورت $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ باشند، آنگاه ماتریس وقوع G، ماتریسی مانند $M = [m_{ij}]$ است که در آن m_{ij} برابر با تعداد دفعاتی است که v_i بر e_j واقع شده است $(i = 1, \dots, n \text{ ، } j = 1, \dots, m)$ بدیهی است که m_{ij} یکی از مقادیر ۰، ۱ یا ۲ را می‌تواند داشته باشد. درحقیقت ماتریس وقوع یک گراف، طریقهٔ دیگری برای معیّن‌کردن آن گراف است.

راه دیگر معیّن‌کردن یک گراف، استفاده از **ماتریس مجاورت**[1] آن گراف است. ماتریس مجاورت، ماتریسی $n \times n$ مانند $A(G) = [a_{ij}]$ است که در آن a_{ij} برابر تعداد یال‌هایی است که v_i را به v_j وصل می‌کند$(i, j = 1, \dots, n)$. توّجه کنید که اگر e_i یک طوقه به‌صورت $v_j v_j$ باشد، آنگاه $a_{jj} = 2$ و $m_{ji} = 2$؛ به عبارتی، طوقه دو بار شمرده می‌شود. یک گراف به همراه ماتریس وقوع و ماتریس مجاورت آن در شکل ۱-۴ نشان داده‌شده است.



$$M(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

شکل ۱-۴. گراف H

فرض کنید قصد محاسبهٔ متغیری از یک گراف ۱۰۰۰ رأسی را داشته باشیم؛ محاسبهٔ دستی این متغیر احتمالاً غیرممکن و شاید بسیار زمان‌گیر باشد، درحالی‌که با اجرای الگوریتمی مناسب به‌وسیلهٔ رایانه این فرایند بسیار سریع‌تر انجام می‌شود. پس ابتدا باید گراف موردنظر را به شکل قابل‌درک برای رایانه تبدیل کرد. برای این کار، ماتریس‌های مجاورت و وقوع ابزاری مفید خواهند بود. شایان ذکر است که در حالت

1. Adjacency matrix