

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



مقدمه‌ای بر اپتیک کوانتومی

کریستوفر گری - پیتر نایت

ترجمه:

دکتر محسن سربیشه‌ئی

استاد دانشگاه فردوسی مشهد

فاطمه اشرف‌مقیم

عضو هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

دکتر کورش جاویدان

استاد دانشگاه فردوسی مشهد

سرشناسه:	گری، کریستوفر سی، ۱۹۴۹-م.	Gerry, C. C. (Christopher C.), 1949-
عنوان و نام پدیدآور:	مقدمه‌ای بر اپتیک کوانتومی / کریستوفر گری، پیتر نایت؛ ترجمه محسن سربیشه‌ئی، فاطمه اشرف‌مقیمی، کورش جاویدان؛ ویراستار علمی جواد اخترشناس؛ ویراستار ادبی هانیه اسدیپور فعال مشهد.	
مشخصات نشر:	مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۱.	
مشخصات ظاهری:	۳۶۸ ص.: مصور، نمودار.	
فروست:	انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۸۶۰.	
شابک:		ISBN: 978-964-386-553-5
وضعیت فهرست‌نویسی:	فاپا.	
یادداشت:	عنوان اصلی:	Introductory quantum optics, 2005.
یادداشت:	کتابنامه.	
موضوع:	نورشناسی کوانتومی	Quantum optics
شناسه افزوده:	نایت، پیتر، ۱۹۴۷-م.	Knight, Peter (Peter L.), 1947-
شناسه افزوده:	سربیشه‌ای، محسن، ۱۳۲۶- مترجم	
شناسه افزوده:	اشرف مقیمی، فاطمه، ۱۳۲۷- مترجم	
شناسه افزوده:	جاویدان، کورش، ۱۳۴۴- مترجم	
شناسه افزوده:	دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.	
رده‌بندی کنگره:	QC۴۴۶/۲	
رده‌بندی دیویی:	۵۳۵	
شماره کتابشناسی ملی:	۹۱۱۵۶۱۶	

مقدمه‌ای بر اپتیک کوانتومی

پدیدآورندگان: کریستوفر گری - پیتر نایت
 ترجمه: دکتر محسن سربیشه‌ئی؛ فاطمه اشرف‌مقیمی؛ دکتر کورش جاویدان
 ویراستار علمی: دکتر جواد اخترشناس
 ویراستار ادبی: هانیه اسدیپور فعال مشهد
 مشخصات: وزیری، ۱۰۰ نسخه، چاپ دوم، پاییز ۱۴۰۳ (اول، ۱۴۰۱)
 چاپ و صحافی: همیار
 بها: ۳/۳۰۰/۰۰۰ ریال
 حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.



مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
 تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶ - ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)
 مؤسسه کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)
 مؤسسه دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شماره ۱۴۲ تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

<http://press.um.ac.ir>

Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

۹.....	مقدمه مترجمان
۱۰.....	اپتیک کوانتومی مقدماتی
۱۱.....	سپاسگزاری
۱۳.....	فصل ۱. مقدمه
۱۳.....	۱-۱ مفاد و اهداف این کتاب
۱۴.....	۲-۱ تاریخچه
۲۰.....	۳-۱ محتوای این کتاب
۲۱.....	مراجع
۲۱.....	پیشنهادهای برای مطالعه بیشتر
۲۳.....	فصل ۲. کوانتش میدان
۲۳.....	۱-۲ کوانتش یک میدان تک‌مدی
۲۹.....	۲-۲ افت‌وخیزهای یک میدان تک‌مدی
۳۱.....	۳-۲ عملگرهای تربیع برای یک میدان تک‌مدی
۳۲.....	۴-۲ میدان‌های چندمدی
۴۱.....	۵-۲ میدان‌های گرمایی
۴۵.....	۶-۲ افت‌وخیزهای خلأ و انرژی نقطه صفر
۵۰.....	۷-۲ فاز کوانتومی
۵۸.....	مسائل
۶۰.....	مراجع
۶۰.....	کتاب‌شناسی
۶۱.....	فصل ۳. حالت‌های همدوس
۶۱.....	۱-۳ ویژه‌حالت‌های عملگر نابودی و حالت‌های با کمترین عدم قطعیت
۶۶.....	۲-۳ حالت‌های خلأ جابه‌جاشده
۶۹.....	۳-۳ بسته‌های موج و تحول زمانی
۷۰.....	۴-۳ تولید حالت‌های همدوس

۷۲	۳-۵ خواص دیگر حالت‌های همدوس
۷۶	۳-۶ تصویر فضای فازی حالت‌های همدوس
۷۹	۳-۷ عملگرهای چگالی و توزیع‌های احتمال در فضای فاز
۸۵	۳-۸ توابع مشخصه
۹۱	مسائل
۹۳	مراجع
۹۳	کتاب‌شناسی

۹۵	فصل ۴. گسیل و جذب تابش توسط اتم‌ها
۹۵	۴-۱ برهم‌کنش‌های اتم-میدان
۹۸	۴-۲ برهم‌کنش اتم با یک میدان کلاسیکی
۱۰۳	۴-۳ برهم‌کنش اتم با یک میدان کوانتیده
۱۰۹	۴-۴ مدل رابی
۱۱۲	۴-۵ مدل کاملاً مکانیک کوانتومی؛ مدل جینز-کامینگز
۱۲۲	۴-۶ حالت‌های پوشیده
۱۲۵	۴-۷ روش عملگر چگالی: کاربرد حالت‌های گرمایی
۱۲۹	۴-۸ مدل جینز-کامینگز با واکوکی بزرگ: برهم‌کنش پاشنده
۱۳۲	۴-۹ تعمیم‌های مدل جینز-کامینگز
۱۳۲	۴-۱۰ تجزیه اشمیت و آنتروپی فون‌نویمن برای مدل جینز-کامینگز
۱۳۵	مسائل
۱۳۷	مراجع
۱۳۸	کتاب‌شناسی

۱۳۹	فصل ۵. توابع همدوسی کوانتومی
۱۳۹	۵-۱ توابع همدوسی کلاسیکی
۱۴۴	۵-۲ توابع همدوسی کوانتومی
۱۴۹	۵-۳ تداخل یانگ
۱۵۳	۵-۴ توابع همدوسی مرتبه‌های بالاتر
۱۵۹	مسائل
۱۶۰	مراجع
۱۶۰	کتاب‌شناسی

فصل ۶. تقسیم‌کننده‌های باریکه و تداخل سنج‌ها	۱۶۱
۱-۶ آزمایش‌ها با تک فوتون‌ها	۱۶۱
۲-۶ مکانیک کوانتومی تقسیم‌کننده‌های باریکه	۱۶۳
۳-۶ تداخل سنجی با تک فوتون	۱۷۲
۴-۶ اندازه‌گیری‌های بدون برهم‌کنش	۱۷۳
۵-۶ تداخل سنجی با حالت‌های همدوس نور	۱۷۵
مسائل	۱۷۷
مراجع	۱۷۸
کتاب‌شناسی	۱۷۹
فصل ۷. نور غیر کلاسیک	۱۸۱
۱-۷ فشردگی تربیع	۱۸۲
۲-۷ تولید نور فشردۀ تربیعی	۱۹۸
۳-۷ آشکارسازی نور فشردۀ تربیعی	۱۹۹
۴-۷ حالت‌های فشردۀ دامنه (عددی)	۲۰۲
۵-۷ پادگروهی فوتونی	۲۰۴
۶-۷ حالت‌های گریه‌شروینگر	۲۰۷
۷-۷ حالت‌های خلأ فشردۀ دوّمدی	۲۱۶
۸-۷ فشردگی مرتبه‌های بالاتر	۲۲۳
۹-۷ نور فشردۀ پهن‌بند	۲۲۵
مسائل	۲۲۶
مراجع	۲۲۹
کتاب‌شناسی	۲۳۰
فصل ۸. برهم‌کنش‌های اتلافی و واهمدوسی	۲۳۱
۱-۸ مقدمه	۲۳۱
۲-۸ تحقّق‌های منفرد یا آنسامبل‌ها	۲۳۲
۳-۸ تحقّق انفرادی	۲۳۶
۴-۸ قفسه‌بندی و دینامیک تلگراف در اتم‌های سه‌ترازی	۲۳۹
۵-۸ واهمدوسی	۲۴۲
۶-۸ تولید حالت‌های همدوس از واهمدوسی: تعادل اپتیکی	۲۴۴
۷-۸ نتیجه‌گیری	۲۴۶
مسائل	۲۴۶

۲۴۷.....	مراجع
۲۴۸.....	کتاب‌شناسی

فصل ۹. تست اپتیکی مکانیک کوانتومی..... ۲۴۹

۲۵۰.....	۱-۹ چشمه‌های فوتونی: تبدیل فروافتی پارامتری خودبه‌خودی
۲۵۵.....	۲-۹ تداخل سنجی هونگ-او-مندل
۲۵۷.....	۳-۹ پاک‌کن کوانتومی
۲۶۰.....	۴-۹ همدوسی القایی
۲۶۳.....	۵-۹ تونل‌زنی فوق‌نوری فوتون‌ها
۲۶۵.....	۶-۹ تست اپتیکی نظریه‌های واقع‌بینانه موضعی و قضیه بل
۲۷۲.....	۷-۹ آزمایش فرانسون
۲۷۴.....	۸-۹ کاربرد نور تبدیل‌یافته فروافتی در مترولوژی بدون استانداردهای مطلق
۲۷۶.....	مسائل
۲۷۷.....	مراجع
۲۷۸.....	کتاب‌شناسی

فصل ۱۰. آزمایش‌ها در کاواک QED و با یون‌های در تله افتاده..... ۲۷۹

۲۷۹.....	۱-۱۰ اتم‌های ریدبرگ
۲۸۲.....	۲-۱۰ اتم ریدبرگ در برهم‌کنش با یک میدان کاواک
۲۸۸.....	۳-۱۰ تحقق تجربی مدل جینز-کامینگز
۲۹۱.....	۴-۱۰ تولید اتم‌های درهم‌تنیده در CQED
۲۹۲.....	۵-۱۰ تشکیل حالت‌های گریه‌شودینگر با برهم‌کنش‌های پاشنده اتم-میدان و واهمدوسی از کوانتوم به کلاسیک
۲۹۷.....	۶-۱۰ اندازه‌گیری غیرمخرب کوانتومی عدد فوتونی
۲۹۸.....	۷-۱۰ تحقق برهم‌کنش جینز-کامینگز در حرکت یک یون به تله افتاده
۳۰۲.....	۸-۱۰ نتیجه‌گیری نهایی
۳۰۳.....	مسائل
۳۰۴.....	مراجع
۳۰۵.....	کتاب‌شناسی

فصل ۱۱. کاربردهای درهم‌تنیدگی:..... ۳۰۷

۳۰۷.....	تداخل سنجی محدودشده‌هایزبرگ و پردازش اطلاعات کوانتومی
۳۰۹.....	۱-۱۱ مزیت درهم‌تنیدگی
۳۱۰.....	۲-۱۱ درهم‌تنیدگی و اندازه‌گیری‌های تداخلی

۳-۱۱ دوربری کوانتومی	۳۱۲
۴-۱۱ رمز نگاری	۳۱۵
۵-۱۱ کلید خصوصی سیستم‌های رمز گذار	۳۱۶
۶-۱۱ سیستم‌های رمز نگاری کلید عمومی	۳۱۸
۷-۱۱ مولد اعداد تصادفی کوانتومی	۳۲۰
۸-۱۱ رمز نگاری کوانتومی	۳۲۱
۹-۱۱ چشم اندازهای آینده ارتباطات کوانتومی	۳۲۷
۱۰-۱۱ گیت‌ها در محاسبات کوانتومی	۳۲۸
۱۱-۱۱ تحقق اپتیکی چند گیت کوانتومی	۳۳۴
۱۲-۱۱ واهمدوسی و تصحیح خطای کوانتومی	۳۳۸
مسائل	۳۳۹
مراجع	۳۴۰
کتاب شناسی	۳۴۱
پیوست «ا»: عملگر چگالی، حالت‌های درهم تنیده، تجزیه اشمیت و آنتروپی فون نویمان	۳۴۲
پیوست «ب»: نظریه اندازه گیری کوانتومی به اختصار	۳۵۳
پیوست «ج»: روش به دست آوردن هامیلتونی مؤثر برای برهم کنش‌های پراکننده (دور از تشدید)	۳۵۷
پیوست «د»: اپتیک غیر خطی و تبدیل فروافتی پارامتری خود به خودی	۳۶۱
نمایه	۳۶۳

press.um.ac.ir

مقدمه مترجمان

کتاب حاضر برگردان کتاب *مقدمه‌ای بر اپتیک کوانتومی* تألیف کریستوفر گری و پتر نایت است که هر دو از اساتید برجسته در زمینه اپتیک کوانتومی هستند. همان‌طوری که مؤلفان اشاره می‌کنند، اپتیک کوانتومی یکی از شاخه‌های فعال فیزیک است که در حال حاضر رو به گسترش است.

این کتاب می‌تواند برای دانشجویان سال‌های آخر دوره کارشناسی و سال‌های اولیه تحصیلات تکمیلی با گرایش‌های اتمی-مولکولی و اطلاعات کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به تحولات سریع در این شاخه فیزیک، مراجع جدیدی نیز علاوه بر مراجع آمده در کتاب وجود دارند که خواننده می‌تواند با مراجعه به مجلات آن‌ها را مورد استفاده قرار دهد.

لازم می‌دانیم از همکار ارجمند، جناب آقای دکتر سیدجواد اخترشناس برای ویراستاری علمی دقیق این کتاب و نیز از خانم هانیه اسدپور فعال مشهد برای ویراستاری ادبی قدردانی کنیم. از آنجا که قسمتی از ترجمه و کارهای مربوط زمانی انجام شده است که مهمان آقای دکتر حسن سریش‌ئی بوده و از امکانات اینترنتی و الکترونیکی و مشاوره ایشان بهره برده‌ایم، لازم می‌دانیم به‌طور ویژه از ایشان تشکر کنیم.

در پایان از مدیریت نشر آثار علمی دانشگاه فردوسی مشهد که امکان چاپ این کتاب را فراهم کردند و نیز از آقای دکتر حسین صابری، مدیریت محترم نشر آثار علمی دانشگاه فردوسی مشهد، کارشناسان نشر، آقایان مصطفی قندهاری، حمید نخعی و حمیدرضا نداف سنگانی تشکر و قدردانی می‌کنیم.

اپتیک کوانتومی مقدماتی

این کتاب به معرفی مقدماتی مبانی اپتیک کوانتومی، مطالعه ماهیت کوانتومی نور و برهم کنش آن با ماده می‌پردازد.

ارائه مطالب تقریباً به‌طور کامل به میدان کوانتیده الکترومغناطیسی اختصاص دارد. عناوین ارائه‌شده در این کتاب شامل کوانتش میدان تک‌مدی در یک کاواک، کوانتش میدان‌های چندمدی، فاز کوانتومی، حالت‌های همدوس، توزیع شبه‌احتمالی در فضای فاز، برهم کنش‌های اتم-میدان، مدل جینز-کامینگز، نظریه همدوسی کوانتومی، تقسیم‌کننده‌های باریکه و تداخل سنج‌ها، حالت‌های غیر کلاسیکی میدان با فشردگی و غیره، تست‌های واقع‌گرایی موضعی با فوتون‌های درهم‌تنیده از تبدیل فروافتی، تحقق تجربی الکترودینامیک کوانتومی کاواک، یون‌های در تله‌افتاده، واهمدوسی و چند کاربرد به فرایندهای اطلاعات کوانتومی، به‌خصوص رمزنگاری کوانتومی است. این کتاب شامل مسائل متعدد به‌عنوان تمرین و یک کتاب‌شناسی جامع است. این کتاب برای دانشجویان سال‌های آخر کارشناسی که دروس اپتیک کوانتومی را انتخاب کرده و قبلاً درس مکانیک کوانتومی را گذرانده‌اند و برای دانشجویان سال‌های اول و دوم تحصیلات تکمیلی نوشته شده است.

راهنمای حل مسائل آخر فصل‌ها برای مدرّسان از طریق [Solutions @ Cambrige.Org](http://Solutions@Cambridge.Org) قابل دسترسی است. کریستوفر گری^۱ پروفیسور فیزیک در کالج لیمن^۲، دانشگاه سیتی نیویورک^۳ است. وی یکی از اولین کسانی بود که از روش‌های نظریه گروه در اپتیک کوانتومی استفاده کردند و نیز از جمله کسانی است که به‌طور فعال در مجله *Review A Physical* مشارکت دارد. در ۱۹۹۲ با مشارکت الف. اینوماتا^۴ و اچ. کوراتسوجی^۵ کتاب *انتگرال‌های مسیر و حالت‌های همدوس برای SU(2) و SU(1,1)* را تألیف کردند.

بیتر نایت^۶ یکی از چهره‌های پیشرو در اپتیک کوانتومی است و علاوه بر اینکه رئیس انجمن اپتیک آمریکا در ۲۰۰۴ بود، عضو انجمن سلطنتی نیز هست. در ۱۹۸۳ همراه با آل. آلن^۷ کتاب *مفاهیم اپتیک کوانتومی*^۸ را تألیف کرد. وی اکنون رئیس دپارتمان فیزیک کالج سلطنتی^۹ است و ریاست مشاوره علمی در آزمایشگاه ملی فیزیک بریتانیا را برعهده دارد.

1. Christopher Gerry
2. Lehman College
3. City University of New York

4. A. Inomata
5. H. Kuratsuji
6. Peter Knight

7. L. Allen
8. Concepts of Quantum Optics
9. Imperial College

سپاسگزاری

این کتاب برآمده از درس‌هایی است که در طول چند سال در کالج سلطنتی لندن و مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیتی^۱ نیویورک ارائه داده‌ایم و سپاسگزار بسیاری از دانشجویانی هستیم که در این کلاس‌ها شرکت کرده‌اند و این مطالب برای آن‌ها ارائه شده است.

از بسیاری از همکاران که در طول سال‌ها با دادن توصیه، ارائه ایده‌ها را یاری کرده و در این راه مشوق ما بوده‌اند، سپاسگزاریم. به‌ویژه از دکتر سیمون کاپلین^۲ در چاپخانه دانشگاه کمبریج که بیش از ما به انجام رسیدن این کار مطمئن بود، تشکر می‌کنیم. در طول این سال‌ها از بحث و گفت‌وگوهای با همکاران خود، مخصوصاً لس آلن^۳، گابریل بارتون^۴، جانوس برگو^۵، کیت بارت^۶، ولادیمیر بوزک^۷، ریچارد کمپوس^۸، برایان دالتون^۹، جوزف ابرلی^{۱۰}، رینر گروب^{۱۱}، ادوین هاچ^{۱۲}، رابرت هیلبورن^{۱۳}، مارک هیلری^{۱۴}، اد هیندز^{۱۵}، رادنی لودن^{۱۶}، پیتر میلونی^{۱۷}، بیل مونرو^{۱۸}، جفری نیو^{۱۹}، ادوین پاور^{۲۰}، جورج سریز^{۲۱}، ولفگانگ شلیچ^{۲۲}، بروس شور^{۲۳}، کارلوس استرودجی^{۲۴}، آر^{۲۵}، استوارت سواين^{۲۶}، دن والز^{۲۷} و کرزیستوف ودکایوویچ^{۲۸} بهره برده‌ایم. ما به‌ویژه از عادل بن موسی^{۲۹} که با استفاده از تخصص خود در ممتیک^{۳۰}، کورل دراو^{۳۱} و اوريجين گرافیک^{۳۲} رسم تمام شکل‌های این کتاب، حل مسائل آخر فصل و نیز خطایابی نسخه‌های پیش‌نویس را برعهده داشته است، سپاسگزاریم. همین‌طور از خانم آلن کالکینز^{۳۳} برای تایپ چند فصل از پیش‌نویس اولیه تشکر می‌کنیم.

دانشجویان و پسادکترهای قبلی که خیلی چیزها به ما آموختند و امروز خود از پیشروان این حوزه مهیج هستند؛ به‌ویژه استفان بارت^{۳۴}، الموت بیچ^{۳۵}، آرتور اکرت^{۳۶}، باری گارای^{۳۷}، کریستوف کیتل^{۳۸}، میونگشیک کیم^{۳۹}، جرارد ملبورن^{۴۰}، مارتین پلنیو^{۴۱}، باری سندرز^{۴۲}، استفان شیل^{۴۳}، وولاتو ودرال^{۴۴} بسیاری از آنچه در این کتاب است را به‌خاطر خواهند داشت.

از آنجاکه این کتاب به‌عنوان یک مقدمه بر اپتیک کوانتومی نوشته شده است، سعی نکرده‌ایم مراجع را به‌طور جامع بیاوریم. از مؤلفانی که به آن‌ها ارجاع نداده‌ایم، عذرخواهی می‌کنیم.

1. City University
2. Simon Capelin
3. Les Allen
4. Gabriele Barton
5. Janos Bergou
6. Keith Burnett
7. Veladimir Buzek
8. Richard Campos
9. Bryan Dalton
10. Joseph Eberly
11. Rainer Grone
12. Edwin HachIII
13. Robert Hilborn
14. Mark Hillery
15. Ed Hinds

16. Rodney Loudon
17. Peter Milonni
18. Bill Munro
19. Geoffrey New
20. Edwin Power
21. George Series
22. Wolfgang Schleich
23. Bruce Shore
24. Carlos Stroud Jr
25. Stuart Swain
26. Dan Walls
27. Krzysztof Wodkiewicz
28. Adil Benmoussa
29. Mathematica
30. Corel Draw

31. Origin Graphics
32. Ellen Calkins
33. Stephen Barnett
34. Almut Beige
35. ArtureEkert
36. Barry Garraway
37. Christoph Keitel
38. Myunshik Kim
39. Gerard Milburn
40. Martin Plenio
41. Barry Sanders
42. Stefan Scheel
43. Valatko Vedral

کریستوفر گری از اعضای دپارتمان فیزیک و نجوم کالج لیمن و دیگر اعضای کالج لیمن که در زمان نگارش این کتاب مشوق وی بوده‌اند، تشکر می‌کند.

پیتر نایت به‌خصوص از کریس نایت که در زمان نگارش کتاب صبورانه با دادن سرویس و پذیرایی با چای مشوق وی بوده است، سپاسگزار است.

کار ما در چهار دهه گذشته در زمینه اپتیک کوانتومی از سوی منابع متعددی از نظر مالی حمایت شده است: پیتر نایت به‌ویژه از حمایت مالی UK SRC، SERC، EPSRC و انجمن سلطنتی، اتحادیه اروپا، بنیاد Nuffield و ارتش ایالات متحده سپاسگزار است؛ کریستوفر گری از بنیاد علمی ملی، بنگاه تحقیقاتی و کنگره پرسنل حرفه‌ای دانشگاه سیتی نیویورک (PSC-CUNY) سپاسگزاری می‌کند.

گری این کتاب را به پسرش، اریک، تقدیم می‌کند.
نایت این کتاب را به همسرش، کریس، تقدیم می‌کند.

۱-۱ مفاد و اهداف این کتاب

اپتیک کوانتومی یکی از پویاترین حوزه‌های زنده در فیزیک معاصر است. در حالی که این شاخه از فیزیک در دو دهه گذشته موضوع تحقیقات زیادی همراه با بیشترین فعالیت‌های تحصیلات تکمیلی بوده، در چند سال اخیر وارد مواد درسی دانشجویان کارشناسی نیز شده است. این کتاب از مطالب درسی که برای دانشجویان سال آخر کارشناسی و ابتدای دوره‌های تحصیلات تکمیلی در کالج سلطنتی لندن^۱ و سیتی یونیورسیتی نیویورک^۲ ارائه داده‌ایم، گردآوری شده است. با وجودی که تعداد نسبتاً زیادی از کتب و کارهای تحقیقاتی در این زمینه وجود دارد، ولی احساس کردیم که هنوز نیاز واقعی به یک کتاب مناسب برای دانشجویان سال آخر کارشناسی و ابتدای تحصیلات تکمیلی که بر مفاهیم پایه این رشته تأکید کند، وجود دارد. این شاخه از فیزیک در حال حاضر تیزهوش‌ترین دانشجویان را به خود جلب می‌کند که بخشی به دلیل پیشرفت‌های خارق‌العاده‌ای است که در این زمینه رخ داده است (از جمله دوربری، رمزنگاری کوانتومی، گره شرو دینگر، نقض واقعیتی موضعی بل و مانند آن). امیدواریم این کتاب مقدمه مناسبی برای این مبحث جذاب باشد.

هدف ما نوشتن کتابی مقدماتی دربارهٔ مباحث بنیادی اپتیک کوانتومی بود که برای استفادهٔ دانشجویان سال‌های آخر کارشناسی که درس مکانیک کوانتومی را گذرانده‌اند و برای دانشجویان سال‌های اول و دوم تحصیلات تکمیلی که در نهایت قصد ادامهٔ تحقیقات در این زمینه را دارند، مناسب باشد. مطالب این کتاب آسان نیست و برای دانشجویان کارشناسی و ابتدای تحصیلات تکمیلی چالش‌برانگیز است، ولی سعی کرده‌ایم از سراسر است‌ترین روش مطالب را ارائه دهیم. با وجود این، بخش‌هایی از کتاب وجود دارد که خواننده آن‌ها را

1. Imperial College

2. City University

چالش برانگیز تر از سایر قسمت‌ها خواهد یافت. مسائل آخر هر فصل نیز شامل مسائل آسان و مشکل تر است. ارائه مطالب این کتاب تقریباً تماماً به کوانتش میدان الکترومغناطیسی و اثرات آن روی اتم‌ها و اینکه نور غیر کلاسیکی چگونه رفتار می‌کند، می‌پردازد. یکی از اهداف این کتاب این است که اپتیک کوانتومی را به مبحث اخیراً توسعه یافته اطلاعات کوانتومی مرتبط کند.

مطالب این کتاب شامل کوانتش میدان تک‌مدی در یک کاواک، کوانتش میدان‌های چندمدی، مبحث فاز کوانتومی، حالت‌های همدوس، توزیع‌های شبه‌احتمالی در فضای فاز، برهم کنش‌های اتم-میدان، مدل جینز-کامینگز^۱، نظریه همدوسی کوانتومی، تقسیم‌کننده‌های باریکه و تداخل سنج‌ها، حالت‌های میدان غیر کلاسیکی با فشردگی، تست واقع‌بینانه موضعی با فوتون‌های درهم‌تنیده حاصل از تبدیل فروافتی^۲، تحقق آزمایشگاهی کاواک الکترودینامیک کوانتومی، یون‌های به‌دام‌افتاده و غیره، مباحثی دربارهٔ واهمدوسی و چند کاربرد در فرایند اطلاعات کوانتومی، به‌خصوص رمزنگاری کوانتومی است. این کتاب شامل مسائل متعددی برای هر فصل است و در انتهای هر فصل مراجع برای مطالعات بیشتر معرفی شده است. بسیاری از مسائل نیازمند انجام کارهای محاسباتی است و بعضی‌ها به محاسبات بیشتری نیاز دارند.

۱-۲ تاریخچه

در این فصل به‌اختصار توسعه تاریخی ایده‌های مربوط به اپتیک و فوتون را شرح می‌دهیم. مطالب مفصل‌تر را می‌توان در کتاب *مقدمه تاریخی چاپ ششم تألیف بورن*^۳ و *ولف*^۴ یافت. بهترین مرجع دربارهٔ توسعه ایده‌های کوانتومی را می‌توان در کتابی که اخیراً توسط ویتاکر^۵ نوشته شده است، یافت [۱] مقاله‌ای اخیراً توسط موتوکریشنان^۶، اسکالی^۷ و زوبیری^۸ [۲] به‌خوبی توسعه تاریخی ایده‌های ما در رابطه با نور و فوتون را ارائه داده است.

در جهان باستان از قدیم طبیعت نور مورد مناقشه بوده است. تا قرن هفدهم، دو مفهوم موجی و ذره‌ای نور در رقابت با هم به‌خوبی تثبیت شده بودند. ماکسول در نیمه دوم قرن نوزدهم، با نشان دادن اینکه نور یک موج الکترومغناطیسی است، سنگ بنای نظریه میدان مدرن را گذاشت. با این پیشرفت به‌نظر می‌رسید فیزیک کلاسیک به پیروزی بزرگی دست یافته است، هر چند نگرانی‌های کوچکی در ارتباط با تابش جسم سیاه و اثر فوتوالکتریک وجود داشت. البته این مسائل بذره‌ای انقلاب کوانتومی را تشکیل دادند. پلانک که یک نظریه پرداز ذاتاً محافظه‌کار بود، تقریباً با اکراه برای اینکه طیف گرمایی اجسام را توضیح دهد، پیشنهاد کرد که تابش گرمایی به‌صورت کوانتاها^۱ گسسته جذب و گسیل می‌شود، ولی اینشتین بود که این ایده را تعمیم داد؛ به این صورت که این کوانتاها معرف خود نور هستند و نه فرایند جذب و گسیل تابش. همچنین، وی توانست نشان دهد که چگونه ماده و تابش می‌توانند به تعادل برسند (و در خلال همین کار ایده گسیل القایی را نیز معرفی

1. Jaynes- Cummings
2. Down- conversion
3. Born

4. Wolf
5. Whitaker
6. Muthukrishnan

7. Scully
8. Zubairy

کرد) و اینکه چگونه می‌توان اثر فوتوالکتریک را توصیف کرد. در ۱۹۱۳، بور ایده کوانتش را به دینامیک اتمی اعمال کرد و توانست مکان خطوط طیفی اتمی را پیش‌بینی کند. ژیلبرت لوئیس^۱ که یک شیمی‌دان بود، بعد از آنکه ایده کوانتای نور معرفی شد، نام فوتون را برای آن ابداع کرد. وی در ۱۹۲۶ نوشت:

مناسب است که در ارتباط با یکی از این موجودات فرضی به‌عنوان ذره نور، کوانتوم نور یا کوانتای نور صحبت کنیم. اگر بخواهیم فرض کنیم که این موجود تنها کسر کوچکی از وجودش به‌عنوان حامل انرژی تابشی به‌سر می‌برد، درحالی‌که بقیه عمرش را به‌عنوان یک عنصر ساختاری مهم در داخل اتم سپری می‌کند..... از این‌رو، به خود اجازه می‌دهم که به این اتم فرضی جدید که نور نیست، ولی نقش مهمی در تمام فرایندهای تابش ایفا می‌کند، نام فوتون را پیشنهاد کنم.

بدیهی است که نظر لوئیس و نظر ما (درمورد فوتون) فاصله زیادی دارند! دوبروی در یک اقدام تحلیلی برجسته آنچه را درمورد کوانتای نور می‌دانیم، تعمیم داد که بنابر آن ماده، خود دارای خواص موجی و ذره‌ای است. در یک بازه زمانی بسیار کوتاه هاینبرگ، شرودینگر و دیراک سنگ بنای مکانیک کوانتومی را پایه‌ریزی کردند. آن‌ها آنچه را امروزه نیز به کار می‌بریم، فراهم آوردند: نمایش‌ها، تحول حالت کوانتومی، تبدیلات یکانی، نظریه اختلال و... ماکس بورن ماهیت احتمالاتی ذاتی مکانیک کوانتومی را مطرح ساخت و ایده دامنه‌های احتمال را پیشنهاد کرد که امکان بررسی کوانتومی تداخل را فراهم می‌ساخت.

فرمی و دیراک، از پیش‌قراولان مکانیک کوانتومی، در میان اولین کسانی بودند که به چگونگی برهم‌کنش و انتشار نور کوانتیده با ساختار اتمی پرداختند. مقاله فرمی که براساس سخنرانی‌های وی که در دهه ۱۹۳۰ در «آن‌آرپور»^۲ ارائه داده بود در مجله مرور فیزیک مدرن^۳ منتشر شد، آنچه را در آن زمان در قالب الکتروپنایمیک کوانتومی غیرنسبیتی در پیمانه کولن شناخته شده بود، خلاصه کرد. بررسی وی از تداخل (به‌خصوص فزایندهای لیپمن^۴) هنوز باارزش است. مناسب است آنچه را ویلی کم^۵ در این باره گفته است، نقل کنیم:

ابتدا با این تصمیم که چه مقدار از جهان لازم است که وارد بحثان شود، آغاز کنید. سپس ببینید چند مد نرمال برای یک بررسی مناسب مورد نیاز است. پس‌از آن، ببینید چگونه چشمه‌های نور را مدل‌سازی کنیم و ببینید چگونه این مدل‌ها، سیستم را متحول می‌کنند [۴]

این گفته، آنچه را در این کتاب به آن خواهیم پرداخت، خلاصه می‌کند. وایسکوف^۶ و ویگنر^۷ ایده‌های به‌تازگی توسعه‌یافته مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی را به دینامیک گسیل خودبه‌خودی و فلورسانس تشدیدی اعمال و قانون نمایی برای واپاشی حالت برانگیخته را پیش‌بینی کردند. این کار مشکلات خودانرژی را مطرح کرد که تا بیست سال بعد، تا زمان توسعه بازهنجارش توسط شوئینگر^۸

1. Gilbert Lewis
2. Ann Arbor
3. Review of Modern Physics

4. Lipmann
5. Willis Lamb
6. Weisskopf

7. Wigner
8. Schwinger

فاینمن^۱، توموناگا^۲ و دایسون^۳، الکترودینامیک کوانتومی را با مشکل مواجه ساخت. مشاهده گشتاور مغناطیسی غیرعادی الکترون توسط کوش^۴ و انتقال ترازهای تابشی اتم‌ها توسط کم و راترفورد^۵ نکات درخشان این عصر است. خواننده علاقه‌مند تاریخچه این دوره را می‌تواند در نوشته جالب شوئر^۶ درباره الکترودینامیک کوانتومی (QED) بیابد [5]. این دوره از تحقیقات اهمیت خلاقانه به عنوان یک میدان که دارای پیامدهای قابل مشاهده است را نشان می‌دهد. در یک تحول برجسته در اواخر دهه ۱۹۴۰ با این مشاهده که کلونیدها براساس برهم‌کنش‌های واندروالس^۷ از آنچه انتظار می‌رفت پایدارترند، کاسیمیر^۸ نشان داد که نیروهای بین مولکولی بلندبرد ذاتاً از سنخ الکترودینامیک کوانتومی هستند. وی این نیروها را به ایده حرکت نقطه صفر میدان مرتبط کرد و نشان داد که صفحات فلزی در خلأ، در نتیجه این حرکت نقطه صفر، یکدیگر را جذب می‌کنند.

اینشتین با ادامه مطالعات خود درباره ماهیت مکانیک کوانتومی در ۱۹۳۵ در مقاله مشهورش همراه با پادولسکی^۹ و رزن^{۱۰} توانستند هم‌بستگی‌های خاص کوانتومی را نشان دهند. ایده‌های این مقاله همراه با آنچه توسط بوهم^{۱۱} و بل^{۱۲} درباره پیش‌بینی‌های مشخص این هم‌بستگی‌ها انجام گرفت، به پایه‌گذاری یکی از فعال‌ترین بخش‌های فیزیک مدرن منجر شد؛ این ایده‌ها مبنای آن چیزی شدند که مبحث جدید فرایند اطلاعات کوانتومی نامیده می‌شود.

همدوسی اپتیکی برای سالیان طولانی با استفاده از دامنه تداخل بررسی شده است: یک هم‌بستگی مرتبه اول. هانبری براون و توپس در دهه ۱۹۵۰ به بررسی هم‌بستگی‌های شدتی به عنوان ابزاری در تداخل‌سنجی بین ستاره‌ای پرداختند و نشان دادند که چگونه رویدادهای آشکارسازی فوتون‌های گرمایی به صورت خوشه‌ای است. این امر به تحول نظریه آمار فوتونی و شمارش فوتون و آغاز اپتیک کوانتومی به عنوان یک موضوع جداگانه منجر شد. در همان زمان که ایده‌های آمار فوتونی توسعه می‌یافت، محققان به بررسی همدوسی در برهم‌کنش‌های نور-ماده پرداختند. اسپکتروسکپی فرکانس رادیویی با کار رابی و رمزی و سایرین با باریکه اتم شروع شده بود. کاوشگرهای پمپاژ نوری حساس به برهم‌کنش نور با اتم‌ها در دهه ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ توسط کستلر^{۱۳}، براسل^{۱۴}، سریز^{۱۵}، داد^{۱۶} و سایرین توسعه یافت.

تا اوایل دهه ۱۹۵۰ تاونز^{۱۷} و همکاران و باسوف^{۱۸} و پروخوروف^{۱۹} چشمه‌های مولکولی میکروویو تابش را توسعه دادند: میزهای جدید که براساس فراهم آوردن حالت‌های دقیق اولیه، وارونی جمعیت و گسیل القایی بنا شده بود. اد جینز در دهه ۱۹۵۰ نقش بسیار مهمی در مطالعاتی که نشان دادند کوانتش نقش مهمی در عملیات میزریفا می‌کند، داشت (این کار موجب شروع کارهای بعدی درباره کوانتایی شدن کامل پیوند اتم-میدان شد که به عنوان مدل جینز-کامینگز شناخته می‌شود). البته، تعمیم ایده‌های میز به قلمرو اپتیکی و توسعه لیزرها

1. Feynman
2. Tomonaga
3. Dyson
4. Kusch
5. Rutherford
6. Schweber
7. van der Waals

8. Casimir
9. Padolsky
10. Rosen
11. Bohm
12. Bell
13. Kastler
14. Brossel

15. Series
16. Dodd
17. Townes
18. Basov
19. Prokhorov

موجب انقلابی در فیزیک مدرن و تکنولوژی شد.

گلوپر، ولف، سودارشان، مندل و کلودر و بسیاری دیگر نظریه کوانتومی همدوسی را که بر حالت‌های همدوس و آشکارسازی فوتونی بنا شده بود، توسعه دادند. حالت‌های همدوس این امکان را فراهم کردند تا با استفاده از شبه‌احتمالاتی که قبلاً توسط ویگنر و دیگران توسعه یافته بود، رفتار نور را در فضای فاز توصیف کنیم.

برای سال‌ها پس از توسعه لیزر هیچ چشمه کوک‌پذیر وجود نداشت. محققانی که به جزئیات برهم‌کنش‌های اتم-نور یا مولکول-نور علاقه‌مند بودند، مجبور بودند به تشدیدهای اتفاقی مولکولی تکیه کنند. درعین حال، این تحولات باعث آغاز مطالعه برهم‌کنش‌های همدوس و گذارهای همدوس نظیر پژواک‌های فوتون، شفافیت خودالقائیده و رقص محوری اپتیکی و مانند آن شد (این مباحث در مونوگرافی توسط آلن^۱ و ابرلی^۲ تشریح شده است). لیزرهای کوک‌پذیر در اوایل ۱۹۷۰ قابل دسترسی شد و لیزر رزینه‌ای، به‌خصوص بررسی‌های دقیق در اپتیک کوانتومی و اسپکتروسکوپی لیزری را فراهم کرد. مطالعه برهم‌کنش‌های تشدید، گذارهای همدوسی و مانند آن سرراست‌تر شد و باعث آغاز اپتیک کوانتومی، به‌شکل آنچه امروزه داریم، گردید: برای اولین بار توانستیم به دینامیک تک‌اتم‌هایی که با نور برهم‌کنش دارند، به‌طور غیراختلالی پردازیم. استرود^۳ و همکارانش مطالعه فلورسانس تشدید را با مشاهده شکافتگی خطوط طیفی فلورسانس تشدید به مؤلفه‌های همدوسی‌ای که قبلاً توسط مولو^۴، مندل^۵، کیمبل^۶ و دیگران پیش‌بینی شده بود و نشان می‌داد چگونه فلورسانس تشدید نور، پادگروهی شده بود (ویژگی‌ای که توسط نظریه پردازان زیادی از جمله والز^۷، کارمیشل^۸، کوهن-تانوجی^۹، مندل و کیمبل مورد مطالعه قرار گرفته بود)، آغاز شد. مشاهده پادگروهی و آمار فوتونی زیرپواسونی وابسته (و غیرهم‌ارز) با آن، بنای مطالعات «نور غیر کلاسیکی» را فراهم آورد. در خلال دهه ۱۹۷۰ چندین آزمایش کشف ماهیت فوتون‌ها فراهم شد: تجزیه‌ناپذیری آن‌ها و تداخل در حد تک‌فوتون. سرد کردن لیزری به‌سرعت در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ توسعه یافت و امکان ایجاد حالت‌های اتمی تحت کنترل دقیق را فراهم کرد. درحقیقت، این بحث خود یک مبحث اصلی است و تصمیم گرفته‌ایم که وارد این مبحث سرد کردن لیزری در این کتاب نشویم.

در ادامه توسعه پالس‌های نوری با شدت بالا از لیزر، پدیده‌های اپتیک غیرخطی با شروع از کارهای پیشگامانه توسط فرانکلین و همکارانش در آن آرپور بررسی شدند. تولید هماهنگ، تبدیل فروافتی پارامتری و دیگر پدیده‌ها نیز مورد بررسی قرار گرفتند. برای توصیف بخش اعظمی از این کارهای اولیه روی اپتیک غیرخطی، به کوانتش میدان و اپتیک کوانتومی نیازی نیست. اما نشانه‌هایی پدید آمد که خلاف این را نشان می‌داد: اپتیک غیرخطی کوانتومی- با مطالعات بورنهایم^{۱۰} و واینبرگ (فصل ۹ را ببینید) درباره هم‌بستگی‌های

1. Allen
2. Eberly
3. Stroud
4. Mollow

5. Mandel
6. Kimble
7. Walls
8. Carmichael

9. Cohen-Tannoudji
10. Burnham

غیر کلاسیکی نامتعارف در تبدیل فروافتی شروع شد. این هم‌بستگی‌ها برای مندل و بسیاری دیگر ابزاری برای کشف دیدگاه‌های بنیادی در اپتیک کوانتومی گردید.

تا دهه ۱۹۸۰ اساساً همه بررسی‌های میدان‌های نور دارای نوفه‌های مستقل از فاز بودند؛ با تولید چشمه‌های نور فشرده با نوفه‌های حساس در مقابل فاز، این امر تغییر کرد. این چشمه‌های نور فشرده ما را قادر ساختند تا روابط عدم قطعیت هایزنبرگ را برای میدان‌های نور بررسی کنیم. بار دیگر ثابت شد که تبدیل فروافتی پارامتری مؤثرترین ابزار برای تولید این چنین میدان‌های نوری غیرمعمول است.

دانشمندان اپتیک کوانتومی خیلی زود دریافته‌اند که اگر اتم‌ها در تشدیدکننده‌ها محبوس باشند، دینامیک گذارهای تابشی می‌تواند تغییرات اساسی پیدا کنند. پارسل^۱ در یک مقاله برجسته در ۱۹۴۶ در زمینه تشدید مغناطیسی پیش‌بینی کرده بود که آهنگ گسیل خودبه‌خودی که قبلاً تصور می‌شد تغییرناپذیر است، با قرار دادن چشمه اتمی در داخل یک کاواک که ساختار مدی و چگالی‌های آن به‌طور قابل ملاحظه‌ای با فضای آزاد متفاوت است، تغییر می‌کند. قرار دادن اتم‌ها در داخل تشدیدکننده‌ها یا نزدیک به آن‌ها در اواخر دهه ۱۹۶۰ ممکن شد. در اواخر دهه ۱۹۸۰ رؤیای مطالعه اتم‌های منفرد که با تک‌مدهای میدان الکترومغناطیسی برهم‌کنش کنند، تحقق یافت. در اینجا وقتی اتم به‌طور همدوس با میدان مبادله برانگیختگی کند، دینامیک گذار کلاً برگشت‌پذیر می‌شود تا وقتی همدوسی از طریق یک فرایند اتلافی «واهمدوسی» از بین برود. این رؤیا به‌نام پیشنهاددهندگانش مدل جیتز-کامینگر نامیده می‌شود و سنگ بنای اپتیک کوانتومی را تشکیل می‌دهد (و به تفصیل در این کتاب درباره آن بحث خواهد شد).

مفاهیم بنیادی جدید در پردازش اطلاعات که به رمزنگاری کوانتومی و محاسبات کوانتومی منجر می‌شوند، در سال‌های اخیر توسط فاینمن، بنیوف^۲، دویچ^۳، جوزا^۴، بنت^۵، اکرت^۶ و دیگران توسعه یافتند. به‌جای استفاده از بیت‌های کلاسیک که می‌توانند معادل ۰ یا ۱ باشند، واحد بنیادی یک کامپیوتر کوانتومی، یک سیستم دوترازی کوانتومی (کیوبیت) است که می‌تواند در برهم‌نهی‌های همدوس مقادیر منطقی ۰ و ۱ وجود داشته باشد. در این صورت، یک مجموعه از n کیوبیت را می‌توان با یک برهم‌نهی تا 2^n حالت مختلف که هر کدام معرف یک عدد دوتایی است، نوشت. اگر بتوانیم ۱۵۰۰ کیوبیت را تحت کنترل داشته باشیم و مورد استفاده قرار دهیم، می‌توانیم به حالت‌های تعداد بیش از ذرات جهان قابل‌رؤیت دسترسی داشته باشیم. محاسبات با تبدیلات یکانی انجام می‌شوند که به‌طور هم‌زمان روی تمام حالت‌های برهم‌نهی عمل می‌کنند. گیت‌های کوانتومی واحدهای بنیادی را تشکیل می‌دهند که این تبدیلات یکانی از آن‌ها ساخته شده‌اند. ازجمله پیشرفت‌ها در این ارتباط می‌توان رمزنگاری مطلقاً ایمن را نام برد که می‌تواند با استفاده از منابع کوانتومی نور تضمین شود.

استفاده از برهم‌نهی‌های کوانتومی و درهم‌تنیدگی به توازی کوانتومی بسیار بالا منجر می‌شود که می‌تواند سرعت محاسبات را به‌طور نمایی افزایش دهد. تعدادی از مسائل که نمی‌توان آن‌ها را به‌سادگی با یک کامپیوتر

1. Purcell
2. Benioff
3. Duetsch

4. Jozsa
5. Bennett
6. Ekert

کلاسیکی حل کرد، با یک کامپیوتر کوانتومی به طور مؤثری حل می شود. در ۱۹۹۴ یک الگوریتم کوانتومی توسط پیترشور^۱ ابداع شد که امکان حل یک مسئله عملاً مهم، یعنی تجزیه را با سرعتی که به طور نمایی افزایش می یافت، فراهم می کرد. به دنبال آن، تحقق آزمایشگاهی ممکن یک کامپیوتر کوانتومی، به عنوان مثال در الگوهای یون های خطی در تله افتاده و در تشدید مغناطیسی هسته ای پیشنهاد شد. در حال حاضر، در مرحله ای قرار داریم که گیت های کوانتومی در این دو روش اجرا تحقق یافته اند. محاسبات کوانتومی ارتباط نزدیکی با رمزنگاری کوانتومی و ارتباطات کوانتومی دارند. آزمایش های پایه ای که در اصل امکان این ایده ها را نشان می دهد، در چندین آزمایشگاه انجام شده است.

یون خطی در تله افتاده یکی از نویدبخش ترین سیستم ها برای محاسبات کوانتومی است و ما آن را در این کتاب مورد بحث قرار خواهیم داد. فراهم کردن حالت کوانتومی (سردکنندگی لیزری و پمپ کردن اپتیکی) در این سیستم و اندازه گیری حالت توسط شیب دهی الکترونی و فلورسانس یک تکنیک تثبیت شده است. یون های باردار منفرد یک اتم نظیر کلسیم یا برلیوم را در تله می اندازیم و با لیزر تا دماهای میکروکلوین سرد می کنیم تا یک رشته تشکیل بدهند که در امتداد محور یک فرکانس رادیویی خطی (r.f.) تله پاول^۲ قرار بگیرند. حالت داخلی هر یون می تواند با حالت کوانتومی کل رشته مبادله شود. این عمل را می توان با تاباندن یک پالس تابش لیزر به یون - که در فرکانسی پایین تر از فرکانس تشدید داخلی یون، القاشده از مدهای نوسان رشته، تنظیم شده است - انجام داد. این عمل تک فونون ها را به مد ارتعاشی پیوند می دهد. در این صورت، با تاباندن لیزر به یون دوم و اعمال یک پالس لیزر مشابه، حالت حرکتی یون قبلی می تواند به حالت حرکتی یون دیگر پیوند داده شود. به این طریق، تبدیلات کلی حالت کوانتومی مربوط به تمام یون ها را می توان تولید کرد. یون در تله افتاده دارای جنبه های متعددی است که آن را نویدبخش می کند. به کمک این یون می توان به انجام فرایند روی بیت های کوانتومی دست یافت، بدون آنکه به تکنیک های جدید، نظیر روش های ریزساخت یا روش های سردکنندگی جدید متوسل شد. حالت هر یون را می توان اندازه گیری و چندین بار بدون هیچ گونه مشکلی بازیابی کرد که یکی از جنبه های مهم در اجرای پروتکل های تصحیح خطای کوانتومی است.

اتم ها یا یون های در تله افتاده می توانند به طور قوی با یک مد میدان الکترومغناطیسی در یک کاواک پیوند کنند که امکان ترکیب فرایندهای کوانتومی قدرتمند و ارتباطات کوانتومی از راه دور را فراهم می کنند. این رهیافت، روش های ساخت حافظه های کوانتومی را نشان می دهد. در اصل، این سیستم ها می توانند یک پردازشگر کوانتومی را محقق سازند که بزرگ تر از هر پردازشگری است که بتواند با محاسبات کلاسیکی شبیه سازی شود، اما واهمدوسی ای که با وافازی و گسیل خود به خودی تولید می شود، یک مانع بزرگ در این راه است.

حالت های درهم تنیده جزء کلیدی برای صورت های معینی از رمزنگاری کوانتومی و دوربری کوانتومی هستند. درهم تنیدگی همچنین عامل قدرت محاسبات کوانتومی است که تحت شرایط ایدئال می تواند بعضی اهداف معین را به طور نمایی سریع تر از هر کامپیوتر کلاسیکی انجام دهد. نقش عمیق تر درهم تنیدگی کوانتومی

1. Peter shor

2. Paul trap

در نظریه اطلاعات کوانتومی، امکان بهبود کاربردهای موجود و توسعه روش‌های جدید در اطلاعات کوانتومی را فراهم می‌کند. همه این‌ها در فصل‌های آخر این کتاب تشریح شده‌اند.

با این همه، آینده اپتیک کوانتومی چگونه است؟ اپتیک کوانتومی باعث تعمیق و پیشرفت علم لیزر و فیزیک اتمی می‌شود. حتی می‌تواند ابزاری باشد که به کمک آن یک فناوری کاملاً جدید محقق شود که امکان پردازش و انتقال اطلاعات به روش‌های بدیع و بی‌سابقه را فراهم کند. اما البته هرچه امروزه پیش‌بینی کنیم، ممکن است با اتفاقات غیرمنتظره مواجه شویم: این حوزه به‌صورت ماجراجویی باقی می‌ماند که با پیشامدهای غیرمنتظره مواجه می‌شود.

۳-۱ محتوای این کتاب

چهارچوب این کتاب به شرح زیر است: در فصل ۲ نشان می‌دهیم چگونه میدان الکترومغناطیسی را می‌توان برحسب نوسانگرهای هماهنگ که معرف مدهای میدان الکترومغناطیسی هستند و حالت‌ها که نشان‌دهنده این است که در هر مد نرمال چند برانگیختگی (فوتون) وجود دارد، کوانتایی کرد. در فصل ۳ حالت‌های هم‌دوس و حالت‌های برهم‌نهی را که حاوی اطلاعات فاز هستند، معرفی می‌کنیم. در فصل ۴ برهم‌کنش نور و ماده را توصیف می‌کنیم. در فصل ۵ مفهوم هم‌دوسی برحسب توابع هم‌بسته میدان اپتیکی را کمی می‌کنیم. در فصل ۶ به معرفی عناصر اپتیکی ساده نظیر تقسیم‌کننده‌های باریکه و تداخل‌سنج‌ها که روی حالت‌های نور تأثیر می‌گذارند، می‌پردازیم. در فصل ۷ آن دسته از حالت‌های غیرکلاسیکی را شرح می‌دهیم که خواص بنیادی آن‌ها توسط ماهیت اساسی کوانتومی آن‌ها تعیین می‌شود. گسیل خودبه‌خودی و واپاشی در یک محیط باز در فصل ۸ مورد بحث قرار می‌گیرد. فصل ۹ شرح می‌دهد چگونه منابع اپتیک کوانتومی تابش را می‌توان برای آزمون مبانی مکانیک کوانتومی شامل تست غیرموضعی و نامساوی‌های بل مورد استفاده قرار داد. فصل ۱۰ شرح می‌دهد که چگونه اتم‌های محبوس در کاواک‌ها و تله‌های سردشده لیزر را می‌توان برای مطالعه پدیده‌های برهم‌کنش بنیادی مورد استفاده قرار داد. در فصل ۱۱ آنچه را آموخته‌ایم، به مسئله جدید پردازش اطلاعات کوانتومی اعمال می‌کنیم. مجموعه پیوست‌ها برخی از مطالب ریاضی را که در متن اصلی کتاب مورد نیازند، ارائه می‌دهند. در طول این کتاب سعی کرده‌ایم ایده‌هایی را که مطرح کرده‌ایم، از طریق مسائل آخر هر فصل روشن‌تر کنیم.

مراجع

- [1] Whitaker, A. (1996). *Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma* (Cambridge: Cambridge University Press).
- [2] Muthukrishnan, A., Scully, M. O and Zubairy, M. S. (2003). *Optics and Photonics News Trends*, 3, No. 1 (October).
- [3] Lewis, G. N. (1926). *Nature*, 118, 874.
- [4] Lamb W. E., Jr. (1995). *Appl. Phys. B*, 66, 77.
- [5] Schweber, S. S. (1994). *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga* (Princeton University Press, Princeton).

پیشنهادها برای مطالعه بیشتر

مونوگراف‌های تخصصی زیادی در حوزه اپتیک کوانتومی نوشته شده‌اند که مطالب پیشرفته‌تری از کتاب حاضر ارائه داده‌اند. چند مونوگراف در این زمینه عبارت‌اند از:

- Allen L. and Eberly J. H., *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (New York: Wiley, 1975 and Mineola: Dover, 1987).
- Bachor H., *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Berlin & Weinheim: Wiley-VCH, 1998).
- Barnett S. M. and Radmore P. M., *Methods in Theoretical Quantum Optics* (Oxford: Oxford University Press, 1997).
- Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J. and Grynberg G., *Photons and Atoms* (New York: Wiley-Interscience, 1989).
- Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J. and Grynberg G., *Atom-Photon Interactions* (New York: Wiley-Interscience, 1992).
- Dodonov V. V. and Man'ko V. I. (editors), *Theory of Nonclassical States of Light* (London: Taylor and Francis, 2003).
- Ghosh P., *Testing Quantum Mechanics on New Ground* (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).
- Haken H., *Light, Volume I: Waves, Photons, and Atoms* (Amsterdam: North Holland, 1981).
- Klauder J. R. and Sudarshan E. C. G., *Fundamentals of Quantum Optics* (New York: W. A. Benjamin, 1968).
- Leonhardt U., *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).
- Louisell W. H., *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley, 1973).
- Loudon R., *The Quantum Theory of Light*, 3rd edition (Oxford: Oxford University Press, 2000).
- Mandel L. and Wolf E., *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).
- Meystre P. and Sargent M. III, *Elements of Quantum Optics*, 2nd edition (Berlin: Springer-Verlag, 1991).
- Milburn G. J. and D. F. Walls D. F., *Quantum Optics* (Berlin: Springer-Verlag, 1994).
- Nussenzveig H. M., *Introduction to Quantum Optics* (London: Gordon and Breach, 1973).
- Orszag M., *Quantum Optics: Including Noise, Trapped Ions, Quantum Trajectories, and Decoherence* (Berlin: Springer, 2000).
- Peřrina J., *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena*, 2nd edition (Dordrecht: Kluwer, 1991).
- Peřrinov'a V., Luk's A., and Peřrina J., *Phase in Optics* (Singapore: World Scientific, 1998).
- Puri R. R., *Mathematical Methods of Quantum Optics* (Berlin: Springer, 2001).
- Sargent M., III, Scully and W. E. Lamb, Jr., *Laser Physics* (Reading: Addison-Wesley, 1974).
- Scully M. O. and Zubairy M. S., *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).

- Schleich W. P., *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley-VCH, 2001).
- Shore B. W., *The Theory of Coherent Atomic Excitation* (New York: Wiley-Interscience, 1990).
- Vogel W. and Welsch D.-G., *Lectures in Quantum Optics* (Berlin: Akademie Verlag, 1994).
- Weissbluth M., *Photon-Atom Interactions* (New York: Academic Press, 1989).
- Yamamoto Y. and Imamoglu A., *Mesoscopic Quantum Optics* (New York: Wiley-Interscience, 1999).

یک مجموعه مقالات دربارهٔ حالت‌های هم‌دوس که شامل کارهای اولیهٔ گلویر، کلودر و دیگران است عبارت است از

- J. R. Klauder and B.-S. Skagerstam (editors), *Coherent States* (Singapore: World Scientific, 1985).
- تاریخچهٔ اپتیک کوانتومی و تست‌های بنیادی نظریهٔ کوانتومی را می‌توانید در جاهای مختلف بیابید. ما مراجع زیر را ارزشمند یافتیم:

- Baeierlin R., *Newton to Einstein* (Cambridge: Cambridge University Press, 1992).
- Born M. and Wolf E., *Principles of Optics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1998).
- Whitaker, *Einstein, Bohr and the Quantum Dilemma* (Cambridge: Cambridge University Press, 1996).

کوانتش میدان

در این فصل به کوانتش میدان الکترومغناطیسی می‌پردازیم و بعضی از خواص آن را با تأکید بر ویژگی‌هایی که به تعبیر فوتون، به عنوان برانگیختگی یک مد نرمال در نظر گرفته می‌شود، مورد بحث قرار می‌دهیم. ابتدا به مورد یک میدان تک‌مدی که محبوس در یک کاواک یک‌بعدی با دیوارهای رساناست، می‌پردازیم و سپس آن را به میدان‌های چندمدی در فضای آزاد تعمیم می‌دهیم. حالت‌های عددی فوتون را معرفی می‌کنیم و افت‌وخیزهای مشاهده‌پذیرهای میدان نسبت به این حالت‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم. در انتها مسئله توصیف کوانتومی فاز و کوانتش میدان الکترومغناطیسی را مطرح می‌کنیم.

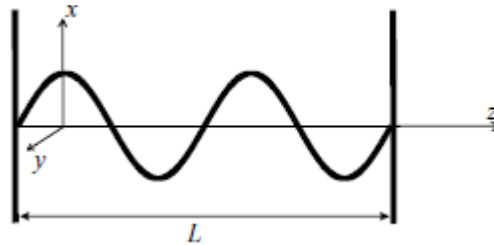
۱-۲ کوانتش یک میدان تک‌مدی

ابتدا با یک مورد ساده، ولی مهم میدان تابشی در یک کاواک یک‌بعدی در امتداد محور z با دیوارهای کاملاً رسانا که بین $z = 0$ و $z = L$ قرار دارد، شروع می‌کنیم (شکل ۱-۲).

میدان الکتریکی باید روی دیوارها صفر شود و به شکل یک موج ساکن درآید. فرض می‌کنیم هیچ چشمه تابشی، یعنی جریان یا بار و نه هیچ ماده عایقی در این کاواک وجود نداشته باشد. فرض می‌کنیم میدان در امتداد محور x قطبیده باشد، $E(r, t) = e_x E_x(z, t)$ که در آن e_x بردار یک قطبش است. در غیاب چشمه، معادلات ماکسول در دستگاه واحدهای SI به صورت زیر است:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2-2)$$



شکل ۱-۲ کاواک با دیواره‌های رسانای کامل واقع در $z = 0$ و $z = L$ میدان الکتریکی در راستای x قطبیده است.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (۳-۲)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (۴-۲)$$

یک میدان تک‌مدی که با شرایط مرزی بالا در معادلات ماکسول صدق می‌کند، به صورت زیر است:

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz) \quad (۵-۲)$$

که در آن ω فرکانس مد و k عدد موجی است که توسط رابطه $k = \omega/c$ به فرکانس بستگی دارد. از شرط مرزی در $z = L$ فرکانس‌های مجاز را به صورت $\omega_m = c(m\pi/L)$ ، $m = 1, 2, 3, \dots$ به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم ω در معادله ۵-۲ یکی از این فرکانس‌ها باشد و فعلاً از سایر فرکانس‌ها صرف نظر می‌کنیم. V در معادله ۵-۲ حجم مؤثر کاواک و $q(t)$ یک عامل وابسته به زمان است که بُعد طول دارد. همان‌طور که خواهیم دید، $q(t)$ نقش مکان کانونیک را ایفا می‌کند. میدان مغناطیسی در کاواک از معادلات ۵-۲ و ۲-۲ برابر است با

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(kz). \quad (۶-۲)$$

در اینجا $\dot{q}(t)$ نقش تکانه کانونیک را برای یک ذره به جرم واحد دارد، یعنی $p(t) = \dot{q}(t)$. انرژی میدان کلاسیکی یا هامیلتونی H یک میدان تک‌مدی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int dV \left[\epsilon_0 E_x^2(z, t) + \frac{1}{\mu_0} B_y^2(z, t) \right]. \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

از معادلات ۵-۲ و ۶-۲ به سادگی می‌توان نشان داد (به عنوان تمرین برعهده خواننده گذاشته می‌شود):

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2), \quad (۸-۲)$$

و از آن به روشنی مشاهده می‌شود که یک میدان تک‌مدی معادل یک نوسانگر هماهنگ به جرم واحد است که در آن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی، به‌جز در عامل‌های مقیاس، نقش مکان و تکانه کانونیک را ایفا می‌کنند. تمام کتاب‌های درسی مکانیک کوانتومی مقدماتی، کوانتشن نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی را مورد بحث قرار می‌دهند. در اینجا از این روش استفاده می‌کنیم که با در نظر گرفتن متغیرهای کانونیک q و p برای یک سیستم کلاسیکی، کافی است آن‌ها را با استفاده از قاعده انطباق^۱ با عملگرهای $\hat{q}$ و $\hat{p}$ جایگزین کنیم. این عملگرها باید در روابط جابه‌جایی کانونیک زیر صدق کنند:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \hbar \hat{I}. \quad (۹-۲)$$

از این به بعد، از روش متداول استفاده و عملگر همانی $\hat{I}$ را حذف می‌کنیم و می‌نویسیم $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. در این صورت، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تک‌مدی به ترتیب به عملگرهای زیر تبدیل می‌شوند:

$$\hat{E}_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{q}(t) \sin(kz), \quad (۱۰-۲)$$

و

$$\hat{B}_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{p}(t) \cos(kz), \quad (۱۱-۲)$$

و هامیلتونی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2). \quad (۱۲-۲)$$

عملگرهای $\hat{q}$ و $\hat{p}$ هرمیتی و متناظر با کمیت‌های مشاهده‌پذیرند. با وجود این، بهتر و مرسوم نیز هست، عملگرهای غیرهرمیتی (و بنابراین غیرمشاهده‌پذیر) نابودی ($\hat{a}$) و خلق ($\hat{a}^\dagger$) را از طریق روابط زیر معرفی کنیم:

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (۱۳-۲)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-1/2} (\omega\hat{q} - i\hat{p}). \quad (۱۴-۲)$$

در این صورت، عملگرهای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به ترتیب به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\hat{E}_x(z, t) = \epsilon_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz), \quad (۱۵-۲)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = B_0 \frac{1}{i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \cos(kz), \quad (۱۶-۲)$$

1. Correspondence rule

که در آن $\mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2}$ و $B_0 = (\mu_0/k)(\epsilon_0 \hbar\omega^3/V)^{1/2}$ به‌ترتیب میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی «بر فوتون» هستند. علامت گیومه همان‌طور که بعداً خواهیم دید، به‌معنای این است که این عبارت دقیقاً صحیح نیست و میانگین این میدان‌ها برای تعداد معین فوتون صفر است. باوجوداین، سنجه‌های مفیدی برای افت‌وخیزهای میدان کوانتومی‌اند. عملگرهای $(\hat{a})$ و $(\hat{a}^\dagger)$ در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (17-2)$$

و در نتیجه، عملگر هامیلتونی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (18-2)$$

تا اینجا هیچ چیز درباره وابستگی زمانی عملگرهای $(\hat{a})$ و $(\hat{a}^\dagger)$ نگفته‌ایم. برای یک عملگر دلخواه $\hat{O}$ که هیچ وابستگی صریح زمانی ندارد، معادله هاینبرگ به‌صورت زیر است:

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]. \quad (19-2)$$

این معادله برای عملگر نابودی $(\hat{a})$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \\ &= i\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &= i\omega [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} = -i\omega \hat{a}, \end{aligned} \quad (20-2)$$

که جواب آن عبارت است از

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t}. \quad (21-2)$$

با روش مشابه یا به‌سادگی با گرفتن مزدوج هرمیتی معادله ۲۱-۲ داریم:

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega t}. \quad (22-2)$$

روش دیگر برای به‌دست آوردن این جواب‌ها این است که جواب معادله ۱۹-۲ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\hat{O}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{O}(0) e^{-i\hat{H}t/\hbar} \quad (23-2)$$

و سپس با استفاده از لم بکر-هاسدورف^۱ به‌دست آوریم:

1. Baker-Hausdorf

$$\begin{aligned}\hat{O}(t) &= \hat{O}(0) + \frac{it}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}(0)] \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^2 [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{O}(0)]] + \dots \\ &+ \frac{1}{n!} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^n [\hat{H}, [\hat{H}, [\hat{H}, \dots [\hat{H}, \hat{O}(0)]]]] + \dots\end{aligned}\quad (24-2)$$

برای عملگر $(\hat{a})$ این نتیجه عبارت است از

$$\begin{aligned}\hat{a}(t) &= \hat{a}(0) \left[1 - i\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + i \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \dots \right] \\ &= \hat{a}(0) e^{-i\omega t}.\end{aligned}\quad (25-2)$$

استفاده از این روش حل ممکن است چنین به نظر برسد که از یک پتک برای شکستن یک فندق استفاده کنیم. اما وقتی به برهم کنش‌های غیر خطی می‌پردازیم، این روش بسیار مفید است.

عملگر $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ اهمیت خاصی دارد و عملگر تعداد^۱ نامیده و با $\hat{n}$ نشان داده می‌شود. ویژه‌حالت انرژی میدان تک‌مدی با ویژه‌مقدار E_n را با $|n\rangle$ نشان می‌دهیم، به‌طوری‌که

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (26-2)$$

اگر $\hat{a}^\dagger$ را از چپ در معادله ۲۶-۲ اعمال کنیم، یک معادله جدید به‌دست می‌آوریم:

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \hat{a}^\dagger \right) |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle. \quad (27-2)$$

با استفاده از رابطه جابه‌جایی ۱۷-۲ می‌توانیم بنویسیم:

$$\hbar\omega \left[(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^\dagger) + \frac{1}{2} \hat{a} \right] |n\rangle = E_n \hat{a}^\dagger |n\rangle, \quad (28-2)$$

یا

$$\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) (\hat{a}^\dagger |n\rangle) = (E_n + \hbar\omega) (\hat{a}^\dagger |n\rangle), \quad (29-2)$$

که مسئله ویژه‌مقداری برای ویژه‌حالت $(\hat{a}|n\rangle)$ با ویژه‌مقدار انرژی $E_n + \hbar\omega$ است. اکنون روشن می‌شود که چرا $\hat{a}^\dagger$ عملگر خلق نامیده می‌شود؛ زیرا یک «کوانتوم» انرژی $\hbar\omega$ را خلق می‌کند. می‌توان به‌طور نه‌چندان دقیق گفت که یک «فوتون» با انرژی $\hbar\omega$ توسط $\hat{a}^\dagger$ خلق شده است. به‌طور مشابه اگر عملگر $\hat{a}$ را از چپ در

1. Number operator

معادله ۲-۲۶ اعمال کنیم، با استفاده از رابطه جابه‌جایی به دست می‌آوریم:

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle) \quad (۳۰-۲)$$

که به روشنی پیداست عملگر $\hat{a}$ یک کوانتوم انرژی یا یک فوتون را از بین می‌برد یا نابود می‌کند؛ زیرا ویژه‌حالت $(\hat{a}|n\rangle)$ دارای ویژه‌مقدار $E_n - \hbar\omega$ است. واضح است که تکرار روش بالا به پایین آوردن ویژه‌مقدارهای انرژی با مضارب صحیحی از $\hbar\omega$ منجر می‌شود. اما انرژی نوسانگر هماهنگ باید همواره مثبت باشد تا پایین‌ترین ویژه‌مقدار انرژی، $E_0 > 0$ ، وجود داشته باشد. اگر ویژه‌حالت مربوط را $|0\rangle$ بنامیم، داریم:

$$\hat{H}(\hat{a}|0\rangle) = (E_0 - \hbar\omega)(\hat{a}|0\rangle) = 0 \quad (۳۱-۲)$$

زیرا

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (۳۲-۲)$$

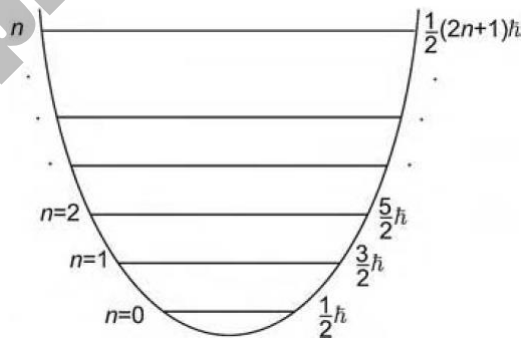
بنابراین مسئله ویژه‌مقداری برای حالت پایه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle \quad (۳۳-۲)$$

پایین‌ترین ویژه‌مقدار انرژی را که $\hbar\omega/2$ است، انرژی نقطه صفر^۱ می‌نامیم؛ چون $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega$ ، ویژه‌مقدارهای انرژی عبارت‌اند از

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۳۴-۲)$$

(این ترازهای انرژی نسبت به پتانسیل نوسانگر هماهنگ در شکل ۲-۲ رسم شده‌اند).



شکل ۲-۲ ترازهای انرژی یک نوسانگر هماهنگ با فرکانس ω

1. Zero point energy

بنابراین برای عملگر تعداد، $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ داریم:

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (۳۵-۲)$$

این حالت‌های تعداد باید بر طبق $\langle n|n\rangle = 1$ بهنجار شوند. برای حالت $\hat{a}|n\rangle$ داریم:

$$\hat{a} |n\rangle = c_n |n-1\rangle, \quad (۳۶-۲)$$

که در آن c_n مقدار ثابتی است که باید تعیین کنیم. ضرب داخلی $\langle n|\hat{a}|n\rangle$ در خودش می‌دهد:

$$\begin{aligned} \langle n|\hat{a}^\dagger\rangle (\hat{a} |n\rangle) &= \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n \\ &= \langle n-1| c_n^* c_n |n-1\rangle = |c_n|^2, \end{aligned} \quad (۳۷-۲)$$

و بنابراین $|c_n|^2 = n$. در نتیجه $c_n = \sqrt{n}$. بنابراین

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (۳۸-۲)$$

به‌طور مشابه، می‌توانیم نشان دهیم:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (۳۹-۲)$$

از این نتیجهٔ اخیر به‌سادگی می‌توان نشان داد حالت‌های تعداد $|n\rangle$ را می‌توان با اعمال متوالی عملگر خلق $\hat{a}^\dagger$ روی حالت پایهٔ $|0\rangle$ تولید کرد.

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (۴۰-۲)$$

چون $\hat{H}$ و $\hat{n}$ عملگرهای هرمیتی هستند، حالت‌های تعداد مختلف بر یکدیگر عمودند؛ یعنی $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$ و به‌علاوه حالت‌های تعداد، یک مجموعهٔ کامل را تشکیل می‌دهند؛ یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (۴۱-۲)$$

تنها عناصر ماتریسی غیر صفر عملگرهای خلق و نابودی عبارت‌اند از

$$\langle n-1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \langle n-1|n-1\rangle = \sqrt{n} \quad (۴۲-۲)$$

$$\langle n+1|\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n+1} \langle n+1|n+1\rangle = \sqrt{n+1}. \quad (۴۳-۲)$$

۲-۲ افت و خیزهای یک میدان تک‌مدی

حالت تعداد $|n\rangle$ یک حالت با انرژی معین است، ولی حالتی با میدان الکتریکی خوش تعریف نیست؛ زیرا

$$\langle n | \hat{E}_x(z, t) | n \rangle = \mathcal{E}_0 \sin(kz) [\langle n | \hat{a} | n \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger | n \rangle] = 0, \quad (44-2)$$

یعنی میدان میانگین صفر است. اما میانگین مجذور این میدان که در چگالی انرژی مشارکت دارد، غیر صفر است.

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{E}_x^2(z, t) | n \rangle &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle \\ &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \langle n | \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1 | n \rangle \\ &= 2\mathcal{E}_0^2 \sin^2(kz) \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (45-2)$$

افت‌وخیزهای میدان الکتریکی را می‌توان با واریانس

$$\langle (\Delta \hat{E}_x(z, t))^2 \rangle = \langle \hat{E}_x^2(z, t) \rangle - \langle \hat{E}_x(z, t) \rangle^2 \quad (46-2)$$

یا انحراف معیار $\Delta E_x = \langle (\Delta \hat{E}_x(z, t))^2 \rangle^{1/2}$ که گاهی عدم قطعیت میدان نامیده می‌شود، مشخص کرد. برای حالت تعداد $|n\rangle$ داریم:

$$\Delta E_x = \sqrt{2\mathcal{E}_0} \sin(kz) \left(n + \frac{1}{2} \right)^{1/2}. \quad (47-2)$$

توجه کنید حتی وقتی $n = 0$ باشد، میدان دارای افت‌وخیز است که به آن افت‌وخیزهای خلأ^۱ گفته می‌شود. حالت‌های تعداد $|n\rangle$ معرف یک حالت میدان هستند که n فوتون دارند. ولی همان‌طور که دیدیم، میانگین میدان برای آن برابر صفر است. این امر مطابق اصل عدم قطعیت است؛ زیرا عملگر تعداد $|n\rangle$ با عملگر میدان الکتریکی جابه‌جا نمی‌شود.

$$[\hat{n}, \hat{E}_x] = \mathcal{E}_0 \sin(kz) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (48-2)$$

بنابراین $\hat{n}$ و $\hat{E}_x$ کمیت‌های مکمل هستند که برای آن‌ها عدم قطعیت‌های مربوط در نامساوی زیر صدق می‌کنند (یادآور می‌شویم برای عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ که در $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$ صدق می‌کنند، داریم $|\langle \hat{C} \rangle| \geq \frac{1}{2} \Delta A \Delta B$).

$$\Delta n \Delta E_x \geq \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 |\sin(kz)| |\langle \hat{a}^\dagger - \hat{a} \rangle|. \quad (49-2)$$

برای یک حالت تعداد $|n\rangle$ طرف راست صفر می‌شود و درعین حال $\Delta n = 0$ است. اگر میدان به‌طور دقیق معلوم باشد، تعداد فوتون‌ها نامعین است. در اینجا ارتباطی با مفهوم فاز میدان الکتریکی وجود دارد. در فیزیک کلاسیک، دامنه و فاز یک میدان می‌توانند به‌طور هم‌زمان خوش تعریف باشند؛ این امر در مکانیک کوانتومی برقرار نیست. در واقع، تاریخچه مفهوم عملگر فاز کوانتومی طولانی و مورد مناقشه بوده است و ما بعداً به تفصیل به

1. Vacuum fluctuation

این موضوع خواهیم پرداخت؛ فعلاً به این بسنده می‌کنیم که فاز مکمل تعداد است، به همان صورتی که زمان مکمل انرژی است. مشابه با رابطه عدم قطعیت زمان-انرژی، باید یک رابطه عدم قطعیت تعداد-فاز به صورت زیر وجود داشته باشد:

$$\Delta n \Delta \phi \geq 1. \quad (50-2)$$

از این رابطه می‌توان چنین استنباط کرد که برای یک فاز خوش تعریف (دقیقاً معلوم)، تعداد فوتون نامعین است، درحالی‌که برای تعداد فوتون کاملاً معین، فاز کاملاً نامعین و درواقع به‌طور تصادفی در بازه $0 < \phi < 2\pi$ توزیع شده است. در بخش ۲-۷ مورد فاز کوانتومی را به تفصیل بررسی خواهیم کرد.

۲-۳ عملگرهای تربیع برای یک میدان تک‌مدی

وقتی به‌طور صریح وابستگی زمانی عملگر میدان الکتریکی را در نظر بگیریم، داریم:

$$\hat{E}_x = \mathcal{E}_0 (\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \sin(kz) \quad (51-2)$$

که در آن $\hat{a}(0) \equiv \hat{a}^\dagger(0)$ است. حال عملگرهای موسوم به تربیع را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (52-2)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (53-2)$$

که عملگر میدان برحسب آن‌ها به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{E}_x(t) = 2\mathcal{E}_0 \sin(kz) [\hat{X}_1 \cos(\omega t) + \hat{X}_2 \sin(\omega t)]. \quad (54-2)$$

بدیهی است که $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ متناظر به دامنه‌های میدان هستند و با یکدیگر اختلاف فاز 90° دارند (و ازاین‌رو، در تربیع قرار دارند). توجه کنید که $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ اساساً عملگرهای مکان و تکانه‌اند که از معادلات ۲-۱۳ و ۲-۱۴ به‌دست می‌آیند، ولی طوری مقیاس‌بندی شده‌اند که بدون بُعد باشند. این عملگرها در رابطه جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \frac{i}{2} \quad (55-2)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle \geq \frac{1}{16}. \quad (56-2)$$

برای حالت‌های تعداد $\langle n|\hat{X}_1|n\rangle = \langle n|\hat{X}_2|n\rangle = 0$ ولی

$$\begin{aligned}\langle n|\hat{X}_1^2|n\rangle &= \frac{1}{4}\langle n|\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle n|\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + 1|n\rangle \\ &= \frac{1}{4}(2n+1)\end{aligned}\quad (57-2)$$

و به طور مشابه

$$\langle n|\hat{X}_2^2|n\rangle = \frac{1}{4}(2n+1). \quad (58-2)$$

بنابراین برای یک حالت تعداد، عدم قطعیت‌ها برای هر دو تربیع یکسان است و به علاوه، حالت خلأ ($n=0$) حاصل ضرب عدم قطعیت را کمینه می‌کند؛ زیرا

$$\langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle_{\text{vac}} = \frac{1}{4} = \langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle_{\text{vac}}. \quad (59-2)$$

قبل از آنکه به مورد میدان‌های چندمدی بپردازیم، تأکید می‌کنیم که کوانتاهاى میدان کاواک تک‌مدی برانگیختگی‌های انرژی به صورت مقادیر گسسته $\hbar\omega$ هستند. این کوانتاها را فوتون می‌نامند و ذرات جایگزیده‌ای نیستند (در نظریه میدان هیچ عملگر مکانی برای فوتون وجود ندارد)، بلکه در تمام حجم مد توزیع شده‌اند. این یک تناقض آشکار با برداشت فوتون، به عنوان یک «ذره» نور در نظریه کوانتومی قدیم است.

۴-۲ میدان‌های چندمدی

نتایج میدان تک‌مدی محبوس در یک کاواک را می‌توان به میدان‌های تابشی چندمدی تعمیم داد. فرض خواهیم کرد این میدان‌ها در فضای آزاد باشند، جایی که هیچ چشمه تابشی و بار وجود نداشته باشد، به طوری که معادلات ۱-۲ تا ۴-۲ برقرار باشند. میدان‌های تابشی الکتریکی و مغناطیسی را می‌توان بر حسب پتانسیل برداری $A(\mathbf{r}, t)$ که در معادله موج

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (60-2)$$

و شرط پیمانه کولن

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (61-2)$$

صدق می‌کنند، نوشت. در این معادلات پتانسیل برداری $A(\mathbf{r}, t)$ به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیر وابسته است:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (۶۲-۲)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (۶۳-۲)$$

دلیل انتخاب این پیمانه در فصل ۴ تشریح خواهد شد. اکنون فرض می‌کنیم که فضای آزاد را بتوان به صورت یک کاواک مکعبی به اضلاع L با دیواره‌های کاملاً رسانا در نظر گرفت. در اینجا ایده این است که L باید در مقایسه با تمام چیزهایی که در داخل مکعب قرار دارند و تابش می‌تواند با آن‌ها برهم‌کنش کند (به عنوان مثال اتم‌ها)، بسیار بزرگ باشد. همچنین فرض می‌کنیم که L از طول موج‌های میدان بزرگ‌تر باشد. تمام نتایج فیزیکی به دست آمده از چنین مدلی باید مستقل از ابعاد کاواک باشد؛ زیرا پس از انجام تمام محاسبات $L \rightarrow \infty$ میل می‌دهیم. هدف از کاواک مکعبی این است که به ما امکان دهد شرایط مرزی تناوبی روی سطوح مکعب اعمال کنیم. به عنوان مثال، در راستای x لازم است امواج تخت در شرط زیر صدق کنند:

$$e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)} \quad (۶۴-۲)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$k_x = \left(\frac{2\pi}{L}\right) m_x, \quad m_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۶۵-۲)$$

به طور مشابه، برای راستاهای y و z داریم:

$$k_y = \left(\frac{2\pi}{L}\right) m_y, \quad m_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۶۶-۲)$$

$$k_z = \left(\frac{2\pi}{L}\right) m_z, \quad m_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۶۷-۲)$$

در این صورت، بردار موج به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}(m_x, m_y, m_z) \quad (۶۸-۲)$$

و اندازه آن بر طبق $k = \omega_k/c$ به فرکانس ω_k بستگی دارد. مجموعه اعداد صحیح (m_x, m_y, m_z) یک مد بهنجار^۱ میدان را مشخص می‌کند (جدا از قطبش). تعداد مدهای بی‌نهایت، ولی شمارش پذیر است. از نظر ریاضی، کار با اعداد گسسته در مقابل مدهای پیوسته در فضای آزاد ساده‌تر است. تعداد کل مدها در بازه‌های $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$ عبارت است از

1. Normal mode

$$\Delta m = \Delta m_x \Delta m_y \Delta m_z = 2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad (۶۹-۲)$$

که در آن ضریب ۲ به این دلیل وارد شده است که دو قطبش مستقل وجود دارد. در حد شبه پیوستار که در آن فرض می‌کنیم طول موج‌ها در مقایسه با L کوچک‌اند، امواج در فضای k فشرده می‌شوند و بنابراین می‌توان Δm را با دیفرانسیل زیر تقریب زد:

$$dm = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) dk_x dk_y dk_z \quad (۷۰-۲)$$

که در آن $V = L^3$ را قرار داده‌ایم. در فضای k در مختصات قطبی کروی

$$\mathbf{k} = k (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (۷۱-۲)$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$dm = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) k^2 dk d\Omega \quad (۷۲-۲)$$

که در آن $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ زاویه حجمی حول راستای $\mathbf{k}$ است. با استفاده از رابطه $k = \omega_k / c$ می‌توان معادله ۷۲-۲ را به صورت زیر نوشت:

$$dm = 2 \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) \frac{\omega_k^2}{c^3} d\omega_k d\Omega. \quad (۷۳-۲)$$

با انتگرال‌گیری زاویه فضایی معادله ۷۲-۲ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد مدها در همه} \\ \text{راستاها در بازه} \\ k \text{ و } k+dk \end{array} \right\} = V \frac{k^2}{\pi^2} dk = V \rho_k dk \quad (۷۴-۲)$$

که در آن $\rho_k dk$ چگالی مد (تعداد مدها در واحد حجم) و $\rho_k = k^2 / \pi^2$ است. با انتگرال‌گیری معادله ۷۳-۲ به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{تعداد مدها در همه} \\ \text{راستاها در بازه} \\ \omega_k \text{ و } \omega_k + d\omega_k \end{array} \right\} = V \frac{\omega_k^2}{\pi^2 c^3} d\omega_k \equiv V \rho(\omega_k) d\omega_k \quad (۷۵-۲)$$

که در آن $\rho(\omega_k) d\omega_k$ نیز چگالی مد با $\rho(\omega_k) = \omega_k^2 / (\pi^2 c^3)$ است. پتانسیل برداری را می‌توان به صورت یک برهم‌نهی از امواج تخت به صورت زیر نوشت:

$$A(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + A_{\mathbf{k}s}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}] \quad (۷۶-۲)$$

که در آن $A_{\mathbf{k}s}$ دامنه مختلط میدان و $\mathbf{e}_{\mathbf{k}s}$ بردار حقیقی قطبش است. جمع بندی روی $\mathbf{k}$ به معنی جمع بندی روی مجموعه اعداد صحیح (m_x, m_y, m_z) و جمع بندی روی s به معنی جمع بندی روی دو قطبش مستقل است. این قطبش ها باید متعامد باشند:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'} \quad (۷۷-۲)$$

و با توجه به شرط پیمانه ۲-۶۱ در رابطه زیر صدق کنند:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} = 0, \quad (۷۸-۲)$$

پیمانه کولن گاهی پیمانه عرضی نامیده می شود؛ زیرا قطبش بر راستای انتشار عمود است. بردارهای قطبش $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$ و $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ یک دستگاه راست گرد را تشکیل می دهند، به طوری که

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}1} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}2} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \boldsymbol{\kappa}. \quad (۷۹-۲)$$

در فضای آزاد، جمع بندی در معادله ۲-۷۶ با انتگرال زیر جایگزین می شود:

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{\pi^2} \int k^2 dk. \quad (۸۰-۲)$$

اکنون با استفاده از معادلات ۲-۶۰ و ۲-۶۱ معادله نوسانگر هماهنگ زیر برای دامنه های مختلط $A_{\mathbf{k}s}(t)$ به دست می آید.

$$\frac{d^2 A_{\mathbf{k}s}}{dt^2} + \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s} = 0 \quad (۸۱-۲)$$

که در آن $\omega_k = ck$ جواب این معادله عبارت است از

$$A_{\mathbf{k}s}(t) = A_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t} \quad (۸۲-۲)$$

که در آن قرار داده ایم $A_{\mathbf{k}s}(0) \equiv A_{\mathbf{k}s}$ از معادلات ۲-۶۲ و ۲-۶۳ به ترتیب میدان های الکتریکی و مغناطیسی عبارت اند از

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}] \quad (۸۳-۲)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}) [A_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}] \quad (۸۴-۲)$$

انرژی میدان به صورت زیر داده می شود:

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV. \quad (۸۵-۲)$$

از شرایط مرزی تناوبی داریم:

$$\int_0^L e^{\pm i k_x x} dx = \begin{cases} L & k_x = 0 \\ 0 & k_x \neq 0 \end{cases} \quad (۸۶-۲)$$

با نتایج مشابهی برای راستاهای y و z ، این نتایج را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_V e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} V. \quad (۸۷-۲)$$

در این صورت، سهم میدان الکتریکی در H عبارت است از

$$\frac{1}{2} \int_V \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) - R \quad (۸۸-۲)$$

که در آن

$$R = \frac{1}{2} \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s s'} \omega_k^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{-\mathbf{k}s'} [A_{\mathbf{k}s}(t) A_{-\mathbf{k}s'}(t) + A_{\mathbf{k}s}^*(t) A_{-\mathbf{k}s'}^*(t)]. \quad (۸۹-۲)$$

برای به دست آوردن سهم مغناطیسی از اتحاد برداری زیر استفاده می کنیم:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (۹۰-۲)$$

که از آن به دست می آوریم:

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s'}) = \delta_{ss'} \quad (۹۱-۲)$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}s}) \cdot (-\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'}) = -\mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k}s'}. \quad (۹۲-۲)$$

با استفاده از این نتایج داریم:

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV = \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) + R. \quad (۹۳-۲)$$

بنابراین با جمع کردن معادلات ۸۸-۲ و ۹۳-۲ انرژی میدان به صورت زیر به دست می آید:

$$H = 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s}(t) A_{\mathbf{k}s}^*(t) \quad (۹۴-۲)$$

$$= 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}s} A_{\mathbf{k}s}^* \quad (۹۵-۲)$$

که از معادله ۲-۸۲ استفاده کرده ایم.

انرژی معادله ۲-۹۵ شکل بسیار ساده ای بر حسب دامنه های $A_{\mathbf{k}_s}$ دارد. برای کوانتیده کردن میدان، لازم است متغیرهای کانونیک $p_{\mathbf{k}_s}$ و $q_{\mathbf{k}_s}$ را وارد کنیم. قرار می دهیم:

$$A_{\mathbf{k}_s} = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{1/2}} [\omega_k q_{\mathbf{k}_s} + i p_{\mathbf{k}_s}], \quad (۲-۹۶)$$

$$A_{\mathbf{k}_s}^* = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{1/2}} [\omega_k q_{\mathbf{k}_s} - i p_{\mathbf{k}_s}], \quad (۲-۹۷)$$

که با جایگزین کردن در معادله ۲-۹۵ به دست می آوریم:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_s} (p_{\mathbf{k}_s}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}_s}^2), \quad (۲-۹۸)$$

که هر جمله آن، انرژی یک نوسانگر هماهنگ با جرم واحد است. برای کوانتس میدان لازم است که متغیرهای کانونیک به عملگرهایی تبدیل شوند که در روابط جابه جایی زیر صدق کنند:

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}_s}, \hat{q}_{\mathbf{k}'_s}] = 0 = [\hat{p}_{\mathbf{k}_s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'_s}] \quad (۲-۹۹)$$

$$[\hat{q}_{\mathbf{k}_s}, \hat{p}_{\mathbf{k}'_s}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (۲-۱۰۰)$$

مانند میدان تک مدی، عملگرهای نابودی و خلق را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_s} = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}_s} + i\hat{p}_{\mathbf{k}_s}], \quad (۲-۱۰۱)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_s}^\dagger = \frac{1}{(2\hbar\omega_k)^{1/2}} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k}_s} - i\hat{p}_{\mathbf{k}_s}], \quad (۲-۱۰۲)$$

که در روابط زیر صدق می کنند:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}_s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'_s}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k}_s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}'_s}^\dagger] \quad (۲-۱۰۳)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}_s}, \hat{a}_{\mathbf{k}'_s}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'}. \quad (۲-۱۰۴)$$

انرژی میدان به عملگر هامیلتونی تبدیل می شود:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}_s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_s} + \frac{1}{2} \right) \quad (۲-۱۰۵)$$

$$= \sum_k \hbar \omega_k \left(\hat{n}_{ks} + \frac{1}{2} \right), \quad (۱۰۶-۲)$$

که در آن

$$\hat{n}_{ks} = \hat{a}_{ks}^\dagger \hat{a}_{ks} \quad (۱۰۷-۲)$$

عملگر تعداد برای مد ks است. به هریک از این مدها که مستقل از سایر مدهاست، یک مجموعه ویژه‌حالت‌های تعداد $|n_{ks}\rangle$ وابسته است. برای مد j ام، قرار می‌دهیم $\hat{a}_{kjsj}^\dagger \equiv \hat{a}_j^\dagger$ و $\hat{a}_{kjsj} \equiv \hat{a}_j$ و در این صورت، هامیلتونی میدان عبارت است از

$$\hat{H} = \sum_j \hbar \omega_j \left(\hat{n}_j + \frac{1}{2} \right) \quad (۱۰۸-۲)$$

حالت تعداد چندمدی فوتون حاصل ضرب حالت‌های تعداد تمامی مدهاست که آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} |n_1\rangle |n_2\rangle |n_3\rangle \dots &\equiv |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle \\ &= |\{n_j\}\rangle. \end{aligned} \quad (۱۰۹-۲)$$

این حالت، یک ویژه‌حالت $\hat{H}$ است، به طوری که

$$\hat{H} |\{n_j\}\rangle = E |\{n_j\}\rangle \quad (۱۱۰-۲)$$

که در آن ویژه‌مقدار E برابر است با

$$E = \sum_j \hbar \omega_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right). \quad (۱۱۱-۲)$$

این حالت‌های تعداد برطبق رابطه زیر برهم عمودند:

$$\langle n_1, n_2, \dots | n'_1, n'_2, \dots \rangle = \delta_{n_1 n'_1} \delta_{n_2 n'_2} \dots \quad (۱۱۲-۲)$$

اثر عملگر نابودی مد j ام روی حالت تعداد چندمدی عبارت است از

$$\hat{a}_j |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots\rangle. \quad (۱۱۳-۲)$$

به طور مشابه، برای عملگر خلق داریم:

$$\hat{a}_j^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\rangle. \quad (۱۱۴-۲)$$

حالت خلأ چندمدی به صورت زیر است:

$$|\{0\}\rangle = |0_1, 0_2, \dots, 0_j, \dots\rangle \quad (۱۱۵-۲)$$

که در آن، برای تمام j ها داریم:

$$\hat{a}_j|\{0\}\rangle = 0 \quad (۱۱۶-۲)$$

تمام حالت‌های تعداد را می‌توان به صورت زیر از حالت خلأ به دست آورد:

$$|\{n_j\}\rangle = \prod_j \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |\{0\}\rangle. \quad (۱۱۷-۲)$$

با کوانتشن میدان، دامنه‌های A_{ks} ، عملگر می‌شوند که با استفاده از معادلات ۹۸-۲ و ۱۰۲-۲ به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\hat{A}_{ks} = \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{ks} \quad (۱۱۸-۲)$$

و بنابراین پتانسیل برداری کوانتیده شده به صورت زیر است:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{ks}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{ks}} \left[\hat{a}_{\mathbf{ks}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + \hat{a}_{\mathbf{ks}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (۱۱۹-۲)$$

در این صورت، عملگر میدان الکتریکی عبارت است از

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{ks}} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{ks}} \left[\hat{a}_{\mathbf{ks}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{ks}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \quad (۱۲۰-۲)$$

و میدان مغناطیسی به صورت

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{ks}} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{ks}}) \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{ks}} \left[\hat{a}_{\mathbf{ks}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{ks}}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right], \quad (۱۲۱-۲)$$

درمی‌آید که در آن $\mathbf{k} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ است. عملگرهای نابودی و خلق در معادلات ۱۱۹-۲ تا ۱۲۱-۲ عملگرهایی در تصویر هاینبرگ در زمان $t = 0$ هستند. مانند مورد تک‌مدی، عملگر نابودی وابسته به زمان برای یک میدان آزاد به صورت زیر است:

$$\hat{a}_{\mathbf{ks}}(t) = \hat{a}_{\mathbf{ks}}(0) e^{-i\omega_k t}. \quad (۱۲۲-۲)$$

بنابراین، به عنوان مثال، میدان الکتریکی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{ks}} \left(\frac{\hbar \omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{ks}} \left(\hat{a}_{\mathbf{ks}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{ks}}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (۱۲۳-۲)$$

گاهی این میدان به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (124-2)$$

که در آن

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (125-2)$$

و

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = \left[\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right]^{\dagger}. \quad (126-2)$$

$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ قسمت فرکانس مثبت میدان نامیده می‌شود؛ زیرا شامل تمام جملات نوسانی به صورت $e^{-i\omega t}$ با $\omega > 0$ است، در حالی که $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ قسمت فرکانس منفی میدان است. اولی اساساً عملگر نابودی جمعی و دومی عملگر خلق جمعی است. عبارت‌های مشابهی می‌توان برای میدان مغناطیسی و پتانسیل برداری نوشت. در بیشتر موارد اپتیک، پیوند میدان به ماده از طریق برهم‌کنش میدان الکتریکی با گشتاورهای دوقطبی یا نوعی برهم‌کنش غیرخطی که شامل تمام توان‌های میدان الکتریکی است، انجام می‌شود. از این رو، در طول این کتاب عمدتاً به میدان الکتریکی علاقه‌مند هستیم. به علاوه، توجه کنید که میدان مغناطیسی با ضریب $1/c$ از میدان الکتریکی «ضعیف‌تر» است. میدان مغناطیسی با گشتاور دوقطبی اسپینی الکترون جفت می‌شود و این برهم‌کنش برای تمامی جنبه‌های اپتیک کوانتومی که به آن می‌پردازیم، قابل اغماض است. برای یک میدان موج تخت تک‌مدی، میدان الکتریکی عبارت است از

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x [\hat{a} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} - \hat{a}^{\dagger} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t}]. \quad (127-2)$$

در بسیاری از مسائل اپتیک کوانتومی، تغییرات فضایی میدان در محدوده ابعاد سیستم اتمی قابل اغماض است. برای تابش اپتیک، λ از مرتبه چند هزار آنگسترم است. بنابراین

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \gg |\mathbf{r}_{\text{atom}}|, \quad (128-2)$$

که در آن $|\mathbf{r}_{\text{atom}}|$ طول مشخصه اندازه اتم است. تحت این شرایط

$$e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \approx 1 \pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (129-2)$$

و می‌توانیم عبارت نمایی را با واحد جایگزین کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &\approx \hat{\mathbf{E}}(t) \\ &= i \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_x [\hat{a} e^{-i\omega t} - \hat{a}^{\dagger} e^{i\omega t}]. \end{aligned} \quad (130-2)$$

این تقریب که بعداً در فصل ۴ به آن خواهیم پرداخت، تقریب «دوقطبی» نامیده می‌شود.

۵-۲ میدان‌های گرمایی

همان‌طور که می‌دانیم، نظریه کوانتومی با کشف پلانک از قانون تابش که امروزه با نام وی همراه است، آغاز شده است. مقصود ما قانونی است که تابش گسیل‌شده توسط یک شیء ایدئال که جسم سیاه نامیده می‌شود (یک گسیل‌کننده کامل تابش) را توصیف می‌کند. یک جسم سیاه را می‌توان به صورت یک کاواک یا در واقع یک سوراخ کوچک در کاواک در نظر گرفت که شامل تابش در تعادل گرمایی با دیواره‌هایش است. این تابش بدین ترتیب به یک حمام گرمایی متصل است و بنابراین برخلاف مطالب بخش‌های گذشته این فصل، یک میدان آزاد واقعی نیست. اما با فرض اینکه این جفت‌شدگی ضعیف است، می‌توان برطبق نظریه مکانیک آماری، میدان را مانند یک سیستم منزوی در نظر گرفت که می‌تواند توسط آنسامبل کانونیک توصیف شود.

ابتدا یک میدان تک‌مدی را در نظر می‌گیریم که در تعادل گرمایی با دیواره‌های یک کاواک با دمای T است. برطبق مکانیک آماری، احتمال P_n برای اینکه مد در تراز برانگیخته گرمایی n قرار داشته باشد، برابر است با

$$P_n = \frac{\exp(-E_n/k_B T)}{\sum_n \exp(-E_n/k_B T)} \quad (۱۳۱-۲)$$

که در آن E_n توسط معادله ۲-۳۴ داده می‌شود و k_B ثابت بولتزمن است ($k_B = 1.38 \times 10^{-23} J/K$). در اینجا عملگر چگالی (خواص کلی آن در پیوست «ا» آمده است) برای میدان گرمایی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\hat{\rho}_{Th} = \frac{\exp(-\hat{H}/k_B T)}{\text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)]} \quad (۱۳۲-۲)$$

که در آن $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right)$ است و عبارت

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\exp(-\hat{H}/k_B T)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \exp(-\hat{H}/k_B T) | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) \equiv Z \end{aligned} \quad (۱۳۳-۲)$$

تابع پارش ۱ است. با توجه به $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ خواهیم داشت:

$$Z = \exp(-\hbar\omega/2k_B T) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/k_B T). \quad (۱۳۴-۲)$$

با توجه به $\exp(-\hbar\omega/k_B T) < 1$ ، حاصل جمع بالا یک سری هندسی است و بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\hbar\omega n/k_B T) = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)} \quad (۱۳۵-۲)$$

در نتیجه

$$Z = \frac{\exp(-\hbar\omega/2k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)}. \quad (۱۳۶-۲)$$

بدیهی است که

$$P_n = \langle n | \hat{\rho}_{Th} | n \rangle = \frac{1}{Z} \exp(-E_n/k_B T). \quad (۱۳۷-۲)$$

توجه کنید که عملگر چگالی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{Th} &= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |n'\rangle \langle n'| \hat{\rho}_{Th} |n\rangle \langle n| \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n/k_B T) |n\rangle \langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n |n\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (۱۳۸-۲)$$

میانگین تعداد فوتون‌های میدان گرمایی برابر است با

$$\begin{aligned} \bar{n} = \langle \hat{n} \rangle &= \text{Tr}(\hat{n} \hat{\rho}_{Th}) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{n} \hat{\rho}_{Th} | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \exp(-\hbar\omega/2k_B T) \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-\hbar\omega n/k_B T). \end{aligned} \quad (۱۳۹-۲)$$

با قرار دادن $x = \hbar\omega/k_B T$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} &= -\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \\ &= -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \\ &= \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}. \end{aligned} \quad (۱۴۰-۲)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\bar{n} &= \frac{\exp(-\hbar\omega/k_B T)}{1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)} \\ &= \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}.\end{aligned}\quad (141-2)$$

در نتیجه

$$\bar{n} \approx \begin{cases} \frac{k_B T}{\hbar\omega} & (k_B T \gg \hbar\omega) \\ \frac{\hbar\omega}{k_B T} & (k_B T \ll \hbar\omega) \end{cases}.\quad (142-2)$$

در دمای اتاق تعداد میانگین فوتون‌ها در فرکانس‌های اپتیکی بسیار کوچک است (از مرتبه 10^{-4}). در دمای سطح خورشید (6000 کلوین) و فرکانس نور زرد ($\lambda = 500\text{nm}$, $6 \times 10^{14}\text{Hz}$) تعداد میانگین فوتون‌ها در حدود 10^{-2} است. از طرف دیگر، میانگین تعداد فوتون‌ها با افزایش طول موج به سرعت افزایش پیدا می‌کند. به عنوان مثال، در دمای اتاق و طول موج در محدوده $10 - 100\ \mu\text{m}$ ، $\lambda = 10 - 100\ \mu\text{m}$ ، $\bar{n} \approx 1$ است. در محدوده میکروویو طیف، $\bar{n} \gg 1$ است.

از معادله ۱۴۱-۲ نتیجه می‌شود:

$$\exp(-\hbar\omega/k_B T) = \frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}}\quad (143-2)$$

و از معادلات ۱۳۷-۲ و ۱۳۸-۲ نتیجه می‌شود که می‌توان $\hat{\rho}_{TH}$ را بر حسب $\bar{n}$ به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\rho}_{Th} = \frac{1}{1 + \bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^n |n\rangle \langle n|.\quad (144-2)$$

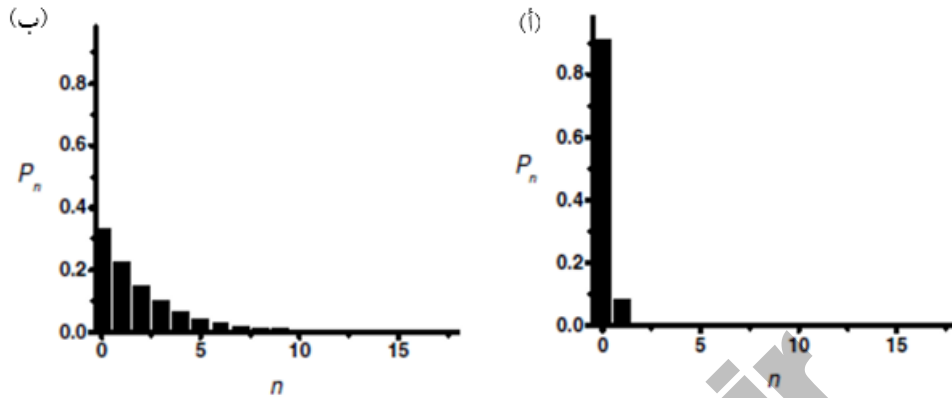
احتمال یافتن n فوتون در میدان بر حسب $\bar{n}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}}.\quad (145-2)$$

در شکل (۳-۲) P_n را در مقابل n برای دو مقدار متفاوت $\bar{n}$ رسم کرده‌ایم. به روشنی پیداست که در هر دو مقدار، محتمل‌ترین تعداد فوتون حالت خلأست و P_n به طور یکنوا نسبت به n کاهش می‌یابد. همان‌طور که پیداست، ویژگی خاصی برای P_n وقتی n نزدیک $\bar{n}$ (که لازم نیست عدد صحیح باشد) است، وجود ندارد. افت و خیزهای میانگین تعداد فوتونی برابر است با

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2.\quad (146-2)$$

با روشی مشابه با آنچه برای محاسبه $\bar{n}$ انجام شده است، می‌توان نشان داد که



شکل ۲-۳ توزیع تعداد فوتون‌های گرمایی برای (ا) $\bar{n} = 0.1$ و (ب) $\bar{n} = 2$

$$\begin{aligned}\langle \hat{n}^2 \rangle &= \text{Tr}(\bar{n}^2 \hat{\rho}_{\text{Th}}) \\ &= \bar{n} + 2\bar{n}^2\end{aligned}\quad (147-2)$$

بنابراین

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = \bar{n} + \bar{n}^2 \quad (148-2)$$

که از آن مشاهده می‌شود Δn و $\bar{n}$ از میانگین $\bar{n}$ بزرگ‌تر است. انحراف ریشه میانگین مربعی (r. m. s) برابر است با

$$\Delta n = (\bar{n} + \bar{n}^2)^{1/2} \quad (149-2)$$

که برای $\bar{n} \gg 1$ تقریباً برابر است با

$$\Delta n \approx \bar{n} + \frac{1}{2}. \quad (150-2)$$

عدم قطعیت نسبی که با نسبت $\Delta n / \bar{n}$ داده می‌شود، برای $\bar{n} \gg 1$ تقریباً ۱ و برای $\bar{n} \ll 1$ تقریباً $1/\sqrt{\bar{n}}$ است. بدیهی است که در حد $\bar{n} \rightarrow 0$ داریم $\Delta n / \bar{n} \rightarrow \infty$

انرژی میانگین فوتون‌ها در کاواک برابر است با $\hbar\omega\bar{n}$. برای به‌دست آوردن قانون تابش پلانک، انرژی میانگین فوتون‌ها را در چگالی مدها در واحد بازه ω در واحد حجم، $\rho(\omega) = \omega^2/\pi^2 c^3$ (که دو راستای مستقل قطبش را نیز منظور کرده‌ایم) ضرب می‌کنیم که حاصل آن چگالی میانگین انرژی بر واحد بازه ω است.

$$\begin{aligned}\bar{U}(\omega) &= \hbar\omega\bar{n}\rho(\omega) \\ &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}.\end{aligned}\quad (151-2)$$

به ازای $k_B T \gg \hbar \omega$ رابطه بالا به صورت ساده زیر درمی آید:

$$\bar{U}(\omega) \approx \frac{\omega^3 k_B T}{\pi^2 c^3} \quad (k_B T \gg \hbar \omega) \quad (152-2)$$

که قانون رالی نامیده می شود. گاهی این رابطه که از قانون پلانک معادله ۱۵۰-۲ با قرار دادن $\hbar \rightarrow 0$ حاصل می شود، «حد کلاسیک» نامیده می شود. توجه کنید که قرار دادن $\hbar$ برابر صفر یک حد خوش تعریف نیست؛ زیرا $\hbar$ شامل واحد سنجش (ابعاد) است. از طرف دیگر، برای دماهای پایین که در آن $k_B T \ll \hbar \omega$ است، به دست می آوریم:

$$\bar{U}(\omega) \approx \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) \quad (k_B T \ll \hbar \omega). \quad (153-2)$$

که همان قانون وین^۱ است. با مشتق گیری نتیجه می شود که $\bar{U}(\omega)$ دارای یک بیشینه در

$$\omega_{\max} = \frac{2.8 k_B T}{\hbar} = \frac{2\pi c}{\lambda_{\max}} \quad (154-2)$$

است که قانون جابه جایی وین نامیده می شود. انرژی میانگین بر واحد حجم با انتگرال گیری روی تمام فرکانس ها نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \int_0^\infty \bar{U}(\omega) d\omega \\ &= \frac{\hbar^2}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} d\omega \\ &= \frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{15 c^3 \hbar^3}. \end{aligned} \quad (155-2)$$

این همان قانون استفان-بولتزمن^۲ است.

۲-۶ افت وخیزهای خلأ و انرژی نقطه صفر

دیدیم که میدان تابشی کوانتیده افت وخیز می کند. برای یک میدان تک مدی افت وخیزهای میدان الکتریکی توسط معادله ۴۷-۲ داده می شود. برای میدان در حالت خلأ $|0\rangle$ ، افت وخیز مقدار مؤثر r.m.s شدت میدان برابر است با

$$\Delta E_x = \mathcal{E}_0 \sin(kz). \quad (156-2)$$

1. Wien

2. Stefan - Boltzmann

منشأ این افت‌وخیزها و نیز انرژی نقطه صفر از جابه‌جاناپذیری عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ سرچشمه می‌گیرد. انرژی نقطه صفر و افت‌وخیزهای خلأ در واقع نظریه کوانتومی میدان‌های کوانتومی را با مسائل جدی روبه‌رو می‌کند. مشهورترین این‌ها عبارت‌اند از: جهان شامل تعداد بی‌نهایت مد تابشی است و هر کدام دارای یک انرژی نقطه صفر $\hbar\omega/2$ هستند. در این صورت، انرژی نقطه صفر کل (ZPE) جهان برابر می‌شود با

$$E_{\text{ZPE}} = \frac{\hbar}{2} \sum_{\omega} \omega \rightarrow \infty \quad (157-2)$$

مگر اینکه مدهای با انرژی بالا به‌نحوی مستثنا شوند. اغلب گفته می‌شود تنها اختلاف‌های انرژی مهم است، اما این نمی‌تواند کل داستان باشد؛ زیرا برطبق نسبیت عام، آنچه مهم است انرژی کل است و نه فقط اختلاف انرژی [۲]. سایر «بی‌نهایت‌ها» که در نظریه الکترودینامیک ظاهر می‌شوند، به‌نحوی به روش باز بهنجارش^۱ پنهان می‌شوند (به عبارتی، مانند خاک‌روبه زیر فرش جارو می‌شوند). ولی این مورد خاص هنوز دست‌وپاگیر است. در واقع، انرژی خلأ و افت‌وخیزها به اثرات مشاهده‌پذیر منجر می‌شود. به عنوان مثال، گسیل خودبه‌خودی^۲ که اغلب نور مرئی اطراف ما را به عنوان تابش گرمایی تشکیل می‌دهد، همان‌طوری که در فصل ۴ خواهیم دید، یک نتیجه مستقیم افت‌وخیزهای خلأست. انرژی نقطه صفر^۳ (ZPE) به حداقل دو اثر دیگر منجر می‌شود: یکی انتقال کم^۴ و دیگری اثر کاسیمیر^۵.

انتقال کم، اختلاف بین نتایج تجربی و نظریه نسبیتی دیراک در اتم هیدروژن است. تئوری دیراک پیش‌بینی می‌کند که ترازهای $2^2P_{1/2}$ و $2^2S_{1/2}$ تبهگن باشند. نتایج اِپِشِکی اولیه نشان می‌داد که این حالت‌ها تبهگن نیستند و به اندازه ۰,۰۳۳ سانتی‌متر با یکدیگر فاصله دارند. لم و راترفورد [۳] با ترکیب زیبایی از پرتوهای اتمی و روش‌های میکروویو نشان دادند که انرژی حالت $2^2S_{1/2}$ تقریباً به اندازه ۱۰۰۰ MHz از انرژی حالت $2^2P_{1/2}$ بیشتر است. در ۱۹۴۷ به [۴] این شکاف را ناشی از برهم‌کنش الکترون مقید با انرژی نقطه صفر توصیف کرد. در اینجا به یک تعبیر شهودی ساده که در ۱۹۴۸ توسط ولتون [۵] ارائه شد، می‌پردازیم. در ادامه تنها برای این محاسبات، راهبرد ولتون را که در دستگاه واحدهای cgs انجام شد دنبال می‌کنیم.

هر مد دارای انرژی نقطه صفر $\hbar\nu/2$ است که در آن $\nu = \omega/2\pi$ است. تعداد مدها در یک کاواک به حجم V با فرکانس بین ν و $\nu + d\nu$ برابر $(\pi/c^3)\nu^2 d\nu$ است. بنابراین انرژی نقطه صفر (ZPE) میدان برابر است با

$$\begin{aligned} \left(\frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu V \right) \frac{1}{2} \hbar \nu &= \frac{1}{8\pi} \int_V (E_\nu^2 + B_\nu^2) dV \\ &= \frac{1}{8\pi} E_\nu^2 V \end{aligned} \quad (158-2)$$

1. renormalization
2. Spontaneous emission

3. Zero-point energy
4. Lamb shift

5. Casimir effect
6. Bethe

که در آن E_ν دامنه مؤلفه میدان الکتریکی با فرکانس ν است. بنابراین

$$E_\nu^2 = \frac{32\pi^2}{c^3} h\nu^3 d\nu. \quad (159-2)$$

الکترون مقید در اتم هیدروژن با میدان الکتریکی نقطه صفر و با پتانسیل کولنی پروتون $-e^2/r$ برهم کنش می کند. اگر r معرّف «مدار استاندارد» الکترون و Δr معرّف افت و خیزها از این مدار باشد، در این صورت تغییر در انرژی پتانسیل برابر است با $\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r)$ که با بسط تیلور داریم:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial V}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial V}{\partial z} \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (\Delta y)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1}{2} (\Delta z)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \dots \end{aligned} \quad (160-2)$$

چون افت و خیزها همسان گرد هستند، $\langle \Delta x \rangle = \langle \Delta y \rangle = \langle \Delta z \rangle = 0$ و $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\Delta y)^2 \rangle = \langle (\Delta z)^2 \rangle = \langle (\Delta r)^2 \rangle / 3$ در این صورت

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{1}{6} \langle (\Delta r)^2 \rangle \nabla^2 V. \quad (161-2)$$

برای حالت اتمی $|nlm_l\rangle$ انتقال انرژی تا مرتبه اول برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta E &= \langle nlm_l | \langle \Delta V \rangle | nlm_l \rangle \\ &= \frac{1}{6} \langle (\Delta r)^2 \rangle \langle nlm_l | \nabla^2 V | nlm_l \rangle. \end{aligned} \quad (162-2)$$

با استفاده از $V = -e^2/r$ و $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(r)$ به دست می آوریم:

$$\langle nlm_l | \nabla^2 V | nlm_l \rangle = 4\pi e^2 |\psi_{nlm_l}(r=0)|^2. \quad (163-2)$$

کلیه توابع موج اتمی نظریه کوانتومی غیرنسبیتی در مبدأ صفر می شوند، به جز برای حالت های s با $l=0$ که برای آن ها داریم:

$$|\psi_{n00}(r=0)|^2 = \frac{1}{\pi n^3 a_0^3} \quad (164-2)$$

که در آن a_0 شعاع بور است. برای حالت های p تابع موج در مبدأ صفر می شود و بنابراین انتقال انرژی نیز صفر می شود. برای به دست آوردن $\langle (\Delta r)^2 \rangle$ فرض می کنیم فرکانس های مهم میدان از فرکانس های تشدید اتمی بسیار بزرگ ترند و فرکانس های پایین تر توسط پیوند اتمی حفاظت می شوند و نمی توانند در حرکت الکترون ها تأثیر داشته باشند. جابه جایی Δr_ν القاشده توسط فرکانس بین ν و $\nu + d\nu$ از رابطه زیر به دست می آید:

$$\frac{d^2 \Delta r_\nu}{dt^2} = \frac{eE_\nu}{m} \exp(2\pi\nu it). \quad (165-2)$$

که جواب آن عبارت است از

$$\Delta r_v = -\frac{e^2}{m} \frac{E_v}{4\pi^2 v^2} \exp(2\pi v i t). \quad (۱۶۶-۲)$$

میانگین مجذور این جابه‌جایی که توسط این مدها القا شده برابر است با

$$\langle (\Delta r_v)^2 \rangle = -\frac{e^2}{m^2} \frac{E_v^2}{32\pi^4 v^4} = \frac{e^2 h}{\pi^2 m^2 c^3} \frac{dv}{v}. \quad (۱۶۷-۲)$$

انتقال انرژی حالت s که با جمع کردن روی تمام فرکانس‌ها حاصل می‌شود، برابر است با

$$\Delta E = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{mc} \right) \frac{hc}{\pi^2 n^3 a_0^3} \int \frac{dv}{v} \quad (۱۶۸-۲)$$

که در آن $e^2/\hbar c$ ثابت ساختار ریز و $\hbar/mc$ طول موج کمپتون الکترون است. انتگرال بالا واگراست، ولی می‌توان هم در فرکانس‌های بالا و هم در فرکانس‌های پایین حدود انتگرال را قطع کرد. در فرکانس‌های پایین که اتم به افت‌وخیز میدان پاسخ نمی‌دهد، فرکانس مداری الکترون، $\nu_0 = e^2/\hbar a_0^3 n^3$ می‌تواند یک فرکانس قطع طبیعی باشد. در فرکانس‌های بالا اثرات نسبیتی در حرکت الکترون ظاهر می‌شود، اما تحلیل قبلی غیرنسبیتی است و بنابراین

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{p/m}{c} \right) = \frac{pc}{mc^2} = \frac{\hbar k}{mc} < 1 \quad (۱۶۹-۲)$$

که مقدار k را به کمتر از $mc/\hbar$ و فرکانس‌های زاویه‌ای را به کمتر از $mc^2/\hbar$ در انتگرال (۱۶۸-۲) محدود

می‌کند. بنابراین برای حالت $2^1S_{1/2}$ اتم هیدروژن، با $a_0 = \hbar^2/me^2$ ، انتقال انرژی برابر است با

$$\Delta E = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \frac{me^4}{\hbar^2} \log \left(\frac{mc^2}{\hbar \nu_0} \right) \quad (۱۷۰-۲)$$

که نتیجه می‌شود $\Delta E/h \sim 1000$ MHz در حالت $2^1P_{1/2}$ تا این مرتبه تغییری ایجاد نمی‌شود.

اثر کاسیمیر [۶] در ساده‌ترین بیان عبارت است از ایجاد یک نیرو بین دو صفحه کاملاً رسانای موازی به سبب تغییر در انرژی نقطه صفر (ZEP) حاصل از شرایط تحمیلی بر روی صفحات. برای محاسبه این نیرو بحث میلونی^۱ و شیه^۲ [۷] را دنبال می‌کنیم. یک متوازی‌السطوح با دیواره‌های رسانای کامل به اضلاع $L_x = L_y = L$ و $L_z = d$ را در نظر بگیرید. شرایط مرزی روی دیواره‌ها، فرکانس‌های مجاز را به مقادیر زیر محدود می‌کند:

$$\omega_{lmn} = \pi c \left(\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۱۷۱-۲)$$

1. Milonni

2. Shih

که در آن l, m, n اعداد صحیح نامنفی اختیار می کنند. اگر جعبه وجود نداشت، تمام فرکانس ها مجاز بودند. انرژی نقطه صفر (ZPE) در جعبه برابر است با

$$E_0(d) = \sum'_{l,m,n} (2) \frac{1}{2} \hbar \omega_{lmn} \quad (172-2)$$

که در آن ضریب دو به خاطر دو راستای قطبش مستقل وارد شده است و علامت پریم روی جمع بندی بدین معنی است که عدد دو وقتی یکی از اعداد صحیح l, m, n برابر صفر شد، حذف شود؛ زیرا در این صورت تنها یک راستای مستقل قطبش وجود دارد. آنچه مورد نظر ماست، حالتی است که در آن $d \gg L$ باشد. بنابراین می توان جمع بندی روی l و m را با انتگرال گیری جایگزین کرد.

$$E_0(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \left(x^2 + y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (173-2)$$

از طرف دیگر، اگر d به دلخواه بزرگ باشد، جمع بندی روی n را می توان با یک انتگرال جایگزین کرد.

$$E_0(\infty) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \frac{d}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (174-2)$$

وقتی صفحات به فاصله d از یکدیگر قرار داشته باشند، انرژی پتانسیل سیستم برابر $U(d) = E_0(d) - E_0(\infty)$ می شود که عبارت است از انرژی لازم برای اینکه صفحات را از بی نهایت به فاصله d بیاوریم. بنابراین

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c}{\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \left(x^2 + y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{\pi} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (175-2)$$

با تبدیل به مختصات قطبی در صفحه $x - y$ داریم:

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c}{\pi^2} \frac{\pi}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dr r \left(r^2 + \frac{n^2 \pi^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{d}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr r (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (176-2)$$

با تغییر متغیر $w = r^2$

$$U(d) = \frac{L^2 \hbar c}{4\pi^2 d^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dw (w + n^2)^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} dw (w + z^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (177-2)$$

هر دو انرژی نقطه صفر در معادله ۱۷۷-۲ بی‌نهایت‌اند، ولی اختلاف آن‌ها متناهی خواهد بود. بنابراین داریم:

$$U(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} L^2 \left[\frac{1}{2} F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} dz F(n) \right] \quad (178-2)$$

که در آن

$$F(u) \equiv \int_0^{\infty} dw (w + u^2)^{\frac{1}{2}} \quad (179-2)$$

با $u = n$ یا $u = z$ اختلاف را می‌توان از فرمول اویلر^۱-مک‌لوران^۲ تخمین زد.

$$\sum_0^{\infty} F(n) - \int_0^{\infty} dz F(z) = -\frac{1}{2} F(0) - \frac{1}{12} F'(0) + \frac{1}{720} F'''(0) \dots \quad (180-2)$$

چون $F'(z) = 2z$, $F'(0) = 0$, $F'''(z) = -4$ و تمام مشتق‌های بالاتر صفر می‌شوند. بنابراین

$$U(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3} L^3 \left(-\frac{4}{720} \right) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720d^3} L^2. \quad (181-2)$$

و به این معناست که نیرو بر واحد سطح بین صفحات برابر است با

$$F(d) = U'(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4} \quad (182-2)$$

که همان نیروی کاسیمیر است. وجود این نیرو با آزمایشی که توسط اسپارنی^۳ [۸] در ۱۹۵۷ انجام شد، مورد تأیید قرار گرفته است.

۷-۲ فاز کوانتومی

اکنون یک موج نوری را آن‌طوری که در نظریه الکترومغناطیس کلاسیک تصور می‌شود، در نظر بگیرید. میدان

1. Euler

2. McLaurin

3. Sparnaay

الکتريکي يک تک‌مد را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{e}_x E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \\ &= \mathbf{e}_x \frac{1}{2} E_0 \{ \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi] + \exp[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi] \} \end{aligned} \quad (183-2)$$

که در آن E_0 دامنه و ϕ فاز میدان است. این معادله را با معادله ۱۲۷-۲ مقایسه کنید. اگر عملگر $\hat{a}$ را به‌شکل قطبی تفکیک کنیم، این دو معادله کاملاً شبیه یکدیگر خواهند بود. اولین تلاش برای چنین تفکیکی توسط دیراک [۹] برداشته شد که عملگرهای نابودی و خلق را به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{a} = e^{i\hat{\phi}} \sqrt{\hat{n}} \quad (184-2)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\hat{n}} e^{-i\hat{\phi}} \quad (185-2)$$

که در آن $\hat{\phi}$ را به‌عنوان عملگر هرمیتی برای فاز تعبیر کرد. از رابطه جابه‌جایی بنیادی $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ نتیجه می‌شود:

$$e^{i\hat{\phi}} \hat{n} e^{-i\hat{\phi}} - \hat{n} = 1 \quad (186-2)$$

یا

$$e^{i\hat{\phi}} \hat{n} - \hat{n} e^{i\hat{\phi}} = e^{i\hat{\phi}}. \quad (187-2)$$

با بسط توابع نمایی می‌توان دید که معادله ۱۸۶-۲ مادامی که داشته باشیم

$$[\hat{n}, \hat{\phi}] = i. \quad (188-2)$$

برقرار است. بنابراین عملگرهای تعداد و فاز، مشاهده‌پذیرهای مکمل هستند و بنابراین افت‌وخیزها در این کمیت‌ها باید در رابطه عدم قطعیت $\Delta n \Delta \phi \geq \frac{1}{2}$ صدق کنند.

متأسفانه همه‌چیز به‌این سادگی نیست. برای اینکه ببینیم چه چیزی در نکات بالا اشتباه است، عنصر ماتریسی جابه‌جاگر (۱۸۸-۲) را بین دو حالت تعداد دلخواه $|n\rangle$ و $|n'\rangle$ در نظر بگیریم.

$$\langle n' | [\hat{n}, \hat{\phi}] | n \rangle = i \delta_{nn'}. \quad (189-2)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$(n' - n) \langle n' | \hat{\phi} | n \rangle = i \delta_{nn'} \quad (190-2)$$

که وقتی $n = n'$ باشد، به تناقض می‌رسد (نتیجه می‌شود $i = 0$). روش دیراک به‌این دلیل با شکست مواجه می‌شود که در آن فرض می‌گردد یک عملگر هرمیتی فاز $\hat{\phi}$ وجود دارد. درواقع، دو دلیل برای شکست روش دیراک وجود دارد: اگر $\hat{\phi}$ به‌عنوان یک عملگر هرمیتی وجود داشته باشد، باید $\exp(i\hat{\phi})$ یک عملگر یکانی باشد. در این صورت، از معادلات ۱۸۴-۲ و ۱۸۵-۲ باید داشته باشیم:

$$e^{i\hat{\phi}} = \hat{a}(\hat{n})^{-\frac{1}{2}} \quad (191-2)$$

$$e^{-i\hat{\phi}} = (\hat{n})^{-\frac{1}{2}} \hat{a}^\dagger = (e^{i\hat{\phi}})^\dagger. \quad (192-2)$$

بنابراین

$$(e^{i\hat{\phi}})^\dagger (e^{i\hat{\phi}}) = 1 \quad (193-2)$$

ولی با توجه به معادلات بالا

$$(e^{i\hat{\phi}})(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = \hat{a} \frac{1}{\hat{n}} \hat{a}^\dagger \neq 1. \quad (194-2)$$

بنابراین $\exp(i\hat{\phi})$ یک عملگر یکانی نیست که از آن نتیجه می‌شود $\hat{\phi}$ هریتی نیست. منشأ اصلی این مسئله این است که عملگر $\hat{n}$ طیفی دارد که از پایین محدود است؛ اعداد صحیح منفی را دربر نمی‌گیرد. یک راه برای حل این مشکل این است که کاری کنیم که طیفش اعداد صحیح منفی را نیز دربر گیرد. البته حالت‌های تعداد منفی فیزیکی نیستند، ولی همان‌طوری که بارنت^۱ و پگگ^۲ نشان دادند [۱۰]، می‌توان عملگرهای یکانی را به‌صورت زیر ساخت:

$$e^{i\hat{\phi}} \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle \langle n+1| \quad (195-2)$$

$$(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = e^{-i\hat{\phi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle \langle n| \quad (196-2)$$

که از آن به‌سادگی می‌توان دید:

$$e^{i\hat{\phi}}(e^{i\hat{\phi}})^\dagger = (e^{i\hat{\phi}})^\dagger e^{i\hat{\phi}} = 1. \quad (197-2)$$

باید در نظر داشت که وارد کردن حالت‌های با اعداد منفی صوری است و از حالت‌های تعداد مثبت (فیزیکی) جدا می‌شود. هیچ پیش‌بینی جدیدی از وارد کردن این حالت‌های منفی حاصل نمی‌شود. اما با استفاده از معادله ۱۹۴-۲ به‌سادگی می‌توان نشان داد معادله ۱۸۶-۲ هنوز برقرار است که از آن معادله ۱۸۷-۲ نتیجه می‌شود و ما هنوز با تناقض موجود در ۱۸۹-۲ مواجه هستیم.

این ما را به مشکل دوم می‌برد که به این واقعیت که $\hat{\phi}$ قرار است یک عملگر زاویه باشد، مرتبط است. این وضعیت شبیه مسئله آشنای تکانه زاویه‌ای ذره‌ای است که در صفحه $x-y$ حرکت می‌کند و تکانه زاویه‌ای آن در راستای محور z است. اگر ϕ زاویه سمتی با تعریف

1. Barnett

2. Pegg

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2-198)$$

(با تناوب 2π) باشد، تکانه زاویه‌ای مداری عبارت است از

$$\hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x = i \hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2-199)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$[\phi, \hat{L}_z] = i. \quad (2-200)$$

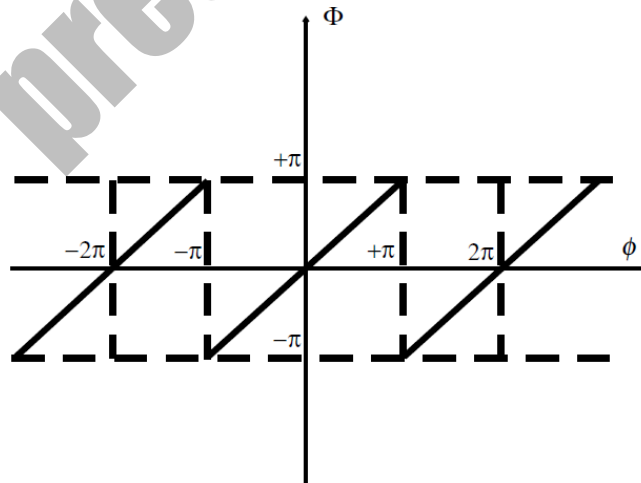
اما $\hat{L}_z$ تنها در فضای توابع تناوبی، هرمیتی است، یعنی توابع موجی به شکل

$$\psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2-201)$$

که در آن

$$\hat{L}_z \psi_m(\phi) = \hbar m \psi_m(\phi). \quad (2-202)$$

(توجه کنید که طیف $\hat{L}_z$ اعداد صحیح منفی را نیز دربرمی‌گیرد.) اما ϕ یک تابع تناوبی نیست و در محدوده $-\infty < \phi < \infty$ قرار دارد. درواقع، افت‌وخیزهای $\Delta\phi$ می‌توانند برای تعدادی از حالت‌ها بزرگ‌تر از 2π باشند و برای یک حالت تعداد، معادله ۲-۱۹۹، به رفتار $\Delta\phi \rightarrow \infty$ منجر می‌شوند که یک رفتار بی‌معنی است. یک راه‌حل ممکن برای این مسئله تعریف مختصات تناوبی $\Phi(\phi)$ است [۱۰] که مطابق شکل ۲-۴ ناپیوسته رفتار کند.



شکل ۲-۴ تابع تناوبی $\Phi(\phi)$ که به دلخواه ناپیوسته انتخاب شده است.

مشکل این روش در این است که رابطه جابه‌جایی دیگر به شکل کانونیک نیست، بلکه به صورت زیر است:

$$[\Phi, \hat{L}_z] = i \left\{ 1 - 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[\phi - (2n+1)\pi] \right\}. \quad (2-203)$$

توابع دلتا از ناپیوستگی Φ ناشی می‌شوند و بدون توجه به اینکه ناپیوستگی در کجا قرار دارد، اتفاق می‌افتند. در هر بازه 2π همواره یک تابع دلتا وجود دارد و بنابراین هیچ رابطه عدم قطعیت معقولی را نمی‌توان فرمول‌بندی کرد. در طی سال‌ها تلاش‌های فراوانی صورت گرفته است تا یک فرمول‌بندی برای توصیف فاز کوانتومی ارائه دهند که به نحوی موانع بالا را برطرف کند. این روش‌ها به‌طور وسیعی در مقالات اخیر جمع‌آوری شده‌اند. در اینجا به دلایل آموزشی، ابتدا روش مربوط به ساسکیند^۱ و گلوگور^۲ [۱۱] و اصلاحاتی که توسط کاروترز^۳ و نیتو^۴ [۱۲] در آن انجام شده است و نوعی عملگر فاز «یکانی» یک‌سویه (درواقع عملگری مشابه با عامل فاز نمایی) را که معرفی کرده‌اند، بررسی می‌کنیم. ابتدا ویژه‌حالت‌های این عملگر، یعنی ویژه‌حالت‌های فاز را معرفی و سپس از آن برای ساختن توزیع فاز یک حالت دلخواه میدان استفاده می‌کنیم [۱۳]. میانگین‌های مختلف روی فاز را می‌توان از این توزیع محاسبه کرد. نتایج به‌دست آمده از این روش با نتایج حاصل از روش پگ و بارنت [۱۴] که با روش دیراک عملگر نابودی را می‌نوشتند، ولی در یک فضای هیلبرت قطع شده، یکسان است. پس از محاسبه مقادیر چشم‌داشتی در این فضای قطع شده ابعاد فضا را می‌توان تا بی‌نهایت افزایش داد. با استفاده از ویژه‌حالت‌های فاز، از این محاسبات پیچیده اجتناب می‌کنیم.

عملگرهای ساسکیند-گلوگور (SG) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{E} \equiv (\hat{n} + 1)^{-\frac{1}{2}} \hat{a} = (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-\frac{1}{2}} \hat{a} \quad (2-204)$$

$$\hat{E}^\dagger = \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1)^{-\frac{1}{2}} = \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger)^{-\frac{1}{2}} \quad (2-205)$$

که در آن $\hat{E}$ و $\hat{E}^\dagger$ مشابه عامل‌های $\exp(\pm i\phi)$ هستند. این عملگرهای $\hat{E}$ گاهی عملگرهای «نمایی» نامیده می‌شوند که با توجه به متن، نباید با عملگرهای میدان اشتباه شوند. وقتی این عملگرها به حالت‌های تعداد $|n\rangle$ اعمال شوند، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{E} |n\rangle &= |n-1\rangle & \text{for } n \neq 0 \\ &= 0 & \text{for } n = 0, \end{aligned} \quad (2-206)$$

$$\hat{E}^\dagger |n\rangle = |n+1\rangle. \quad (2-207)$$

از این روابط به سادگی می‌توان دید که عبارت‌های هم‌ارز مفیدی برای این عملگرهای نمایی عبارت‌اند از

1. Susskind
2. Glogover

3. Carruthers
4. Nieto

$$\hat{E} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1| \quad \hat{E}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|. \quad (208-2)$$

به سادگی می توان نشان داد:

$$\hat{E} \hat{E}^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} |n\rangle\langle n+1|n'+1\rangle\langle n'| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \quad (209-2)$$

اما

$$\hat{E}^\dagger \hat{E} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|n'\rangle\langle n'+1| = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\langle n+1| = 1 - |0\rangle\langle 0|. \quad (210-2)$$

وجود عملگر تصویری $|0\rangle\langle 0|$ یکانی بودن $\hat{E}$ را از بین می برد. اما برای حالتی که میانگین عدد فوتونی آن $\bar{n} \geq 1$ باشد، مشارکت حالت پایه کوچک و $\hat{E}$ تقریباً یکانی است.

البته $\hat{E}$ و $\hat{E}^\dagger$ خود مشاهده پذیر نیستند، ولی عملگرهای

$$\hat{C} \equiv \frac{1}{2}(\hat{E} + \hat{E}^\dagger), \quad \hat{S} \equiv \frac{1}{2i}(\hat{E} - \hat{E}^\dagger) \quad (211-2)$$

شبه $\cos\phi$ و $\sin\phi$ هستند. این عملگرها هرمیتی هستند و در رابطه جابه جایی زیر صدق می کنند:

$$[\hat{C}, \hat{S}] = \frac{1}{2}i|0\rangle\langle 0| \quad (212-2)$$

و بنابراین به جز برای حالت خلأ، برای بقیه حالت ها جابه جایی پذیرند. به علاوه، شکل کوانتومی اتحاد مثلثاتی به صورت زیر درمی آید:

$$\hat{C}^2 + \hat{S}^2 = 1 - \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \quad (213-2)$$

که بار دیگر اثر مخرب خلأ را می بینیم. همچنین می توان نشان داد:

$$[\hat{C}, \hat{n}] = i\hat{S} \quad \text{و} \quad [\hat{S}, \hat{n}] = -i\hat{C} \quad (214-2)$$

که اولین رابطه مشابه معادله ۴۸-۲ است. روابط عدم قطعیتی که در این موارد داریم، به ترتیب عبارت اند از:

$$(\Delta n)(\Delta C) \geq \frac{1}{2}|\langle \hat{S} \rangle| \quad (215-2)$$

$$(\Delta n)(\Delta S) \geq \frac{1}{2}|\langle \hat{C} \rangle| \quad (216-2)$$

که در آن Δ به معنای انحراف جذر میانگین مربعی است.

در مورد حالت‌های تعداد $|n\rangle$ ، $\Delta n = 0$

$$\langle n | \hat{C} | n \rangle = \langle n | \hat{S} | n \rangle = 0 \quad (2-217)$$

و

$$\langle n | \hat{C}^2 | n \rangle = \langle n | \hat{S}^2 | n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \geq 1 \\ \frac{1}{4}, & n = 0 \end{cases}. \quad (2-218)$$

بنابراین برای $n \geq 1$ عدم قطعیت‌ها در $\hat{C}$ و $\hat{S}$ عبارت‌اند از

$$\Delta C = \Delta S = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2-219)$$

که به نظر می‌رسد متناظر با زاویه فازی باشد که به طور یکسان تمام مقادیر بین صفر تا 2π را اختیار می‌کند (توجه کنید که این امر برای حالت خلأ برقرار نیست). در هر حال، طرف راست معادلات 2-214 و 2-215 برای یک حالت تعداد صفر می‌شوند، چیزی که برای برقراری روابط عدم قطعیت لازم است.

ویژه‌حالت‌های $|\phi\rangle$ ی عملگر نمایی که در معادله ویژه‌مقداری

$$\hat{E} |\phi\rangle = e^{i\phi} |\phi\rangle \quad (2-220)$$

صدق می‌کنند، عبارت‌اند از

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi} |n\rangle. \quad (2-221)$$

این حالت‌ها، نه بهنجار شده و نه بر یکدیگر عمودند؛ زیرا ضرب اسکالر $\langle\phi|\phi'\rangle$ برابر تابع دلتای $\delta(\phi - \phi')$ نیست. با توجه به رابطه

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\phi} d\phi = 2\pi \delta_{nn'} \quad (2-222)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که برای ویژه‌حالت‌های فاز، رابطه بهنجارش زیر را داریم:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi |\phi\rangle \langle\phi| = 1. \quad (2-223)$$

به وضوح پیداست که مقادیر چشمداشتی عملگرهای $\hat{C}$ و $\hat{S}$ را می‌توان به ترتیب از $\cos\phi$ و $\sin\phi$ به دست آورد. هر حالت دلخواه $|\psi\rangle$ ی میدان را می‌توان به صورت یک برهم‌نهی از تمام حالت‌های تعداد نوشت، یعنی

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (2-224)$$

که در آن برای آنکه $|\psi\rangle$ بهنجار باشد، ضرائب C_n باید در رابطه زیر صدق کنند:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = 1 \quad (2-225)$$

می توان یک توزیع فازی $\mathcal{P}(\phi)$ به صورت زیر به $|\psi\rangle$ متنسب کرد:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\phi) &\equiv \frac{1}{2\pi} |\langle \phi | \psi \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\phi} C_n \right|^2. \end{aligned} \quad (2-226)$$

بدیهی است که $\mathcal{P}(\phi)$ همواره مثبت و می توان نشان داد به صورت زیر قابل بهنجار شدن است: با نوشتن

$$\mathcal{P}(\phi) \equiv \frac{1}{2\pi} |\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle \quad (2-227)$$

و سپس انتگرال گیری نسبت به ϕ و با استفاده از رابطه ۲-۲۲۳ به دست می آوریم:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\phi) d\phi = \langle \psi | \psi \rangle = 1. \quad (2-228)$$

به طور کلی، برای حالتی که توسط عملگر چگالی $\hat{\rho}$ توصیف می شود، داریم:

$$\mathcal{P}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \langle \phi | \hat{\rho} | \phi \rangle. \quad (2-229)$$

از این توضیح می توان برای محاسبه میانگین هر تابع ϕ ، $f(\phi)$ به صورت زیر استفاده کرد:

$$\langle f(\phi) \rangle = \int_0^{2\pi} f(\phi) \mathcal{P}(\phi) d\phi. \quad (2-230)$$

این همان چیزی است که از فرمول بندی پگ-بارنت در مرجع [۱۴] به دست می آید.

حال تنها یک حالت تعداد $|n\rangle$ را که برای آن، به جز $C_n = 1$ بقیه ضرائب در معادله ۲-۲۲۴ صفر می شوند، در نظر می گیریم. در این صورت داریم:

$$\mathcal{P}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \quad (2-231)$$

همان‌طوری که انتظار می‌رفت، توزیع یکنواخت است. به علاوه، میانگین ϕ برابر π و میانگین ϕ^2 برابر با $4\pi^2/3$ است. بنابراین افت و خیزهای ϕ عبارت‌اند از

$$\Delta\phi = \sqrt{\langle\phi^2\rangle - \langle\phi\rangle^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad (2-232)$$

و همان چیزی است که برای یک توزیع احتمال یکنواخت در بازه صفر تا 2π انتظار می‌رفت. توجه کنید که این امر برای تمام حالت‌ها از جمله خلأ برقرار است. در فصل‌های بعد از این فرمول‌بندی برای حالت‌های دیگر میدان، به خصوص حالت‌های همدوس، استفاده خواهیم کرد.

یکی از مشکلاتی که در یافتن توصیف کوانتومی معقولی برای فاز وجود دارد این است که روشن نیست چگونه فرمول‌بندی‌های مختلف برای فاز را با تجربیات واقعی در اندازه‌گیری فاز مرتبط کنیم. روشی که در اینجا انتخاب کرده‌ایم، براساس کار شیپرو^۱ و شپارد^۲ [۱۵] است که با استفاده از نظریه تخمین کوانتومی [۱۶] نشان دادند حالت‌های فاز $|\phi\rangle$ سنجۀ عملگری احتمال را برای بیشینه درست‌نمایی برآورد فاز تولید می‌کنند. از طرف دیگر، مندل و همکارانش رهیافت عملیاتی مبتنی بر اندازه‌گیری‌های فاز کلاسیکی برای عملگرهای فاز را انتخاب کردند. آن‌ها نشان دادند که اندازه‌گیری‌های فاز حتی در اپتیک کلاسیک مشکل است و این سختی‌ها به اپتیک کوانتومی نیز تسری می‌یابد و به علاوه اینکه روش‌های اندازه‌گیری مختلف به عملگرهای فازی مختلف منجر می‌شوند. چنین به نظر نمی‌رسد که حداقل از نظر عملیاتی، یک عملگر فازی درستی وجود داشته باشد. از این به بعد، ویژه‌حالت‌های عملگر SG را با این فرض به کار می‌بریم که توزیع فازی مربوط به‌طور کیفی، اگر نه به‌طور کمی، یک متغیر فاز کوانتومی را توصیف کند.

مسائل

۱- با استفاده از معادلات ماکسول برای میدان تک‌مدی داده‌شده با معادله ۲-۵، میدان مغناطیسی مربوط، معادله ۲-۶ را به دست آورید.

۲- برای میدان تک‌مدی مسئله قبل، هامیلتونی را به دست آورید و نشان دهید که به شکل نوسانگر هماهنگ ساده است.

۳- لم بکر- هاسدورف را اثبات کنید؛ یعنی برای هر دو عملگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ نشان دهید:

$$e^{i\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-i\lambda\hat{A}} = \hat{B} + i\lambda[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

۴- برای مورد خاصی که در آن $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ولی $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]$ نشان دهید:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = \exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right)e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = \exp\left(\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right)e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}.$$

این رابطه قضیه بکر- هاسدورف- کمبل نامیده می‌شود.

۵- فرض کنید حالت میدان تک‌مدی یک کاواک در لحظه $t = 0$ به صورت

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + e^{i\varphi}|n+1\rangle)$$

باشد که در آن φ یک فاز است. مطلوب است حالت $|\psi(t)\rangle$ در $t > 0$. برای این حالت، رابطه عدم قطعیت (۴۹-۲) را ثابت کنید.

۶- حالت برهم‌نهی $|\psi_{01}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ را که در آن α و β اعداد مختلط هستند که در رابطه $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ صدق می‌کنند، در نظر بگیرید. واریانس‌های عملگرهای تربیع $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ را محاسبه کنید. آیا مقادیری برای α و β وجود دارد که یکی از واریانس‌های تربیع کمتر از واریانس برای حالت خلأ باشد؟ اگر چنین است، بررسی کنید آیا اصل عدم قطعیت نقض می‌شود؟ همین کار را برای حالت $|\psi_{02}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|2\rangle$ انجام دهید.

۷- بسیاری از فرایندها شامل جذب فوتون‌های منفرد از یک حالت میدان کوانتومی هستند. فرایند جذب را توسط عملگر نابودی $\hat{a}$ نمایش می‌دهیم. برای یک حالت میدان دلخواه $|\psi\rangle$ ، جذب یک فوتون منفرد به حالت $|\psi'\rangle \sim \hat{a}|\psi\rangle$ منجر می‌شود. این حالت را بهنجار کنید. تعداد میانگین فوتون‌های $\bar{n}$ حالت $|\psi\rangle$ را با تعداد $\bar{n}$ حالت $|\psi'\rangle$ مقایسه کنید. آیا نتیجه $\bar{n}' = \bar{n} - 1$ را به دست می‌آورید؟

۸- برهم‌نهی حالت خلأ با حالت ۱۰ فوتونی را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |10\rangle).$$

میانگین تعداد فوتون را برای این حالت محاسبه کنید. سپس فرض کنید یک فوتون جذب شده است؛ در این صورت، محاسبه میانگین تعداد فوتون را انجام دهید. آیا نتیجه‌ای که به دست آورده‌اید، در مقایسه با پاسختان به مسئله قبل، معقول است؟

۹- عبارت‌های چندمدی برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را در نظر بگیرید. ا. نشان دهید که آن‌ها در معادلات ماکسول در فضای آزاد صدق می‌کنند.

ب. با استفاده از این میدان‌ها انرژی میدان داده شده با معادله ۲-۹۵ را به دست آورید.

۱۰- گاهی بهتر است توزیع احتمال تعداد فوتون P_n را با فاکتوریل گشتاورهای نشان دهیم. فاکتوریل r ام یک گشتاور به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(\hat{n}-1)(\hat{n}-2)\dots(\hat{n}-r+1) \rangle \\ = \sum_n n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)P_n. \end{aligned}$$

نشان دهید که برای یک میدان گرمایی طرف راست برابر $\bar{n}^r r!$ است.

۱۱- رابطه جابه‌جایی عملگرهای سینوس و کسینوس، $\hat{C}$ و $\hat{S}$ را به دست آورید. عناصر ماتریسی این جابه‌جایی را محاسبه کنید و نشان دهید تنها عناصر قطری مخالف صفرند.

۱۲- یک حالت مخلوط (پیوست «ا» را ببینید) توسط عملگر چگالی

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|)$$

و یک حالت خالص به صورت

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle), \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\theta}|1\rangle).$$

را در نظر بگیرید. توزیع‌های فاز مربوط $\mathcal{P}(\phi)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه کنید.

۱۳- نشان دهید برای یک حالت گرمایی، $\mathcal{P}(\phi) = 1/2\pi$ است.

مراجع

- [1] See, for example, Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*, revised edition (Reading: Addison-Wesley), p. 96.
- [2] See the discussion in Aitchison, I. J. K. (1985). *Contemp. Phys.*, 26, 333.
- [3] Lamb, W. E. Jr., and R. C. Retherford, R. C. (1947). *Phys. Rev.*, 72, 241.
- [4] Bethe, H. A. (1947). *Phys. Rev.*, 72, 339.
- [5] Welton, T. A. (1948). *Phys. Rev.*, 74, 1157.
- [6] Casimir, H. B. G. *Proc. (1948). K. Ned. Akad. Wet.*, 51, 793; *Physica*, 19 (1953), 846.
- [7] Milonni, P. W. and Shih, M.-L. (1992). *Contemp. Phys.*, 33, 313.
- [8] Spamaay, M. J. (1957). *Nature*, 180, 334.
- [9] Dirac, P. A. M. (1927). *Proc. R. Soc. Lond.*, A 114, 243.
- [10] Barnett, S. M. and Pegg, D. T. (1986). *J. Phys. A*, 19, 3849.
- [11] Susskind, L. and Glogower, J. (1964). *Physics*, 1, 49.
- [12] Carruthers, P. and Nieto, M. M. (1968). *Rev. Mod. Phys.*, 40, 411.
- [13] See Agarwal, G. S. Chaturvedi, S. Tara, K. and Srinivasan, V. (1992). *Phys. Rev. A*, 45, 4904.
- [14] Pegg, D. T. and Barnett, S. M. (1988). *Europhys. Lett.*, 6, 483; *Phys. Rev. A*, 39 (1989), 1665; 43 (1991), 2579.
- [15] Shapiro, J. H. and Shepard, S. R. (1991). *Phys. Rev. A*, 43, 3795.
- [16] Helstrom, C. W. (1976). *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press).
- [17] Noh, J. W. Fougères, S. and Mandel, L. (1992). *Phys. Rev. A*, 45, 424; 46 (1992), 2840.

کتاب‌شناسی

اغلب کتاب‌های درسی مکانیک کوانتومی، مبحث نوسانگر هماهنگ با روش عملگری را که به روش جبری یا روش فاکتورگیری موسوم است می‌پوشانند. چند کتاب مفید برای دوره کارشناسی عبارت‌اند از:

- Liboff, R. L. *Introductory Quantum Mechanics*, 4th edition (Reading: Addison-Wesley, 2002).
- Griffiths, D. J. *Introduction to Quantum Mechanics* (Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995).
- Townsends, J. S. *A Modern Approach to Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill, 1992).

کتاب زیر یک کتاب عالی درسی در سطح تحصیلات تکمیلی است:

- Sakurai, J. J. *Modern Quantum Mechanics*, revised edition (Reading: Addison-Wesley, 1994).

نظریه میدان

- Power, E. A. *Introductory Quantum Electrodynamics* (New York: American Elsevier, 1965).
- Harris, E. G. *A Pedestrian Approach to Quantum Field Theory* (New York: Wiley, 1972).
- Ryder, L. H. *Quantum Field Theory*, 2nd edition (Cambridge: Cambridge University Press, 1966).

برای مجموعه گسترده از مراجع درباره اثر کاسیمیر، مقاله زیر را ببینید:

- Lamoreaux, L. H. Resource Letter CF-1: Casimir Force, *Am. J. Phys.*, 1999, 67, 850.

حالت‌های همدوس

در آخر فصل گذشته نشان دادیم که حالت‌های عددی فوتون $n > 0$ در بازه 0 تا 2π یک توزیع فازی یکنواخت دارند. در این صورت، اساساً هیچ فاز خوش تعریفی برای این حالت‌ها وجود ندارد و همان‌طوری که نشان دادیم، مقدار چشمداشتی عملگر میدان برای یک حالت عددی صفر می‌شود. اغلب پیشنهاد می‌شود که (به عنوان مثال، کتاب ساکورایی [۱] را ببینید) حد کلاسیکی میدان کوانتیده حدی است که در آن تعداد فوتون‌ها بسیار زیاد باشد، به طوری که عملگر تعداد یک متغیر پیوسته شود. اما این تمام ماجرا نیست؛ زیرا میانگین میدان، هر مقداری که n داشته باشد، برابر صفر می‌شود $\langle \hat{E}_x | n \rangle = 0$. می‌دانیم که در یک نقطه ثابت در فضا، یک میدان کلاسیکی نسبت به زمان حرکت نوسانی سینوسی دارد. واضح است که این امر برای مقدار چشمداشتی عملگر میدان برای یک حالت تعداد اتفاق نمی‌افتد. در این فصل حالت‌های همدوس [۲] را ارائه می‌دهیم که در حد کلاسیک به رفتار معقول منجر می‌شوند و در واقع همان‌طوری که خواهیم دید، این حالت‌ها «کلاسیکی‌ترین» حالت‌های کوانتومی یک نوسانگر هماهنگ هستند.

۱-۳ ویژه حالت‌های عملگر نابودی و حالت‌های با کمترین عدم قطعیت

برای اینکه برای عملگر میدان الکتریکی یا به طور معادل برای عملگرهای خلق و نابودی، مقدار چشمداشتی غیر صفر داشته باشیم، لازم است برهم‌نهی از حالت‌های عددی را تشکیل دهیم که به اندازه ± 1 با هم اختلاف داشته باشند. به عنوان مثال، این برهم‌نهی می‌تواند شامل حالت‌های $|n\rangle$ و $|n \pm 1\rangle$ باشد.

$$|\psi\rangle = C_n |n\rangle + C_{n+1} |n+1\rangle \quad (1-3)$$

(که در آن $|C_n|^2 + |C_{n+1}|^2 = 1$). به طور کلی، برهم‌نهی تمام حالت‌های تعداد دارای این خاصیت خواهند بود که مقدار چشمداشتی، مثلاً $\hat{a}$ صفر نشود. واضح است که با توجه به معادلات ۱۵-۲ و ۱۶-۲ با

جایگزینی $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ توسط متغیرهای پیوسته، یک میدان کلاسیکی حاصل می‌شود. یک راه منحصربه‌فرد برای اینکه این جایگزینی را انجام دهیم این است که ویژه‌حالت‌های عملگر نابودی را پیدا کنیم. این حالت‌ها که با $|\alpha\rangle$ نشان داده می‌شوند، در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (2-3)$$

که در آن α یک عدد مختلط دلخواه است (توجه کنید که ویژه‌مقدارهای عملگر $\hat{a}$ می‌تواند اعداد مختلط باشد؛ زیرا $\hat{a}$ غیرهرمیتی است). حالت‌های $|\alpha\rangle$ ویژه‌حالت‌های «راست» $\hat{a}$ و $\langle\alpha|$ ویژه‌حالت‌های «چپ» $\hat{a}^\dagger$ با ویژه‌مقدار α^* هستند.

$$\langle\alpha| \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|. \quad (3-3)$$

چون حالت‌های تعداد $|n\rangle$ یک مجموعه کامل تشکیل می‌دهند، حالت $|\alpha\rangle$ را می‌توان برحسب آن‌ها بسط داد.

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (4-3)$$

با اعمال $\hat{a}$ به طرفین این رابطه، معادله ۲-۳ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle. \quad (5-3)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $|n\rangle$ در دو طرف معادله داریم:

$$C_n \sqrt{n} = \alpha C_{n-1} \quad (6-3)$$

یا

$$C_n = \frac{2}{\sqrt{n}} C_{n-1} = \frac{\alpha^2}{\sqrt{n(n-1)}} C_{n-2} = \dots = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0 \quad (7-3)$$

و بنابراین

$$|\alpha\rangle = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (8-3)$$

از شرط بهنجارش مقدار C_0 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\alpha\rangle &= 1 = |C_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{\alpha^{*n} \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \langle n|n'\rangle \\ &= |C_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |C_0|^2 e^{|\alpha|^2} \end{aligned} \quad (9-3)$$

که از آن $C_0 = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right)$ نتیجه می‌شود. بدین ترتیب، حالت‌های همدوس به‌نحی که عبارت‌اند از

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (10-3)$$

اکنون مقدار چشمداشتی عملگر میدان الکتریکی

$$\hat{E}_x(\mathbf{r}, t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]. \quad (11-3)$$

را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\langle\alpha| \hat{E}_x(\mathbf{r}, t) |\alpha\rangle = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\alpha e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \alpha^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}]. \quad (12-3)$$

اگر α را در مختصات قطبی $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ بنویسیم، داریم:

$$\langle\alpha| \hat{E}_x(\mathbf{r}, t) |\alpha\rangle = 2|\alpha| \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \theta) \quad (13-3)$$

که شبیه یک میدان کلاسیکی است. به علاوه، می‌توان نشان داد که

$$\langle\alpha| \hat{E}_x^2(\mathbf{r}, t) |\alpha\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} [1 + 4|\alpha|^2 \sin^2(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \theta)]. \quad (14-3)$$

بنابراین افت‌وخیزهای $\hat{E}_x(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta E_x \equiv \langle(\Delta \hat{E}_x)^2\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (15-3)$$

با افت‌وخیزهای حالت خلأ برابر است. یک حالت همدوس تقریباً یک حالت کلاسیک مانند است؛ زیرا نه تنها شکل صحیح برای مقادیر چشمداشتی میدان می‌دهد، بلکه تنها نوفه‌های خلأ را شامل می‌شود. درواقع با استفاده از عملگرهای تربیع ۵۲-۲ و ۵۳-۲ به سادگی می‌توان نشان داد برای حالت‌های همدوس داریم:

$$\langle(\Delta \hat{X}_1)^2\rangle_\alpha = \frac{1}{4} = \langle(\Delta \hat{X}_2)^2\rangle_\alpha \quad (16-3)$$

که دوباره نشان می‌دهد این حالت‌ها دارای افت‌وخیزهای خلأ هستند. بنابراین نسبت به عملگرهای تربیع میدان، حالت‌های همدوس هم حاصل ضرب عدم قطعیت‌ها را مینیمم (و درواقع نامساوی را به تساوی تبدیل می‌کنند) و هم عدم قطعیت‌ها را در هر عملگر تربیعی با عدم قطعیت حالت خلأ برابر می‌کنند. درواقع، این خاصیت را می‌توان به‌عنوان یک تعریف دیگر از حالت‌های همدوس در نظر گرفت. سه عملگر هرمیتی $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را که در رابطه زیر صدق می‌کنند، در نظر بگیرید:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \quad (۱۷-۳)$$

رابطه عدم قطعیت برای این عملگرها به صورت زیر است:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle(\hat{C})^2\rangle. \quad (۱۸-۳)$$

حالت‌هایی که این نامساوی را به تساوی تبدیل می‌کنند، حالت‌هایی هستند که در معادله ویژه‌مقداری زیر صدق می‌کنند [۳]:

$$\left[\hat{A} + \frac{i\langle\hat{C}\rangle}{2\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle}\hat{B}\right]|\psi\rangle = \left[\langle\hat{A}\rangle + \frac{i\langle\hat{C}\rangle}{2\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle}\langle\hat{B}\rangle\right]|\psi\rangle. \quad (۱۹-۳)$$

حالت‌های $|\psi\rangle$ که در رابطه ۱۹-۳ صدق می‌کنند، گاهی حالت‌های «هوشمند» نامیده می‌شوند [۴]. برای حالتی که

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = \langle(\Delta\hat{B})^2\rangle = \frac{1}{4}\langle\hat{C}\rangle, \quad (۲۰-۳)$$

معادله ویژه‌مقداری به صورت زیر درمی‌آید:

$$[\hat{A} + i\hat{B}]|\psi\rangle = [\langle\hat{A}\rangle + i\langle\hat{B}\rangle]|\psi\rangle. \quad (۲۱-۳)$$

برای $\hat{B} = \hat{X}_2$ و $\hat{A} = \hat{X}_1$ این رابطه هم‌ارز معادله ۲-۳ با $\alpha = \langle\hat{X}_1\rangle + i\langle\hat{X}_2\rangle$ است. مفهوم فیزیکی پارامتر مختلط α چیست؟ از معادله ۱۳-۳ مشخص می‌شود که $|\alpha|$ به دامنه میدان مربوط است. مقدار چشمداشتی عملگر تعداد فوتون $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ برابر است با

$$\bar{n} = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \quad (۲۲-۳)$$

و بنابراین $|\alpha|^2$ همان میانگین تعداد فوتون‌های میدان است. برای محاسبه افت و خیزهای تعداد فوتون لازم است کمیت زیر را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\hat{n}^2|\alpha\rangle &= \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle \\ &= \langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a})|\alpha\rangle \\ &= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n} \end{aligned} \quad (۲۳-۳)$$

و بنابراین

$$\Delta n = \sqrt{\langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2} = \bar{n}^{1/2} \quad (۲۴-۳)$$

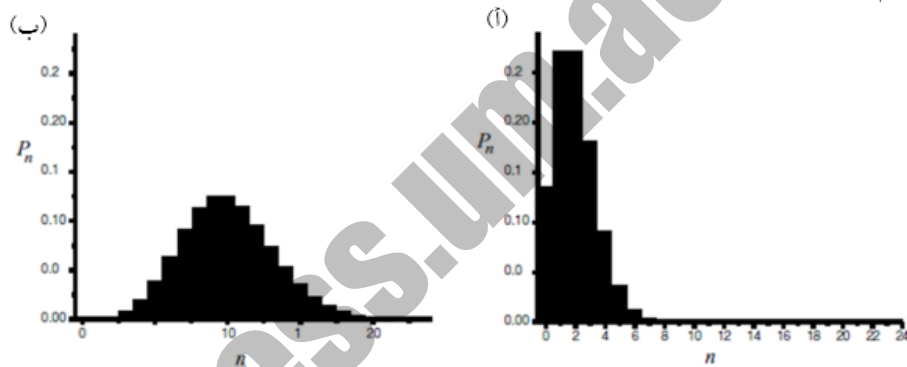
که مشخصه یک فرایند پواسون است. در واقع، در اندازه‌گیری تعداد فوتون‌ها در میدان، احتمال آشکارسازی n فوتون برابر است با

$$\begin{aligned} P_n &= |\langle n | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \\ &= e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!} \end{aligned} \quad (25-3)$$

که یک توزیع پواسون با مقدار متوسط $\bar{n}$ است. توجه کنید که عدم قطعیت نسبی در تعداد فوتون برابر است با

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}} \quad (26-3)$$

که با افزایش $\bar{n}$ کاهش می‌یابد. در شکل ۱-۳ چند مثال از توزیع احتمال توزیع فوتون برای n های مختلف رسم کرده‌ایم.



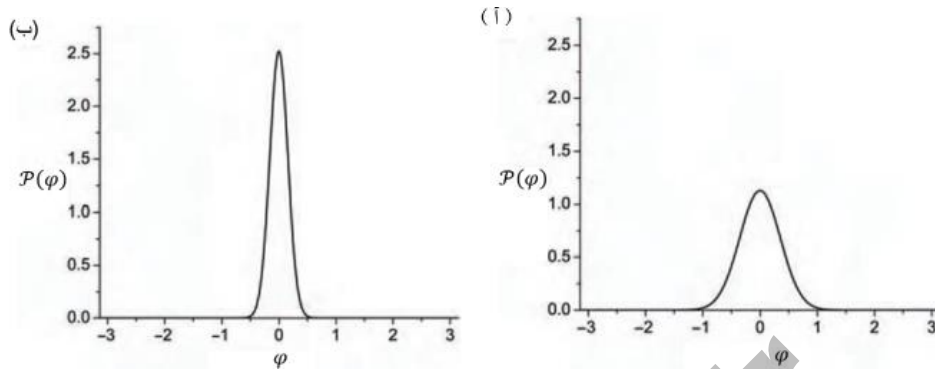
شکل ۱-۳ توزیع احتمال تعداد فوتونی برای حالت‌های همدوس (أ) $\bar{n} = 2$ و (ب) $\bar{n} = 10$

حال به توزیع فاز حالت‌های همدوس می‌پردازیم. برای یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ با $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ ، توزیع فاز مربوط عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} |\langle \varphi | \alpha \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{in(\varphi-\theta)} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{n!}} \right|^2. \end{aligned} \quad (27-3)$$

برای $|\alpha|^2$ های بزرگ، توزیع پواسون را می‌توان با یک توزیع گاوسی تقریب زد [۵].

$$e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \approx (2\pi |\alpha|^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(n - |\alpha|^2)^2}{2 |\alpha|^2} \right] \quad (28-3)$$



شکل ۲-۳ توزیع‌های فاز برای حالت‌های همدوس با $\theta = 0$ برای (ا) $\bar{n} = 2$ و (ب) $\bar{n} = 10$

بنابراین جمع‌بندی در ۲۷-۳ را می‌توان محاسبه کرد و برای $\mathcal{P}(\varphi)$ یک عبارت تقریبی زیر را به دست آورد:

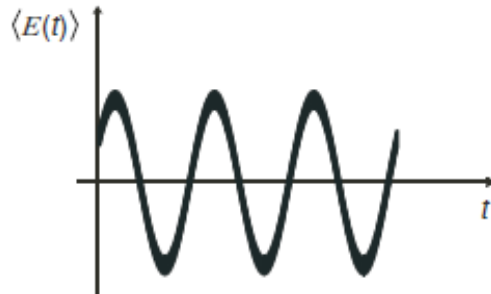
$$e^{-|\alpha|^2/2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} \approx (2\pi |\alpha|^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(n - |\alpha|^2)^2}{2|\alpha|^2} \right] \quad (29-3)$$

این یک تابع گاوسی است که قله آن در $\varphi = \theta$ قرار دارد. به علاوه، همان‌طوری که شکل ۲-۳ نشان می‌دهد، با افزایش $\bar{n} = |\alpha|^2$ قله باریک‌تر می‌شود.

حالت‌های همدوس $|\alpha\rangle$ حالت‌های کوانتومی هستند که به حالت‌های کلاسیکی بسیار نزدیک هستند؛ زیرا (i) مقدار چشم‌داشتی میدان الکتریکی به همان شکل عبارت کلاسیکی است. (ii) افت‌وخیزها در متغیرهای میدان الکتریکی با افت‌وخیزهای خلأ یکسان‌اند. (iii) افت‌وخیزها در عدم قطعیت کسری برای تعداد فوتون‌ها با افزایش میانگین تعداد فوتون کاهش می‌یابد. (iv) این حالت‌ها با افزایش میانگین عدد فوتونی از نظر فازی جای‌گرفته‌اند. با وجود این خواص نزدیک به کلاسیک، بازهم حالت‌های کوانتومی هستند. در شکل ۳-۳ که مقدار چشم‌داشتی عملگر میدان و افت‌وخیزهای آن را نسبت به زمان رسم کرده‌ایم، این مطلب نشان داده شده است. این میدان شکل کلاسیکی یک موج سینوسی را دارد، ولی افت‌وخیزهای کوانتومی بر آن افزوده شده است که نشان می‌دهد دارای جنبه‌های کوانتومی است. در واقع تمام حالت‌های نور باید بعضی جنبه‌های کوانتومی را داشته باشند؛ زیرا نظریه کوانتومی نور بنیادی‌تر از نظریه کلاسیکی است. لیکن مشاهده جنبه‌های کوانتومی نور عموماً مشکل است. در فصل ۷ به بعضی از این جنبه‌ها خواهیم پرداخت.

۲-۳ حالت‌های خلأ جابه‌جاشده

برای تعریف حالت‌های همدوس دو راه مورد بحث قرار داده ایم: یکی به عنوان ویژه‌حالت‌های راست عملگر نابودی و دیگری به عنوان حالت‌هایی که رابطه عدم قطعیت را برای دو تربیع متعامد میدان با عدم قطعیت‌های مساوی برای هر تربیع، مینیمم می‌کنند (که با عدم قطعیت‌های مربوط به حالت خلأ یکسان است).



شکل ۳-۳ مقدار چشمداشتی میدان الکتریکی یک حالت همدوس به صورت تابعی از زمان برای یک مکان ثابت که افت‌وخیزهای کوانتومی را نشان می‌دهد. افت‌وخیزهای میدان در تمام زمان‌ها یکسان است، به طوری که میدان تا جایی که برای یک حالت کوانتومی امکان‌پذیر است، به میدان کلاسیکی نزدیک است.

درواقع یک تعریف سومی نیز وجود دارد که به حالت‌های هم‌ارز منجر می‌شود. این تعریف به جابه‌جایی خلأ مربوط می‌شود. همان‌طور که خواهیم دید، این تعریف ارتباط نزدیکی به مکانیسمی دارد که در آن حالت‌های همدوس از جریان‌های کلاسیکی تولید می‌شوند.

عملگر جابه‌جایی $\hat{D}(\alpha)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (۳-۳۰)$$

و حالت‌های همدوس به صورت زیر داده می‌شوند:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle. \quad (۳-۳۱)$$

برای نشان دادن این مطلب، اتحاد زیر را در نظر بگیرید (قضیه تفکیک^۱):

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}+\hat{B}} &= e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \\ &= e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \end{aligned} \quad (۳-۳۲)$$

که برقرار است اگر $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ باشد و علاوه بر این، داشته باشیم:

$$[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \quad (۳-۳۳)$$

با $\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger$ و $\hat{B} = -\alpha^* \hat{a}$ داریم $[\hat{A}, \hat{B}] = |\alpha|^2$ و معادله ۳-۳۳ برقرار است. بنابراین

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} \quad (۳-۳۴)$$

با بسط $\exp(-\alpha^* \hat{a})$ داریم:

$$e^{-\alpha^* \hat{a}} |0\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^* \hat{a})^l}{l!} |0\rangle = |0\rangle \quad (۳-۳۵)$$

زیرا به جز در مورد $l=0$ $\hat{a}^l |0\rangle = 0$ است، اما

1. disentangling

$$\begin{aligned} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \end{aligned} \quad (36-3)$$

که از $(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$ استفاده کرده‌ایم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \hat{D}(\alpha) |0\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (37-3)$$

که با تعاریف قبلی ما مطابقت دارد.

عملگر جابه‌جایی $\hat{D}$ یک عملگر یکانی است. می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \hat{D}^\dagger(\alpha) &= \hat{D}(-\alpha) \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha \hat{a}^\dagger} e^{\alpha^* \hat{a}}. \end{aligned} \quad (38-3)$$

یک نمایش دیگر $\hat{D}(\alpha)$ عبارت است از

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger}. \quad (39-3)$$

که نتیجه می‌شود:

$$\hat{D}(\alpha) \hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{D}(\alpha) = 1 \quad (40-3)$$

که شرط یکانی بودن است.

عملگر جابه‌جایی در رابطه نیمه گروه صدق می‌کند: حاصل ضرب دو عملگر جابه‌جایی مثلاً $\hat{D}(\alpha)$ و $\hat{D}(\beta)$ تا تقریب یک ضرب فاز، عملگر جابه‌جایی $\hat{D}(\alpha + \beta)$ است. برای نشان دادن این مطلب، فرض کنید $\hat{A} = \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}$ و $\hat{B} = \beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}$ باشد، در نتیجه

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \alpha \beta^* - \alpha^* \beta = 2i \text{Im}(\alpha \beta^*). \quad (41-3)$$

سپس با استفاده از معادله ۳-۳۲ داریم:

$$\begin{aligned} \hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) &= e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \\ &= \exp[i \text{Im}(\alpha \beta^*)] \\ &\quad \times \exp[(\alpha + \beta) \hat{a}^\dagger - (\alpha^* + \beta^*) \hat{a}] \\ &= \exp[i \text{Im}(\alpha \beta^*)] \hat{D}(\alpha + \beta). \end{aligned} \quad (42-3)$$

بنابراین وقتی عملگر بالا به خلأ اعمال شود، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)|\cdot\rangle &= \hat{D}(\alpha)|\beta\rangle \\ &= \exp[i\text{Im}(\alpha\beta^*)]|\alpha+\beta\rangle\end{aligned}\quad (43-3)$$

ضریب فاز $\exp[i\text{Im}(\alpha\beta^*)]$ یک ضریب فاز کلی است و بنابراین از نظر فیزیکی اهمیتی ندارد.

۳-۳ بسته‌های موج و تحوّل زمانی

با استفاده از معادلات ۱۳-۲ و ۱۴-۲ عملگر «مکان» را به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}}\hat{X}_1, \quad (44-3)$$

که در آن $\hat{X}_1$ عملگر تربیع معادله ۵۲-۲ است. ویژه‌حالت‌های عملگر $\hat{q}$ را با $|q\rangle$ نمایش می‌دهیم، $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$. توابع موج مربوط برای حالت‌های تعداد عبارت‌اند از [۶]

$$\psi_n(q) = \langle q | n \rangle = (2^n n!)^{-1/2} \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp(-\xi^2/2) H_n(\xi) \quad (45-3)$$

که در آن $\xi = q\sqrt{\omega/\hbar}$ و $H_n(\xi)$ چندجمله‌ای‌های هرمیت هستند. تابع موج متناظر با حالت همدوس عبارت است از

$$\psi_\alpha(q) \equiv \langle q | \alpha \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha/\sqrt{2})^n}{n!} H_n(\xi). \quad (46-3)$$

از تابع مولد برای چندجمله‌ای‌های هرمیت می‌توان عبارت بسته‌ای را برای تابع موج حالت همدوس به‌دست آورد.

$$\psi_\alpha(q) = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-|\alpha|^2/2} e^{\xi^2/2} e^{-(\xi - \alpha/\sqrt{2})^2}, \quad (47-3)$$

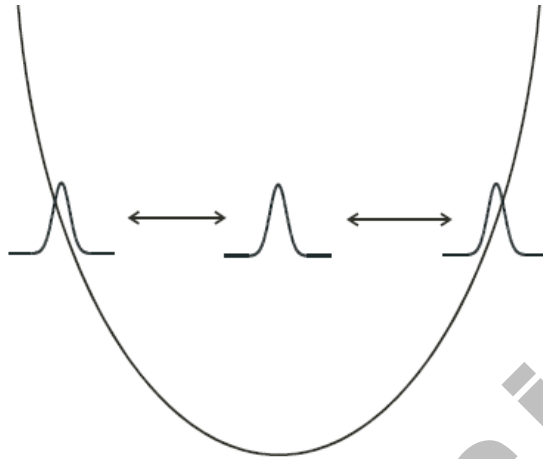
که یک تابع موج گاوسی است. البته توزیع احتمال روی متغیّر «مکان» q

$$P(q) = |\psi_\alpha(q)|^2, \quad (48-3)$$

نیز یک تابع گاوسی است.

اکنون تحوّل زمانی یک حالت همدوس را برای یک میدان آزاد تک‌مدی با هامیلتونی معادله ۱۸-۲ در نظر می‌گیریم. تحوّل زمانی حالت همدوس به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}|\alpha, t\rangle &\equiv \exp(-i\hat{H}t/\hbar)|\alpha\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-i\omega t \hat{n}} |\alpha\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2} |\alpha e^{-i\omega t}\rangle,\end{aligned}\quad (49-3)$$



شکل ۳-۴ یک تابع موج حالت همدوس در داخل پتانسیل نوسانگر هماهنگ بین نقاط بازگشت کلاسیکی بدون پخش حرکت می‌کند.

و بنابراین حالت همدوس تحت تحول میدان آزاد یک حالت همدوس باقی می‌ماند. تابع موج تحول یافته متناظر با آن عبارت است از

$$\psi_{\alpha}(q, t) = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-|\alpha|^2/2} e^{i^2/2} e^{-\left(\xi - \alpha e^{-i\omega t} / \sqrt{2}\right)^2}, \quad (3-50)$$

که یک تابع گاوسی است که شکل آن با زمان تغییر نمی‌کند و مرکز آن از حرکت یک ذره نقطه‌ای کلاسیکی در پتانسیل نوسانگر هماهنگ پیروی می‌کند (اثبات این را به عنوان تمرین، (مسئله ۲)، در انتهای فصل برعهده دانشجو گذاشته‌ایم). در شکل ۳-۴ حرکت یک بسته موج حالت همدوس در پتانسیل نوسانگر هماهنگ را نشان داده‌ایم. همان‌طوری که در فصل ۱۰ خواهیم دید، حالت‌های حرکتی اتم‌ها یا یون‌هایی که با سرد کردن لیزری به تله افتاده‌اند را می‌توان طوری طراحی کرد که دارای این ویژگی مینیمم عدم قطعیت باشند.

در نهایت، پایداری بسته موج ناشی از این واقعیت است که برای نوسانگر هماهنگ ترازهای انرژی به فواصل عدد صحیح از هم قرار دارند. برای سیستم‌های کوانتومی که فاصله ترازهای انرژی آن‌ها عدد صحیح نیست، نظیر مسئله کولن، فرمول‌بندی حالت‌های همدوس قدری پیچیده و مشکل است و هیچ حالتی واقعاً در طول زمان پایدار نمی‌ماند. بررسی چنین حالت‌هایی خارج از حوصله این کتاب است و خواننده می‌تواند به مرجع [۷] مراجعه کند.

۳-۴ تولید حالت‌های همدوس

یک حالت همدوس را می‌توان توسط یک جریان نوسانی کلاسیک تولید کرد. فرض کنید $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ پتانسیل برداری الکترومغناطیسی کوانتومی برای یک میدان برهم کنش کننده با جریان کلاسیکی که توسط چگالی

جریان $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ توصیف می‌شود، باشد. برطبق نظریه الکترومغناطیس کلاسیک انرژی، برهم‌کنش $\hat{V}(t)$ به صورت زیر است:

$$\hat{V}(t) = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t). \quad (51-3)$$

برای یک میدان تک‌مدی، $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ در تصویر برهم‌کنش به صورت زیر داده می‌شود:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e} \left(\frac{\hbar}{2\omega_0 \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \quad (52-3)$$

که در آن $\hat{a}$ به معنی $\hat{a}(0)$ است. با قرار دادن در معادله ۵۱-۳ داریم:

$$\hat{V}(t) = - \left(\frac{\hbar}{2\omega \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} [\hat{a} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{k}, t) e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}^*(\mathbf{k}, t) e^{i\omega t}] \quad (53-3)$$

که در آن

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, t) = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (54-3)$$

چون $\hat{V}(t)$ به زمان بستگی دارد، عملگر تحول زمانی وابسته به آن، یک حاصل ضرب مرتب‌شده زمانی^۱ است [۸]. اما برای بازه زمانی بی‌نهایت کوچک از t تا $t + \delta t$ عملگر تحول به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t + \delta t, t) &\cong \exp[-i \hat{V}(t) \delta t / \hbar] \\ &= \exp\{-\delta t [u(t) \hat{a} - u^*(t) \hat{a}^\dagger]\} \\ &= \hat{D}[u(t) \delta t], \end{aligned} \quad (55-3)$$

که در آن

$$u(t) = - \left(\frac{\hbar}{2\omega \varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{k}, t) e^{-i\omega t}. \quad (56-3)$$

برای یک بازه زمانی محدود، مثلاً از ۰ تا T ، عملگر تحول را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{U}(T, 0) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \hat{T} \prod_{l=0}^{T/\delta t} \hat{D}[u(t_l) \delta t] \quad (57-3)$$

که در آن $\hat{T}$ عملگر مرتب‌کننده زمانی^۲ و $t_l = l\delta t$ است. معادله ۵۷-۳ با استفاده از معادله ۴۲-۳ به صورت زیر درمی‌آید:

1. Time-ordered

2. Time ordering

$$\begin{aligned}\hat{U}(T, 0) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} e^{i\Phi} \hat{D} \left[\sum_{l=0}^{T/\delta t} u(t_l) \delta t \right] \\ &= e^{i\Phi} \hat{D} [\alpha(T)],\end{aligned}\quad (58-3)$$

که در آن

$$\alpha(T) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{T/\delta t} u(t_l) \delta t = \int_0^T u(t') dt' \quad (59-3)$$

و Φ فاز کلی است. اگر حالت اولیه حالت خلأ باشد، حالت در زمان T ، به‌جز در یک ضریب فاز کلی، حالت همدوس $|\alpha(T)\rangle$ خواهد بود که $\alpha(T)$ توسط معادله ۵۹-۳ داده می‌شود.

۳-۵ خواص دیگر حالت‌های همدوس

حالت‌های تعداد، راست‌هنگار، $\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$ و کامل، $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{I}$ هستند و بنابراین می‌توان از آن‌ها به‌عنوان یک پایه برای بسط یک بردار حالت دلخواه میدان استفاده کرد. به‌عنوان مثال، برای حالت $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \quad (60-3)$$

که در آن $C_n = \langle n|\psi\rangle$ که حالت‌های همدوس یک مثال خاص از آن هستند. اما حالت‌های همدوس خودشان متعامد نیستند: برای $|\alpha\rangle$ و $|\beta\rangle$ داریم:

$$\begin{aligned}\langle \beta | \alpha \rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n} \alpha^m}{\sqrt{n!m!}} \langle n | m \rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^* \alpha)^n}{n!} \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \beta^* \alpha} \\ &= \exp \left[\frac{1}{2} (\beta^* \alpha - \beta \alpha^*) \right] \exp \left[-\frac{1}{2} |\beta - \alpha|^2 \right].\end{aligned}\quad (61-3)$$

جمله اول یک ضریب فاز است. بنابراین

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\beta - \alpha|^2} \neq 0. \quad (62-3)$$

که نشان می‌دهد حالت‌های همدوس متعامد نیستند. البته اگر $|\beta - \alpha|^2$ خیلی بزرگ باشد، تقریباً متعامد هستند. رابطه کامل بودن برای حالت‌های همدوس به‌صورت یک انتگرال روی صفحه مختلط α برطبق رابطه زیر داده می‌شود:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = 1 \quad (۶۳-۳)$$

که در آن $d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha)d\text{Im}(\alpha)$ برای اثبات این رابطه داریم:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \int e^{-|\alpha|^2} \sum_n \sum_m \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle \langle m| d^2\alpha, \quad (۶۴-۳)$$

با قرار دادن $d^2\alpha = r dr d\theta$, $\alpha = re^{i\theta}$ انتگرال را به مختصات قطبی تبدیل می‌کنیم. بنابراین

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \sum_n \sum_m \frac{|n\rangle \langle m|}{\sqrt{n!m!}} \int_0^\infty dr e^{-r^2} r^{n+m+1} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}. \quad (۶۵-۳)$$

اما

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi \delta_{nm}, \quad (۶۶-۳)$$

و با یک تغییر متغیر دیگر $2r dr = dy$, $r^2 = y$ داریم:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \pi \sum_{n=0}^\infty \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty dy e^{-y} y^n. \quad (۶۷-۳)$$

چون

$$\int_0^\infty dy e^{-y} y^n = n! \quad (۶۸-۳)$$

داریم:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = \pi \sum_{n=0}^\infty |n\rangle \langle n| = \pi, \quad (۶۹-۳)$$

که اثبات کامل می‌شود.

هر بردار حالت $|\psi\rangle$ در فضای هیلبرت میدان تک‌مدی کوانتیده را می‌توان به صورت زیر برحسب حالت‌های همدوس بسط داد:

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \psi\rangle. \quad (۷۰-۳)$$

اما اگر فرض کنید $|\psi\rangle$ خود یک حالت همدوس $|\beta\rangle$ باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}
 |\beta\rangle &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle\alpha|\beta\rangle \\
 &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \exp\left[-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta\right].
 \end{aligned}
 \quad (۷۱-۳)$$

که نشان می‌دهد حالت‌های همدوس مستقل خطی نیستند. گفته می‌شود حالت‌های همدوس بیش‌کامل^۱ هستند، یعنی تعدادشان بیش از حالت‌هایی است که بتوان یک حالت را برحسب آن‌ها بسط داد. توجه کنید که در معادله ۷۱-۳ عبارت $\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^*\beta\right)$ نقش تابع دلتای دیراک را ایفا می‌کند که اغلب به آن کرنل باز تولید^۲ می‌گویند. برای حالت دلخواه $|\psi\rangle$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 \langle\alpha|\psi\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \\
 &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \psi(\alpha^*)
 \end{aligned}
 \quad (۷۲-۳)$$

که در آن $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$ و

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \quad (۷۳-۳)$$

که در تمام صفحه مختلط z مطلقاً همگراست، یعنی $\psi(z)$ یک تابع نام است؛ زیرا $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_n |\langle n|\psi\rangle|^2 = 1$. توابع $\psi(z)$ توابع تمام فضای سگال-بارگمن [۹] را تشکیل می‌دهند. اگر $|\psi\rangle$ یک حالت تعداد باشد، $\langle\psi| = |n\rangle$ ، در این صورت، $\psi_n = z^n/\sqrt{n!}$. این توابع یک پایه راست‌هنجار در فضای سگال-بارگمن تشکیل می‌دهند.

فرض کنید $\hat{F}$ یک عملگر باشد که تابع $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ است، $\hat{F} = F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ ، اگر $\hat{F}$ را برحسب حالت‌های تعداد بنویسیم، داریم:

$$\begin{aligned}
 \hat{F} &= \sum_n \sum_m |m\rangle \langle m|\hat{F}|n\rangle \langle n| \\
 &= \sum_n \sum_m |m\rangle \hat{F}_{mn} \langle n|
 \end{aligned}
 \quad (۷۴-۳)$$

که در آن F_{mn} عناصر ماتریسی $\langle m|\hat{F}|n\rangle$ است. برحسب حالت‌های همدوس داریم:

$$\hat{F} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \int d^2\alpha |\beta\rangle \langle\beta|\hat{F}|\alpha\rangle \langle\alpha|. \quad (۷۵-۳)$$

1. Overcomplete

2. Reproducing kernel

اما

$$\begin{aligned}\langle \beta | \hat{F} | \alpha \rangle &= \sum_n \sum_m F_{mn} \langle \beta | m \rangle \langle n | \alpha \rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} (|\beta|^2 + |\alpha|^2) \right] F(\beta^*, \alpha),\end{aligned}\quad (۷۶-۳)$$

که در آن

$$F(\beta^*, \alpha) = \sum_m \sum_n F_{mn} \frac{(\beta^*)^m (\alpha)^n}{\sqrt{m!n!}}. \quad (۷۷-۳)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\hat{F} &= \frac{1}{\pi^2} \int d^2\beta \int d^2\alpha \exp \left[-\frac{1}{2} (|\beta|^2 + |\alpha|^2) \right] \\ &\times F(\beta^*, \alpha) |\beta\rangle \langle \alpha|.\end{aligned}\quad (۷۸-۳)$$

حال فرض کنید $\hat{F}$ یک عملگر هرمیتی با ویژه‌کتهای $|\lambda\rangle$ باشد، به‌طوری‌که

$$\hat{F} = \sum_{\lambda} \lambda |\lambda\rangle \langle \lambda|. \quad (۷۹-۳)$$

دراین صورت

$$\langle m | \hat{F} | n \rangle = \sum_{\lambda} \lambda \langle m | \lambda \rangle \langle \lambda | n \rangle. \quad (۸۰-۳)$$

اما

$$\begin{aligned}|\langle m | \hat{F} | n \rangle| &\leq \sum_{\lambda} \lambda |\langle m | \lambda \rangle \langle \lambda | n \rangle| \\ &\leq \sum_{\lambda} \lambda = \text{Tr } \hat{F}\end{aligned}\quad (۸۱-۳)$$

که نشان می‌دهد $|\langle m | \hat{F} | n \rangle|$ دارای یک حد بالاست. در چنین حالتی نتیجه می‌شود که $F(\beta^*, \alpha)$ یک تابع تام برحسب β^* و α است.

عناصر قطری یک عملگر $\hat{F}$ در پایه حالت‌های همدوس به‌طور کامل آن عملگر را مشخص می‌کنند. از معادلات ۷۶-۳ و ۷۷-۳ داریم:

$$\langle \alpha | \hat{F} | \alpha \rangle e^{\alpha^* \alpha} = \sum_n \sum_m \frac{\alpha^{*m} \alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m | \hat{F} | n \rangle. \quad (۸۲-۳)$$

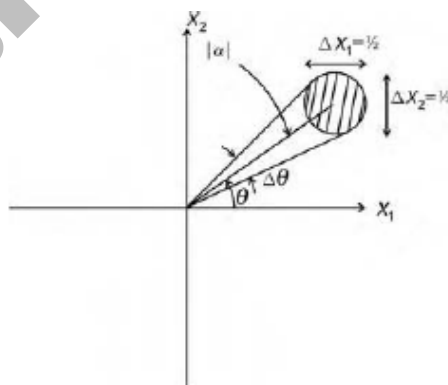
با در نظر گرفتن α و α^* به عنوان متغیرهای مستقل داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{m!n!}} \left[\frac{\partial^{n+m} (\langle \alpha | \hat{F} | \alpha \rangle e^{\alpha^* \alpha})}{\partial \alpha^{*m} \partial \alpha^n} \right] \bigg|_{\alpha^*=0, \alpha=0} = \langle m | \hat{F} | n \rangle. \quad (۸۳-۳)$$

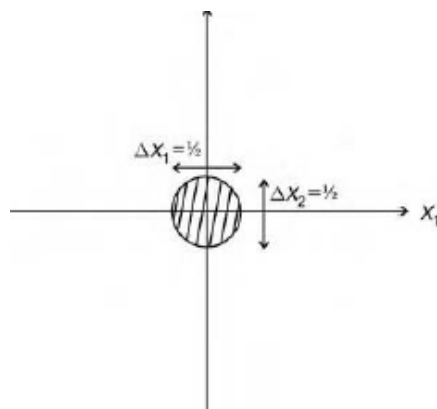
بنابراین از عناصر «قطری» ماتریس $\hat{F}$ در پایه حالت‌های همدوس می‌توان تمام عناصر عملگر در پایه تعداد را به دست آورد.

۳-۶ تصویر فضای فازی حالت‌های همدوس

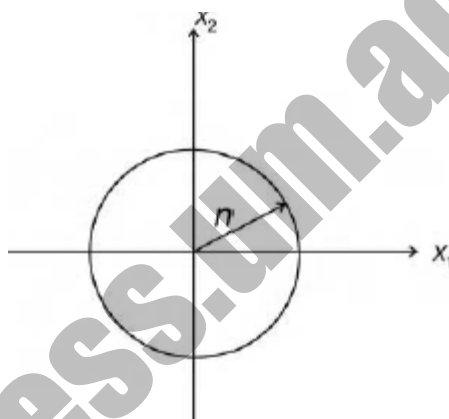
می‌دانیم که مفهوم فضای فاز در مکانیک کوانتومی مشکل آفرین است، به این دلیل که متغیرهای کانونیک $\hat{x}$ و $\hat{p}$ ناسازگار هستند، یعنی جابه‌جاپذیر نیستند. بنابراین برخلاف آنچه در مکانیک کلاسیک حالت داریم، حالت یک سیستم در فضای فاز به صورت یک نقطه جایگزیده نیست. با وجود این، نشان دادیم که حالت‌های همدوس رابطه عدم قطعیت برای دو عملگر تربیع متعامد را مینیمم می‌کنند و همچنین عدم قطعیت‌های دو تربیع با هم برابرند. یادآور می‌شویم که $\hat{X}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/2$ و $\hat{X}_2 = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/2i$. این عملگرها به ترتیب عملگرهای بدون بعد شده مکان و تکانه هستند. مقادیر چشمداشتی آن‌ها نسبت به یک حالت همدوس عبارت است از: $\langle \hat{X}_1 \rangle_\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^*) = \text{Re} \alpha$ و $\langle \hat{X}_2 \rangle_\alpha = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^*) = \text{Im} \alpha$. بنابراین صفحه مختلط α نقش فضای فاز را ایفا می‌کند که تا تقریب یک ضریب مقیاس، قسمت‌های حقیقی و موهومی α به ترتیب متغیرهای مکان و تکانه هستند. یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ با $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ را می‌توان مانند شکل ۳-۵ به صورت تصویری نشان داد که در آن دایره هاشورزده معروف «مساحت عدم قطعیت» حالت همدوس است و افت و خیزها در تمام جهات فضای فاز یکسان‌اند. مرکز دایره در فاصله $|\alpha| = \langle \hat{n} \rangle^{1/2}$ از مبدأ و تحت زاویه θ در بالای محور مکان قرار دارد. به علاوه، $\Delta\theta$ به طور کیفی نشان‌دهنده عدم قطعیت فاز حالت همدوس و مشخص است که با افزایش $|\alpha|$ ، $\Delta\theta$ کوچک می‌شود.



شکل ۳-۵ نمایش فضای فازی یک حالت همدوس با دامنه $|\alpha|$ و زاویه فاز θ . توجه کنید که دایره خطا برای تمام حالت‌های همدوس یکسان است. با افزایش $|\alpha|$ عدم قطعیت فاز $\Delta\theta$ ، همان‌طوری که در «حد کلاسیک» انتظار می‌رود، کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۶ نمایش فضای فازی حالت خلأ کوانتومی



شکل ۳-۷ نمایش فضای فازی حالت تعداد n ; عدم قطعیت در تعداد فوتون برابر $\Delta n = 0$ است، حال آنکه فاز به‌طور کامل تصادفی است.

افت‌وخیزها در X_1 و X_2 مستقل از α هستند و با افت‌وخیزهای خلأ برابرند. نمایش فضای فاز حالت خلأ، $|\alpha| = 0$ ، در شکل ۳-۶ نشان داده شده است که در آن آشکار است عدم قطعیت در فاز بزرگ‌ترین مقدار ممکن را دارد، یعنی $\Delta\theta = 2\pi$.

یک حالت تعداد n را می‌توان به‌صورت یک دایره به شعاع n در فضای فاز نمایش داد. همان‌طوری که در شکل ۳-۷ نشان داده شده است، عدم قطعیت در n برابر با صفر و عدم قطعیت در فاز برابر $\pi/2$ است. باید توجه داشت که این تصاویر هرچند به‌صورت کیفی‌اند، ولی به‌عنوان یک راه ترسیمی برای تجسم توزیع نوفه در حالت‌های مختلف کوانتومی میدان مفید هستند. از آنجا که اغلب حالت‌های کوانتومی مشابه کلاسیکی ندارند، تصاویر فضای فازی مربوط را نباید خیلی واقعی در نظر گرفت. لیکن این نمایش‌ها وقتی به ماهیت حالت‌های فشرده نور در فصل ۷ پردازیم، مفید خواهند بود.

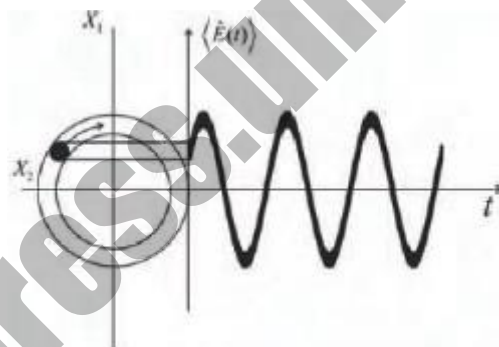
بالاخره در این بخش به یک کاربرد دیگر از نمودار فضای فاز می‌پردازیم و آن نمایش تحول زمانی حالت‌های کوانتومی میدان غیربرهم‌کنشگر است. دیدیم که برای یک میدان غیربرهم‌کنشگر، یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ به حالت همدوس $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$ تحول پیدا می‌کند. این را می‌توان به صورت یک دَوَران ساعت‌گرد دایره‌خطا در فضای فاز در نظر گرفت $\langle \alpha e^{-i\omega t} | \hat{X}_2 | \alpha e^{-i\omega t} \rangle = \langle \alpha e^{-i\omega t} | \hat{X}_1 | \alpha e^{-i\omega t} \rangle = \alpha \cos \omega t$ و $-\alpha \sin \omega t$ ، با فرض حقیقی بودن α ؛ چون در تصویر شرو دینگر عملگر میدان الکتریکی با استفاده از معادلات ۱۵-۲ و ۵۲-۲ به صورت زیر است:

$$\hat{E}_x = 2\mathcal{E}_0 \sin(kz) \hat{X}_1, \quad (۸۴-۳)$$

مقدار چشمداشتی برای حالت همدوس $|\alpha e^{-i\omega t}\rangle$ برابر است با

$$\langle \alpha e^{-i\omega t} | \hat{E}_x | \alpha e^{-i\omega t} \rangle = 2\mathcal{E}_0 \sin(kz) \alpha \cos \omega t. \quad (۸۵-۳)$$

بنابراین به جز در یک ضریب مقیاس $2\mathcal{E}_0 \sin(kz)$ ، تحول زمانی میدان الکتریکی و افت‌وخیزهای آن مطابق شکل ۸-۳ توسط تصویر محور $\langle \hat{X}_1 \rangle$ به صورت تابعی از زمان داده می‌شود.



شکل ۸-۳ دایره خطای یک حالت همدوس (دایره پررنگ کوچک) که حول مبدأ فضای فاز با فرکانس زاویه‌ای ω دَوَران می‌کند و تصویر آن روی محور موازی با X_1 مقدار چشمداشتی میدان الکتریکی است.

تحول نقاط داخل دایره خطا نشان‌دهنده عدم قطعیت در میدان الکتریکی است که از آن می‌توان به «گوشه کوانتومی» بر روی «استخوان کلاسیکی» تعبیر کرد. توجه کنید که هرچه برانگیختگی میدان بزرگ‌تر باشد، یعنی هرچه α بزرگ‌تر باشد، میدان کلاسیکی‌تر می‌شود؛ زیرا افت‌وخیزها مستقل از α هستند. اما حالت‌های همدوس کلاسیکی‌ترین حالت‌های کوانتومی هستند. بنابراین بدیهی است که برای میدان در حالتی غیر از حالت همدوس، مقدار چشمداشتی میدان شبیه حالت کلاسیک نباشد. یک حالت تعداد حالتی بسیار غیر کلاسیکی است و با استفاده از نقاط مربوطه‌اش در فضای فاز، به سادگی از شکل ۷-۳ می‌توان دید که مقدار چشمداشتی برابر صفر است. اما می‌توان انواع دیگری از حالت‌ها را تصور کرد که برای آن‌ها مقدار

چشمداشتی میدان صفر نباشد، ولی افت‌وخیزهای آن از افت‌وخیزهای یک حالت کوانتومی در یک بخش از میدان کوچک‌تر باشند. این حالت‌ها، حالت‌های فشرده نامیده می‌شوند که در فصل ۷ به آن‌ها خواهیم پرداخت.

۷-۳ عملگرهای چگالی و توزیع‌های احتمال در فضای فاز

برای یک مخلوط (آنسامبل) حالت‌های کوانتومی $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots$ عملگر چگالی به صورت زیر داده می‌شود (پیوست «ا» را نیز ببینید):

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (۸۶-۳)$$

که در آن p_i احتمال یافتن سیستم در عضو نام آنسامبل است و

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1. \quad (۸۷-۳)$$

(برای یک حالت خالص $|\psi\rangle \langle \psi| = \hat{\rho}$ است). مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{O}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{O} \hat{\rho}) = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle. \quad (۸۸-۳)$$

مانند معادله ۷۴-۳، با استفاده از رابطه کامل بودن برحسب حالت‌های تعداد در طرفین عملگر چگالی به دست می‌آوریم:

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m |m\rangle \rho_{mn} \langle n|. \quad (۸۹-۳)$$

برای تعیین عملگر $\hat{\rho}$ لازم است تمام عناصر $\rho_{mn} = \langle m | \hat{\rho} | n \rangle$ را بدانیم. عناصر قطری، $P_n = \rho_{nn}$ ، عبارت‌اند از احتمال یافتن فوتون در میدان. از طرف دیگر، با استفاده از فرمول ۶۳-۳ داریم:

$$\hat{\rho} = \iint \langle \alpha' | \hat{\rho} | \alpha'' \rangle |\alpha'\rangle \langle \alpha''| \frac{d^2 \alpha' d^2 \alpha''}{\pi^2}. \quad (۹۰-۳)$$

اما یک راه دیگری برای نمایش $\hat{\rho}$ برحسب حالت‌های همدوس وجود دارد و آن عبارت است از

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha, \quad (۹۱-۳)$$

که در آن $P(\alpha)$ یک تابع وزن است که تابع گلوبر-سودارشان نامیده می‌شود [۱۰، ۲]. طرف راست معادله ۹۱-۳ شکل «قطری» عملگر چگالی و تابع P شبیه توزیع فضای فاز مکانیک آماری است. در اینجا قسمت‌های حقیقی و موهومی α متغیرهای فضای فاز هستند. چون $\hat{\rho}$ یک عملگر هرمیتی است، $P(\alpha)$ باید حقیقی باشد. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \hat{\rho} &= \text{Tr} \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \\
&= \int \sum_n P(\alpha) \langle n|\alpha\rangle \langle \alpha|n\rangle d^2\alpha \\
&= \int P(\alpha) \sum_n \langle \alpha|n\rangle \langle n|\alpha\rangle d^2\alpha \\
&= \int P(\alpha) \langle \alpha|\alpha\rangle d^2\alpha = \int P(\alpha) d^2\alpha = 1,
\end{aligned} \tag{۹۲-۳}$$

که همان چیزی است که از توزیع احتمال در فضای فاز انتظار داریم.

اما برای بعضی از حالت‌های کوانتومی میدان، $P(\alpha)$ می‌تواند خواصی داشته باشد که با هر توزیع احتمال واقعی متفاوت باشد، از جمله اینکه $P(\alpha) \geq 0$ برقرار نباشد. حالت‌های کوانتومی وجود دارد که برای آن‌ها $P(\alpha)$ منفی یا بسیار تکیه است. در این گونه موارد حالت‌های کوانتومی مربوط را «غیر کلاسیکی» می‌نامیم. در واقع، می‌توان یک حالت غیر کلاسیکی را به صورت حالتی تعریف کرد که برای آن $P(\alpha)$ در ناحیه‌ای از فضای فاز (α مختلط) منفی یا تکیه‌تر از تابع دلتا باشد (دلیل ملاک دوم را به زودی توضیح خواهیم داد). صحبت از حالت‌های غیر کلاسیکی نور ممکن است متناقض به نظر برسد. علاوه بر این، مگر نه این است که تمام حالت‌های نور کوانتومی هستند؟ درست است، همه حالت‌های نور مکانیک کوانتومی هستند، اما برخی حالت‌ها از برخی دیگر کوانتومی‌ترند. به این مفهوم، حالت‌هایی که برای آن‌ها $P(\alpha)$ مثبت است یا تکیه‌تر از تابع دلتا نیستند، کلاسیکی هستند. حالت‌های همدوس که قبلاً نشان دادیم، شبه کلاسیک هستند از این نظر که حالت‌هایی را از میدان توصیف می‌کنند که خواصی نزدیک به خواص میدان‌های نوسانی همدوس کلاسیکی دارند، توابع P ی آن‌ها توابع دلتا هستند و به مفهوم آنچه در بالا گفته شد، کلاسیکی‌اند. بعضی اثرات از جمله فشردگی تربیع و دامنه (یا تعداد) تنها برای حالت‌هایی اتفاق می‌افتند که برای آن‌ها توابع P منفی یا بسیار تکیه باشند. به این دلیل شکل‌های مختلف فشردگی اثرات مشخصاً غیر کلاسیکی نامیده می‌شوند. این اثرات در فصل ۷ مورد بحث قرار خواهند گرفت. حال چگونه $P(\alpha)$ را محاسبه کنیم؟ یک راه کلی که در اینجا ارائه خواهیم داد، توسط مهتا^۱ داده شده است [۱۱]. با شروع از معادله ۳-۹۱ و با استفاده از حالت‌های همدوس $|u\rangle$ و $|-u\rangle$ داریم:

$$\begin{aligned}
\langle -u | \hat{\rho} | u \rangle &= \int P(\alpha) \langle -u | \alpha \rangle \langle \alpha | u \rangle d^2\alpha \\
&= \int P(\alpha) \exp \left[-\frac{1}{2} |u|^2 - \frac{1}{2} |\alpha|^2 - u^* \alpha \right] \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} |u|^2 + u^* \alpha \right] d^2\alpha \\
&= e^{-|u|^2} \int P(\alpha) e^{-|\alpha|^2} e^{\alpha^* u - \alpha u^*} d^2\alpha.
\end{aligned} \tag{۹۳-۳}$$

حال قرار می‌دهیم $\alpha = x + iy$ و $u = x' + iy'$ و در نتیجه $\alpha^* u - \alpha u^* = 2i(x'y - y'x)$ می‌توان تبدیلات فوریه در صفحه مختلط را به صورت زیر تعریف کرد:

$$g(u) = \int f(\alpha) e^{\alpha^* u - \alpha u^*} d^2 \alpha \quad (۹۴-۳)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int g(u) e^{u^* \alpha - u \alpha^*} d^2 u. \quad (۹۴-۳ ب)$$

با جایگزینی

$$\begin{aligned} g(u) &= e^{|u|^2} \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle \\ f(\alpha) &= P(\alpha) e^{-|u|^2} \end{aligned} \quad (۹۵-۳)$$

از معادله ۹۴-۳ (ب) به دست می‌آوریم:

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2} \int e^{|u|^2} \langle -u | \rho | u \rangle e^{u^* \alpha - u \alpha^*} d^2 u. \quad (۹۶-۳)$$

در مورد همگرایی این انتگرال باید دقت شود؛ زیرا در حد $|u| \rightarrow \infty$ داریم $e^{|u|^2} \rightarrow \infty$. حال به ارائه چند مثال می‌پردازیم. ابتدا حالت همدوس خالص $|\beta\rangle$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت، $\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|$ با

$$\begin{aligned} \langle -u | \hat{\rho} | u \rangle &= \langle -u | \beta \rangle \langle \beta | u \rangle \\ &= e^{-|\beta|^2} e^{-|u|^2} e^{-u^* \beta + \beta^* u}, \end{aligned} \quad (۹۷-۳)$$

داریم:

$$P(\alpha) = e^{|\alpha|^2} e^{-|\beta|^2} \frac{1}{\pi^2} \int e^{u^*(\alpha-\beta) - u(\alpha^* - \beta^*)} d^2 u. \quad (۹۸-۳)$$

اما این انتگرال فوریه درست شکل تابع دلتای دیراک در دو بُعد است:

$$\begin{aligned} \delta^2(\alpha - \beta) &= \delta[\operatorname{Re}(\alpha) - \operatorname{Re}(\beta)] \delta[\operatorname{Im}(\alpha) - \operatorname{Im}(\beta)] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int e^{u^*(\alpha-\beta) - u(\alpha^* - \beta^*)} d^2 u \end{aligned} \quad (۹۹-۳)$$

بنابراین

$$P(\alpha) = \delta^2(\alpha - \beta). \quad (۱۰۰-۳)$$

که همان توزیع یک نوسانگر هماهنگ کلاسیک است. اما اگر یک حالت همدوس یک حالت کلاسیک مانند

باشد، حالت تعداد $|n\rangle$ در نقطهٔ مقابل آن قرار دارد، حالتی که اصلاً نمی‌توان آن را به‌طور کلاسیکی توصیف کرد.

برای یک حالت خالص $|n\rangle$ ، داریم $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ و بنابراین

$$\langle -u | \hat{\rho} | u \rangle = \langle -u | n \rangle \langle n | u \rangle = e^{-|u|^2} \frac{(-u^* u)^n}{n!}. \quad (10.1-3)$$

در نتیجه

$$P(\alpha) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!} \frac{1}{\pi^2} \int (-u^* u)^n e^{u^* \alpha - u \alpha^*} d^2 u. \quad (10.2-3)$$

این انتگرال بر حسب توابع معمولی وجود ندارد و می‌توان آن را به‌صورت کلی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \frac{1}{\pi^2} \int e^{u^* \alpha - u \alpha^*} d^2 u \\ &= \frac{e^{|\alpha|^2}}{n!} \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^{(2)}(\alpha). \end{aligned} \quad (10.3-3)$$

مشتق تابع دلنا که یک توزیع ملایم شده نامیده می‌شود، تکنیک‌تر از تابع دلناست و تنها در داخل انتگرال معنی دارد؛ به‌عنوان مثال، برای تابع $F(\alpha, \alpha^*)$ داریم:

$$\int F(\alpha, \alpha^*) \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \delta^{(2)}(\alpha) d^2 \alpha = \left[\frac{\partial^{2n} F(\alpha, \alpha^*)}{\partial \alpha^n \partial \alpha^{*n}} \right]_{\substack{\alpha^*=0 \\ \alpha=0}}. \quad (10.4-3)$$

در این مرحله قضیهٔ هم‌ارزی اپتیکی سودارشان [۱۰] را معرفی می‌کنیم. فرض کنید یک تابع از عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ که به‌طور «نرمال مرتب شده‌اند»، $G^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ ، یعنی در آن عملگرهای نابودی در طرف راست عملگرهای خلق قرار گرفته‌اند، داریم:

$$\hat{G}^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \sum_n \sum_m C_{nm} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m. \quad (10.5-3)$$

(حدس اینکه تابعی که به‌صورت پادنرمال مرتب شده است چگونه باید باشد، سخت نیست). میانگین این تابع عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle G^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \rangle &= \text{Tr} \left[\hat{G}^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \hat{\rho} \right] \\ &= \text{Tr} \int P(\alpha) \sum_n \sum_m C_{nm} (\hat{a}^\dagger)^n \alpha^m |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha \\ &= \int P(\alpha) \sum_n \sum_m C_{nm} \langle \alpha | (\hat{a}^\dagger)^n \alpha^m | \alpha \rangle d^2 \alpha \\ &= \int P(\alpha) \sum_n \sum_m C_{nm} \alpha^{*n} \alpha^m d^2 \alpha \\ &= \int P(\alpha) G^{(N)}(\alpha, \alpha^*) d^2 \alpha. \end{aligned} \quad (10.6-3)$$

سطر آخر قضیه هم‌ارزی اپتیکی است: مقدار چشمداشتی یک عملگر مرتب‌شده به‌طور نرمال عبارت است از میانگین وزن‌شده P ی آن تابع که در آن جایگزینی $\alpha \rightarrow \hat{a}$ و $\alpha^* \rightarrow \hat{a}^\dagger$ صورت گرفته است. عملگرهای مرتب‌شده نرمال بعداً به‌خصوص در بحث آشکارسازی فوتوالکتریکی نور که حاصل از جذب فوتون‌هاست، اهمیت دارند. معمولاً عملگر مرتب‌شده نرمال را با علامت $:$ نشان می‌دهیم. برای یک تابع دلخواه از $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ $O(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ داریم:

$$: O(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) : \equiv O^{(N)}(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) \quad (۱۰۷-۳)$$

که در آن روابط جابه‌جایی را نادیده می‌گیریم. عملگر تعداد $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ خود به‌صورت نرمال مرتب شده است. بنابراین

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int P(\alpha) |\alpha|^2 d^2 \alpha. \quad (۱۰۸-۳)$$

اما $\hat{n}^2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}$ چنین نیست. در نتیجه

$$: \hat{n}^2 : = (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2$$

و

$$\langle : \hat{n}^2 : \rangle = \langle (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 \rangle = \int P(\alpha) |\alpha|^4 d^2 \alpha. \quad (۱۰۹-۳)$$

فایده مرتب کردن نرمال عملگرها و قضیه هم‌ارزی اپتیکی در فصل ۷ روشن خواهد شد. می‌توان در شرایط مناسب علاوه بر $\hat{\rho}$ ، سایر عملگرها را به‌شکل «قطری» نسبت به حالت‌های همدوس که نمایش P نامیده می‌شود، درآورد. برای عملگر $\hat{B}$ ، نمایش P به‌صورت زیر است:

$$\hat{B} = \int B_p(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2 \alpha. \quad (۱۱۰-۳)$$

مقدار میانگین $\hat{B}$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \langle \hat{B} \rangle &= \text{Tr}(\hat{B} \hat{\rho}) \\ &= \sum_n \langle n | \int B_p(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{\rho} | n \rangle d^2 \alpha \\ &= \int B_p(\alpha, \alpha^*) \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle d^2 \alpha. \end{aligned} \quad (۱۱۱-۳)$$

واضح است که مقدار چشمداشتی عملگر چگالی نسبت به حالت همدوس نیز نقش یک توزیع احتمال در فضای فاز را ایفا می‌کند. این مقدار چشمداشتی را تابع Q یا هوسیمی^۱ می‌نامیم [۱۲].

1. Husimi

$$Q(\alpha) = \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle / \pi. \quad (۱۱۲-۳)$$

برای $\hat{B} = \hat{I}$ شرط بهنجارش به دست می‌آید.

$$\int Q(\alpha) d^2\alpha = 1. \quad (۱۱۳-۳)$$

بر خلاف تابع P ، تابع Q برای تمام حالت‌های کوانتومی مثبت است. البته همواره می‌توان نمایش Q ی عملگر $\hat{B}$ را به عنوان مقدار چشمداشتی آن نسبت به حالت همدوس تعریف کرد.

$$\begin{aligned} B_Q(\alpha, \alpha^*) &\equiv \langle \alpha | \hat{B} | \alpha \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \sum_n \sum_m \frac{B_{nm}}{(n!m!)^{1/2}} (\alpha^*)^n (\alpha)^m \end{aligned} \quad (۱۱۴-۳)$$

که در آن $B_{nm} = \langle n | \hat{B} | m \rangle$ است. بار دیگر مقدار $\langle \hat{B} \rangle$ را محاسبه می‌کنیم، ولی این بار $\hat{\rho}$ را در نمایش P می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} \langle \hat{B} \rangle &= \text{Tr}(\hat{B} \hat{\rho}) = \text{Tr} \int \hat{B} P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \\ &= \int P(\alpha) \langle \alpha | \hat{B} | \alpha \rangle d^2\alpha \\ &= \int P(\alpha) B_Q(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha. \end{aligned} \quad (۱۱۵-۳)$$

بنابراین اگر بخواهیم نمایش P ی $\hat{\rho}$ را به کار ببریم، لازم است نمایش Q ی $\hat{B}$ را داشته باشیم یا از معادله ۱۱۳-۳ اگر بخواهیم نمایش P ی $\hat{B}$ را به کار ببریم، لازم است نمایش Q ی $\hat{\rho}$ را داشته باشیم. درحقیقت به دلیل مثبت بودن، تابع Q ویژگی یک توزیع احتمال را دارد، درحالی که تابع P واقعاً یک شبه توزیع احتمال است.

در واقع یک توزیع شبه احتمال مهم دیگر در فضای فاز موسوم به تابع ویگنر^۱ وجود دارد. ظاهراً تابع ویگنر اولین توزیع شبه احتمال فضای فاز است که در سال ۱۹۳۲ معرفی شد [۱۳]. این تابع برای یک عملگر چگالی دلخواه $\hat{\rho}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(q, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle q + \frac{1}{2}x \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{1}{2}x \right\rangle e^{ipx/\hbar} dx \quad (۱۱۶-۳)$$

که در آن $|q \pm \frac{1}{2}x\rangle$ ویژه کت‌های عملگر مکان هستند. اگر حالت مورد نظر یک حالت خالص $|\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho}$ باشد، در این صورت

1. Wigner

$$W(q, p) \equiv \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(q - \frac{1}{2}x \right) \psi \left(q + \frac{1}{2}x \right) e^{ipx/\hbar} dx \quad (117-3)$$

که در آن $\langle q + \frac{1}{2}x | \psi \rangle = \psi(q + \frac{1}{2}x)$ است و مانند آن. با انتگرال‌گیری روی تکرانه به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dp &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(q - \frac{1}{2}x \right) \psi \left(q + \frac{1}{2}x \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/\hbar} dp dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \left(q - \frac{1}{2}x \right) \psi \left(q + \frac{1}{2}x \right) \delta(x) dx \\ &= |\psi(q)|^2 \end{aligned} \quad (118-3)$$

که چگالی احتمال برای متغیر مکان q است. همچنین، با انتگرال‌گیری روی q به‌دست می‌آوریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq = |\varphi(p)|^2 \quad (119-3)$$

که در آن $\varphi(p)$ تابع موج فضای تکرانه مربوط به تابع موج فضای مختصات $\psi(q)$ است که از طریق تبدیل فوری به هم مربوط‌اند. طرف راست معادله ۱۱۹-۳ همان چگالی احتمال در فضای تکرانه است. اما $W(q, p)$ خود یک توزیع احتمال واقعی نیست؛ زیرا می‌تواند همان‌طوری که خواهیم دید، برای بعضی از حالت‌های غیر کلاسیکی مقادیر منفی اختیار کند. مانند سایر توابع توزیع، می‌توان از تابع ویگنر برای محاسبه میانگین‌ها استفاده کرد. اما توابع عملگرهای $\hat{q}$ و $\hat{p}$ که لازم است میانگین‌گیری شوند، باید برحسب این عملگرها به‌طور وایل یا متقارن مرتب شده باشند. به‌عنوان مثال، تابع کلاسیکی qp را باید با $(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})/2$ جایگزین کرد و

$$\langle \hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q} \rangle = \int (qp + pq) W(q, p) dq dp. \quad (120-3)$$

به‌طور کلی اگر $\{G(\hat{q}, \hat{p})\}_W$ یک تابع وایل-مرتب‌شده^۱ باشد که در آن $\{\dots\}_W$ به‌معنی این است که تابع به‌صورت وایل یا متقارن مرتب شده است، در این صورت

$$\langle \{G(\hat{q}, \hat{p})\}_W \rangle = \int \{G(\hat{q}, \hat{p})\}_W W(q, p) dq dp \quad (121-3)$$

میانگین مربوط به نسبت به فضای فاز است.

۳-۸ توابع مشخصه

ابتدا یک متغیر تصادفی کلاسیکی x را در نظر بگیرید. فرض کنید $\rho(x)$ یک چگالی احتمال کلاسیکی وابسته

1. Weyl

به متغیر X باشد. در این صورت، نتیجه می‌شود:

$$\rho(x) \geq 0 \quad (۱۲۲-۳)$$

و

$$\int \rho(x) dx = 1. \quad (۱۲۳-۳)$$

گشتاور x^n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle x^n \rangle = \int dx x^n \rho(x). \quad (۱۲۴-۳)$$

اگر همه گشتاورهای $\langle x^n \rangle$ معلوم باشند، در این صورت $\rho(x)$ به طور کامل مشخص می‌شود. این را می‌توان با وارد کردن تابع مشخصه زیر دید:

$$\begin{aligned} C(k) &= \langle e^{ikx} \rangle = \int dx e^{ikx} \rho(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle. \end{aligned} \quad (۱۲۵-۳)$$

واضح است که چگالی احتمال، همان تبدیل فوری تابع مشخصه است.

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{-ikx} C(k). \quad (۱۲۶-۳)$$

بنابراین اگر همه گشتاورهای $\langle x^n \rangle$ معلوم باشند، $C(k)$ را می‌دانیم و از این رو، $\rho(x)$ به دست می‌آید. از طرف دیگر، اگر تابع مشخصه معلوم باشد، می‌توان بر طبق رابطه زیر گشتاورها را محاسبه کرد:

$$\langle x^n \rangle = \frac{1}{i^n} \left. \frac{d^n C(k)}{dk^n} \right|_{k=0}. \quad (۱۲۷-۳)$$

حال به معرفی توابع مشخصه مکانیک کوانتومی می‌پردازیم. در واقع سه تابع مشخصه وجود دارد که عبارت‌اند از:

$$C_W(\lambda) = \text{Tr} [\hat{\rho} e^{\lambda \hat{a}^\dagger - \lambda^* \hat{a}}] = \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{D}(\lambda)] \quad (\text{ویگنر}) \quad (۱۲۸-۳ \text{ ا})$$

$$C_N(\lambda) = \text{Tr} [\hat{\rho} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} e^{-\lambda^* \hat{a}}] \quad (\text{مرتبه شده نرمال}) \quad (۱۲۸-۳ \text{ ب})$$

$$C_A(\lambda) = \text{Tr} [\hat{\rho} e^{-\lambda \hat{a}^\dagger} e^{\lambda^* \hat{a}}] \quad (\text{مرتبه شده پادنرمال}) \quad (۱۲۸-۳ \text{ ج})$$

این توابع از طریق قضیهٔ تفکیک^۱ کنندۀ معادلهٔ ۳-۳۲ به صورت زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$C_W(\lambda) = C_N(\lambda) e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} = C_A(\lambda) e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2}. \quad (۱۲۹-۳)$$

به علاوه، به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\langle (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n] = \left. \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial \lambda^m \partial (-\lambda^*)^n} C_N(\lambda) \right|_{\lambda=0} \quad (۱۳۰-۳ \text{ ا})$$

$$\langle \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{a}^m (\hat{a}^\dagger)^n] = \left. \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial \lambda^m \partial (-\lambda^*)^n} C_A(\lambda) \right|_{\lambda=0} \quad (۱۳۰-۳ \text{ ب})$$

$$\langle \{(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n\}_W \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \{(\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n\}_W] = \left. \frac{\partial^{(m+n)}}{\partial \lambda^m \partial (-\lambda^*)^n} C_W(\lambda) \right|_{\lambda=0}. \quad (۱۳۰-۳ \text{ ج})$$

به جای سه تابع مشخصهٔ مختلف، می‌توان تابع پارامتری‌شدهٔ S کاهیل^۲ و گلوبر^۳ را معرفی کرد [۱۴].

$$C(\lambda, s) = \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\lambda \hat{a}^\dagger - \lambda^* \hat{a} + s|\lambda|^2/2)] \quad (۱۳۱-۳)$$

به طوری که $C(\lambda, -1) = C_A(\lambda)$ و $C(\lambda, 0) = C_W(\lambda)$, $C(\lambda, 1) = C_N(\lambda)$

اکنون ارتباط این توابع مشخصه و توزیع‌های شبه‌احتمال مختلف را ارائه می‌دهیم. به عنوان مثال، تابع مشخصهٔ پادنرمال مرتب‌شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} C_A(\lambda) &= \text{Tr}[\hat{\rho} e^{-\lambda^* \hat{a}} e^{\lambda \hat{a}^\dagger}] \\ &= \text{Tr}[e^{\lambda \hat{a}^\dagger} \hat{\rho} e^{-\lambda^* \hat{a}}] \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha | e^{\lambda \hat{a}^\dagger} \hat{\rho} e^{-\lambda^* \hat{a}} | \alpha \rangle \\ &= \int d^2\alpha Q(\alpha) e^{\lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha}, \end{aligned} \quad (۱۳۲-۳)$$

که همان تبدیل فوریهٔ دوبعدی تابع Q است. تبدیل فوریهٔ وارون می‌دهد:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int C_A(\lambda) e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} d^2\lambda. \quad (۱۳۳-۳)$$

حال تابع مشخصهٔ مرتب‌شدهٔ نرمال را در نظر بگیرید. با نوشتن $\hat{\rho}$ در نمایش P داریم:

$$\begin{aligned} C_N(\lambda) &= \text{Tr}[\hat{\rho} e^{\lambda \hat{a}^\dagger} e^{-\lambda^* \hat{a}}] \\ &= \int P(\alpha) \langle \alpha | e^{\lambda \hat{a}^\dagger} e^{-\lambda^* \hat{a}} | \alpha \rangle d^2\alpha \\ &= \int P(\alpha) e^{\lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha} d^2\alpha \end{aligned} \quad (۱۳۴-۳)$$

که همان تبدیل فوریه تابع P است. تبدیل وارون آن می‌دهد:

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} C_N(\lambda) d^2 \lambda. \quad (۱۳۵-۳)$$

و بالاخره، همان‌طوری که غیرمنتظره نیست، تابع ویگنر را می‌توان به‌عنوان تبدیل فوریه تابع مشخصه وایل-مرتب‌شده در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} W(\alpha) &\equiv \frac{1}{\pi^2} \int \exp(\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*) C_W(\lambda) d^2 \lambda \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int \exp(\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*) C_N(\lambda) e^{-|\lambda|^2/2} d^2 \lambda. \end{aligned} \quad (۱۳۶-۳)$$

که با تعبیر مناسب از متغیرها، این تعریف معادل تعریف قبلی است. به‌عنوان یک کاربرد از توابع مشخصه، اکنون تابع P متناظر با حالت گرمایی یا تصادفی میدان را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که میدان در این حالت یک حالت مخلوط است که توسط عملگر چگالی $\hat{\rho}_{Th}$ در معادله ۱۴۴-۲ داده می‌شود. ابتدا تابع Q را برای این عملگر چگالی محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &= \langle \alpha | \hat{\rho}_{Th} | \alpha \rangle / \pi \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \sum_n \sum_m \langle m | \hat{\rho}_{Th} | n \rangle \frac{(\alpha^*)^m \alpha^n}{(m!n!)^{1/2}} \\ &= \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi(1+\bar{n})} \sum_m \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}} \right)^m \frac{(\alpha^* \alpha)^m}{m!} \\ &= \frac{1}{\pi(1+\bar{n})} \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{1+\bar{n}} \right), \end{aligned} \quad (۱۳۷-۳)$$

که در آن $\bar{n}$ برای حالت گرمایی توسط معادله ۱۴۱-۲ داده می‌شود. در این صورت، از معادله ۱۳۲-۳ داریم:

$$C_A(\lambda) = \frac{1}{\pi(1+\bar{n})} \int d^2 \alpha \exp \left(-\frac{|\alpha|^2}{1+\bar{n}} \right) e^{\lambda \alpha^* - \lambda^* \alpha}. \quad (۱۳۸-۳)$$

با قرار دادن $d^2 \alpha = \frac{dq dp}{2}$ ، $\alpha = (q + ip)/\sqrt{2}$ ، $\lambda = (x + y)/\sqrt{2}$ که در آن $d^2 \alpha = \frac{dq dp}{2}$ است، داریم:

$$\begin{aligned} C_A(x, y) &= \frac{1}{2\pi(1+\bar{n})} \int \exp \left[-\frac{(q^2 + p^2)}{2(1+\bar{n})} \right] \\ &\quad \times \exp[i(yq - xp)] dq dp. \end{aligned} \quad (۱۳۹-۳)$$

با استفاده از انتگرال گاوسی

$$\int e^{-as^2} e^{\pm \beta s} ds = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\beta^2/4a}, \quad (۱۴۰-۳)$$

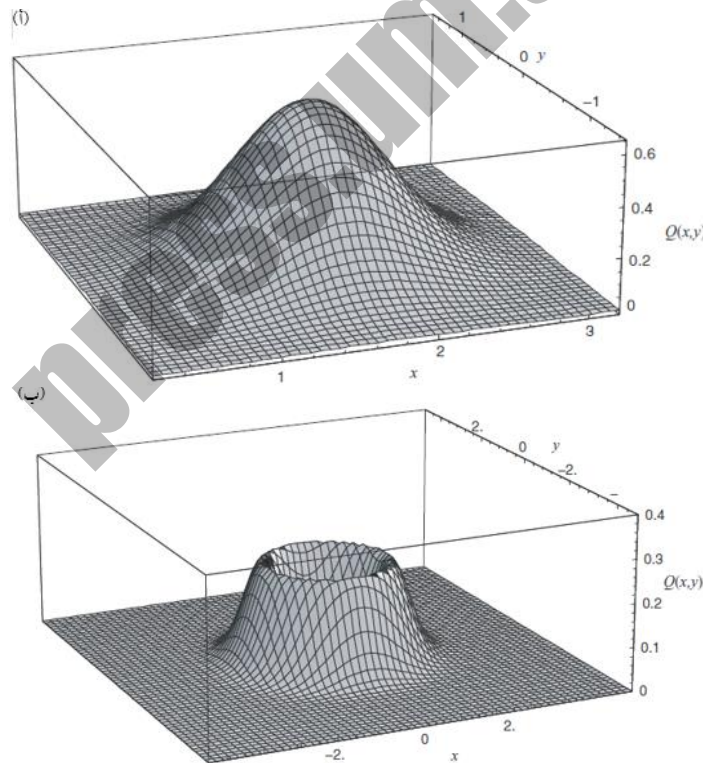
داریم:

$$C_A(\lambda) = \exp[-(1 + \bar{n})|\lambda|^2]. \quad (۱۴۱-۳)$$

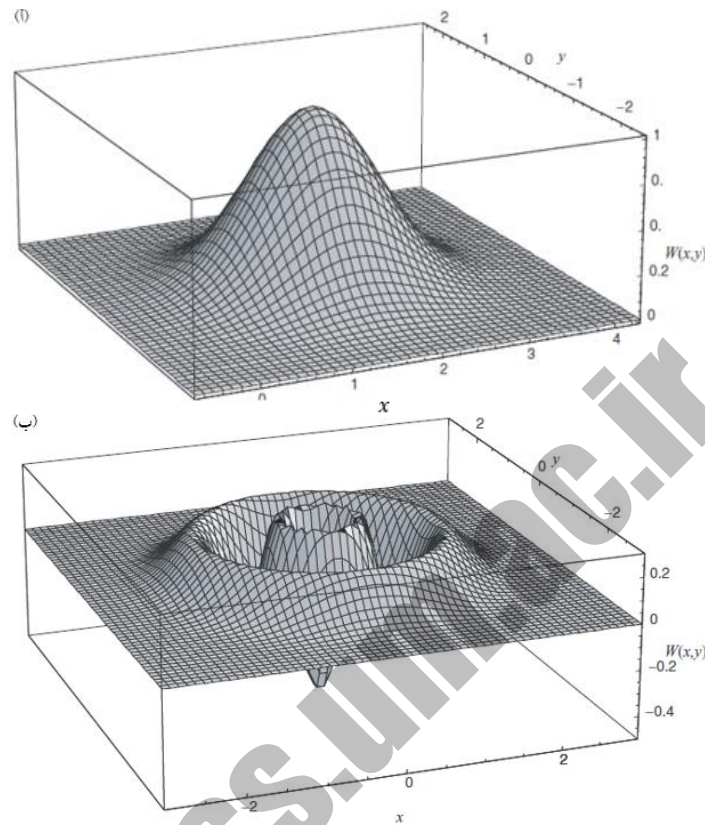
اما از معادله ۱۲۹-۳ داریم $C_N(\lambda) = C_A(\lambda)\exp(|\lambda|^2)$ و در نتیجه از معادله ۱۳۵-۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2} \int \exp(-\bar{n}|\lambda|^2) e^{\lambda^* \alpha - \lambda \alpha^*} d^2 \lambda \\ &= \frac{1}{\pi \bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right). \end{aligned} \quad (۱۴۲-۳)$$

این یک تابع گاوسی است و بنابراین می‌توان آن را به عنوان یک تابع توزیع واقعی تعبیر کرد. بالاخره به عنوان نتیجه گیری این فصل، توابع Q و ویگنر را برای کلاسیکی ترین حالت‌های کوانتومی، یعنی حالت‌های همدوس و نیز برای کوانتومی ترین حالت‌های کوانتومی، یعنی حالت‌های تعداد بررسی می‌کنیم. برای حالت همدوس $\hat{\rho} = |\beta\rangle\langle\beta|$ به سادگی تابع Q به دست می‌آید.



شکل ۹-۳ تابع Q برای (أ) یک حالت همدوس با $\bar{n} = 10$ (ب) یک حالت تعداد با $n = 3$



شکل ۱۰-۳ تابع ویگنر برای (أ) یک حالت همدوس با $\bar{n} = 10$ و (ب) یک حالت تعداد با $n = 3$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha - \beta|^2), \quad (3-143)$$

و برای حالت تعداد $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ داریم:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | n \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \exp(-|\alpha|^2) \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (3-144)$$

با قرار دادن $\alpha = x + iy$ این توابع را به صورت توابعی از x و y در شکل ۳-۹ نشان داده‌ایم. تابع Q برای حالت همدوس یک تابع گاوسی به مرکز β است، درحالی که تابع حالت متناظر با حالت تعداد یک حلقه است که شعاع مرکزی آن برابر $r \sim n$ است. توجه کنید که چگونه این توابع با شکل‌های فضای فاز بخش ۳-۶ هم‌پسته هستند. توابع ویگنر مربوط که از معادله ۳-۱۳۶ به دست می‌آیند، عبارت‌اند از

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha - \beta|^2) \quad (3-145)$$

برای حالت همدوس $|\beta\rangle$ و

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} (-1)^n L_n(4|\alpha|^2) \exp(-2|\alpha|^2), \quad (۱۴۶-۳)$$

برای حالت تعداد $|n\rangle$ که در آن $L_n(\zeta)$ چندجمله‌ای لژاندر است (محاسبه این توابع به عنوان تمرین برعهده دانشجو گذاشته می‌شود، مسئله ۳-۱۲). این توابع در شکل ۳-۱۰ با $\alpha = x + iy$ رسم شده‌اند. واضح است که توابع Q و ویگنر برای حالت همدوس، به جز در یک ضریب مقیاس کلی یکسان‌اند، ولی برای حالت تعداد، تابع ویگنر نوسان می‌کند و در محدوده وسیعی از فضای فاز مقادیر منفی را برمی‌گزیند. البته تابع Q هرگز منفی نمی‌شود و همواره یک توزیع احتمال است. اما تابع ویگنر همیشه مثبت نیست و تابع ویگنر برای حالت تعداد، یکی از مواردی است که یک توزیع احتمال نیست. حالتی را که تابع ویگنر برای آن در محدوده‌ای از فضای فاز مقادیر منفی می‌گیرد، غیرکلاسیک می‌نامیم، اما عکس آن لزوماً همواره صادق نیست. یک حالت می‌تواند غیرکلاسیک باشد و درعین حال، تابع ویگنر آن نامنفی باشد. همان‌طوری که قبلاً گفتیم، برای حالت‌های غیرکلاسیک، تابع P منفی یا تکیه‌تر از تابع دلتا در ناحیه‌ای از فضای فاز می‌شود. همان‌طوری که در فصل ۷ نشان خواهیم داد، حالت‌های فشرده از این نظر خیلی غیرکلاسیک هستند، با اینکه تابع ویگنر آن‌ها مثبت است. با وجود این، برای این حالت‌ها و سایر حالت‌های غیرکلاسیک بازهم تابع ویگنر از اولویت بالاتری برخوردار است؛ زیرا تابع P را عموماً نمی‌توان به صورت تابعی به شکل معمول نوشت، درحالی‌که این عمل برای تابع ویگنر همواره ممکن است. به علاوه همان‌طوری که برای حالت تعداد دیدیم، تابع ویگنر نسبت به ماهیت کوانتومی بعضی حالت‌ها از تابع Q حساس‌تر است. مهم‌تر از این در فصل ۷ (و همچنین در مسئله ۱۲ همین فصل) خواهیم دید، تابع ویگنر می‌تواند کلیت اثرات تداخلی وابسته به یک حالت کوانتومی را نشان دهد [۱۵]. در نهایت، این امکان وجود دارد که با استفاده از داده‌های تجربی تابع ویگنر را بازسازی کرد، روشی که توموگرافی حالت کوانتومی نامیده می‌شود. بحث در رابطه با این روش خارج از اهداف این کتاب است و خواننده را به لیست مراجع و کتاب‌شناسی آخر این فصل ارجاع می‌دهیم.

مسائل

- ۱- امکان وجود ویژه‌حالت راست برای عملگر خلق $\hat{a}^\dagger$ را بررسی کنید.
- ۲- با استفاده از نمودار فضای فاز برای یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ با میانگین تعداد فوتون $\bar{n} = |\alpha|^2$ ، نشان دهید اگر $\bar{n} \gg 1$ باشد، عدم قطعیت فاز این حالت برابر است با $\Delta\phi = 1/(2\bar{n})^{1/2}$.
- ۳- تابع موج حالت همدوس در معادله ۳-۴۷ را به دست آورید.
- ۴- اتحادهای زیر را ثابت کنید:

$$\hat{a}^\dagger |\alpha\rangle \langle \alpha| = \left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) |\alpha\rangle \langle \alpha|,$$

$$|\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{a} = \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) |\alpha\rangle \langle \alpha|.$$

۵- معادله ۳-۱۶ را که نشان می‌دهد افت‌وخیزهای کوانتومی عملگرهای تربیع میدان با افت‌وخیزهای خالص (وقتی میدان در یک حالت همدوس قرار دارد) برابرند، ثابت کنید.

۶- گشتاورهای کسری

$$\langle \hat{n}(\hat{n}-1)(\hat{n}-2)\dots(\hat{n}-r+1) \rangle.$$

را برای حالت همدوس $|\alpha\rangle$ محاسبه کنید.

۷- عملگرهای سینوس و کسینوس در معادله ۲-۲۱۱ و مربع‌های آن‌ها را برای حالت همدوس $|\alpha\rangle$ محاسبه کنید (شکل‌های بسته‌ای به‌دست نخواهید آورد). در حدی که میانگین تعداد فوتون خیلی بزرگ است، $1 \gg |\alpha|^2 = \bar{n}$ جواب را بررسی کنید. حاصل ضرب‌های عدم قطعیت معادلات ۲-۲۱۵ و ۲-۲۱۶ را در این حد محاسبه کنید.

۸- عملگر نمایی فاز $\hat{E} = (\hat{n}+1)^{-1/2}\hat{a}$ را در نظر بگیرید.

ا. ویژه‌حالت بهنجار شده‌ی راست $|z\rangle$ این عملگر که در معادله $\hat{E}|z\rangle = z|z\rangle$ صدق می‌کند را به‌دست آورید

که در آن z یک عدد مختلط است. آیا محدودیتی در برد $|z|$ وجود دارد؟

ب. آیا می‌توان رابطه کامل بودن را با این حالت‌ها نوشت؟

ج. حالت‌هایی که برای آن‌ها $1 \rightarrow |z|$ است را بررسی کنید. این حالت خاص چه ارتباطی با حالت‌های فاز

$\langle \phi |$ در معادله ۲-۲۲۱ دارد؟ آیا تناقضی با معادله ۲-۲۲۳ وجود دارد؟

د. توزیع عدد فوتون برای این حالت را به‌دست آورید و آن را برحسب میانگین تعداد فوتون‌ها $\bar{n}$ بنویسید.

آیا این توزیع با چیز دیگری که تا اینجا در این کتاب دیده‌اید، شباهت دارد؟

ه. توزیع فاز برای $|z\rangle$ را به‌دست آورید.

۹- واریانس مرتب‌شده‌ی نرمال عملگر تعداد فوتون $\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 \equiv \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$ را برحسب تابع P

به‌دست آورید که در آن $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ ، نشان دهید برای یک حالت همدوس $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = 0$. حال

فرض کنید برای یک حالت کوانتومی به‌دست می‌آوریم $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle < 0$. این رابطه چه چیزی درمورد

تابع P برای این حالت بیان می‌کند؟ آیا می‌توان این حالت را یک حالت کلاسیکی در نظر گرفت؟

۱۰- واریانس‌های مرتب‌شده‌ی نرمال $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle$ ، $i = 1, 2$ عملگرهای تربیع برحسب تابع P را به‌دست آورید.

نشان دهید این واریانس‌ها برای حالت همدوس صفر می‌شوند. شرایطی را بررسی کنید که تحت آن یک

حالت کوانتومی به $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle < 0$ منجر می‌شود که در آن $i = 1$ یا $i = 2$. آیا این شرط به‌طور هم‌زمان

برای هر دو تربیع می‌تواند برقرار باشد؟

۱۱- نشان دهید دو عبارت ۳-۱۶ و ۳-۱۳۶ برای تابع ویگنر هم‌ارزند.

۱۲- توابع ویگنر ۳-۱۴۵ و ۳-۱۴۶ را به‌ترتیب برای حالت همدوس و حالت تعداد به‌دست آورید.

۱۳- حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\beta\rangle + |-\beta\rangle)$$

که در آن $|\pm\beta\rangle$ حالت‌های همدوس هستند.

ا. نشان دهید این حالت، وقتی $1 \gg |\beta|^2$ باشد، بهنجار است.

ب. توزیع احتمال تعداد فوتون را به دست آورید.

ج. توزیع فاز را به دست آورید.

د. توابع Q و ویگنر را برای این حالت‌ها به دست آورید و نمایش سه‌بعدی آن‌ها را رسم کنید. آیا $|\psi\rangle$ یک حالت کلاسیکی است؟

۱۴- نشان دهید برای حالت $|\psi\rangle$ ، تابع ویگنر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \langle \psi | \hat{D}(\alpha) | n \rangle \langle n | \hat{D}^\dagger(\alpha) | \psi \rangle.$$

مراجع

- [1] Sakurai, J. J. (1967). *Advanced Quantum Mechanics* (Reading: Addison-Wesley), p. 35.
- [2] Glauber, R. J. (1963). *Phys. Rev.*, 131 (1963), 2766; J. R. Klauder, *J. Math. Phys.*, 4, 1055.
- [3] Merzbacher, E. (1970). *Quantum Mechanics*, 2nd edition (New York: Wiley), pp. 158–161.
- [4] Aragone, See C. Chalbaud E. and Salamo, S. (1976). *J. Math. Phys.*, 17, 1963.
- [5] See Barnett S. M. and Pegg, D. T. (1989). *J. Mod. Opt.*, 36, 7.
- [6] The wave functions for the energy eigenstates for the one-dimensional harmonic oscillator can be found in any standard quantum-mechanics textbook.
- [7] See, for example, Nauenberg, M. (1989). *Phys. Rev. A*, 40, 1133; Z. Dačić Gaeta and Stroud, C. R. Jr. (1990). *Phys. Rev. A*, 42, 6308.
- [8] See Ryder, L. W. (1996). *Quantum Field Theory*, 2nd edition (Cambridge: Cambridge University Press), p. 178.
- [9] Segal, I. (1962). *Illinois J. Math.*, 6, 500; Bargmann, V. *Commun. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), 187.
- [10] Sudarshan, E. C. G. (1963). *Phys. Rev. Lett.*, 10, 277.
- [11] Mehta, C. L. (1967). *Phys. Rev. Lett.*, 18, 752.
- [12] Kano, Y. (1965). *J. Math. Phys.*, 6, 1913; Mehta C. L. and Sudarshan, E. C. G. (1965). *Phys. Rev.*, 138, B274; R. J. Glauber, R. J. in *Quantum Optics and Electronics*, edited by Dewitt, C. Blandin A. and Cohen-Tannoudji C. (New York: Gordon and Breach, 1965), p. 65.
- [13] Wigner, E. P. (1932). *Phys. Rev.*, 40, 794.
- [14] Cahill K. E. and Glauber, R. J. (1969). *Phys. Rev.*, 177, 1882.
- [15] Agarwal, G. S. (1995). *Found. Phys.*, 25, 219.
- [16] See Vogel K. and Risken, H. (1989). *Phys. Rev. A*, 40, 2847; Smithey, D. T. Beck, M. - Raymer M. G. and Faridani, A. (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 70, 1244; Banaszek, K. Radzewicz, C. Wodkiewicz K. and Krasinski, J. S. (1999). *Phys. Rev. A*, 60, 674.

کتاب‌شناسی

حالت‌های همدوس

- Klauder, J. R and Skagerstam, B.-S. (editors), *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics* (Singapore: World Scientific, 1985).
- Zhang, W.-M. Feng, D. H. and Gilmore, R. *Rev. Mod. Phys.*, 62 (1990), 867

توزیع‌های شبه‌احتمالی

- Agarwal, G. S. and Wolf, E. *Phys. Rev. D*, 2 (1970), 2161.
- Hillery, M. O'Connell, M. O. Scully, R. F. and Wigner, E. P. *Phys. Rep.*, 106 (1984), 121.

توموگرافی حالت کوانتومی

- Raymer, M. G. *Contemp. Phys.*, 38 (1997), 343.
- Leonhardt, U. *Measuring the Quantum State of Light* (Cambridge: Cambridge University Press, 1997).

press.um.ac.ir

گسیل و جذب تابش توسط اتم‌ها

در این فصل ابتدا برهم‌کنش‌های اتم-میدان را با استفاده از نظریه اختلال کوانتومی برای یک میدان خارجی کلاسیکی و سپس برای میدان کوانتومی بررسی می‌کنیم. درمورد اخیر، گسیل خودبه‌خودی به‌صورت یک پدیده کاملاً کوانتومی ظاهر می‌شود. سپس مدل موسوم به مدل رابی را که یک مدل اتم «دوترازه» است که با یک میدان کلاسیکی قوی در نزدیکی تشدید برهم‌کنش دارد، بررسی و تقریب موج چرخان را معرفی می‌کنیم و بالاخره به مدل کاملاً کوانتومی رابی که با نام مدل جینز-کامینگز مشهورتر است، می‌پردازیم. تفاوت‌ها در تحول پیش‌بینی‌شده توسط این دو مدل را ارائه و نشان می‌دهیم مدل جینز-کامینگز رفتاری را پیش‌بینی می‌کند که مشابه نیمه کلاسیکی ندارد و به‌طور کامل به خاصیت گسستگی فوتون‌ها بستگی دارد. بالاخره به تعمیم مدل جینز-کامینگز، مدل پخش، برای موردی که میدان کوانتیده دور از تشدید با فرکانس گذار اتمی است، می‌پردازیم. این کار به ما امکان خواهد داد تا نشان دهیم چگونه برهم‌نهی حالت‌های هم‌دوس مختلف میدان که حالت‌های گریه شروینگر نامیده می‌شوند را می‌توان از برهم‌کنش‌های اتم-میدان تولید کرد.

۱-۴ برهم‌کنش‌های اتم-میدان

برای شروع فرض کنید که هامیلتونی یک الکترون مقید به اتم در غیاب میدان خارجی، در نمایش پیکربندی به‌صورت زیر باشد:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 + V(r) \quad (1-4)$$

که در آن $V(r)$ پتانسیل کولنی بین الکترون و هسته و $r = |\mathbf{r}|$ است. در نمایش فضای پیکربندی $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ و $\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle$ و توابع موج به‌صورت $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ هستند. فرض می‌کنیم ویژه‌حالت‌های انرژی $\hat{H}_0$ ، $|k\rangle$

در معادله مستقل از زمان شرودینگر صدق کنند.

$$\hat{H}_0 \psi_k^{(0)}(\mathbf{r}) = E_k \psi_k^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (2-4)$$

که در آن $\langle \mathbf{r} | k \rangle = \psi_k^{(0)}(\mathbf{r})$ معلوم هستند. در حضور میدان‌های خارجی، هامیلتونی به صورت زیر درمی آید:

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(r) \quad (3-4)$$

که در آن $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ و $\Phi(\mathbf{r}, t)$ به ترتیب پتانسیل‌های برداری و اسکالر میدان و $-e$ بار الکتریکی الکترون هستند (e را مثبت در نظر گرفته ایم). در این صورت، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به صورت زیرند:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (4-4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

که تحت تبدیلات پیمانه‌ای زیر ناوردا هستند:

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (5-4)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t).$$

معادله شرودینگر وابسته به زمان عبارت است از

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (6-4)$$

برای اینکه شکل برهم کنش اتم-میدان را ساده کنیم، یک عملگر یکانی $\hat{R}$ را تعریف می کنیم، به طوری که در آن $\Psi'(\mathbf{r}, t) \equiv \hat{R}\Psi(\mathbf{r}, t)$ در این صورت، داریم:

$$\hat{H}'\Psi'(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial\Psi'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (7-4)$$

که در آن

$$\hat{H}' = \hat{R}\hat{H}\hat{R}^\dagger + i\hbar \frac{\partial\hat{R}}{\partial t}\hat{R}^\dagger. \quad (8-4)$$

حال $\hat{R}$ را به صورت $\hat{R} = \exp(-ie\chi(\mathbf{r}, t)/\hbar)$ انتخاب می کنیم، به طوری که

$$\hat{H}' = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{P}} + e\mathbf{A}']^2 - e\Phi' + V(r) \quad (9-4)$$

که در آن A' و Φ' توسط معادله ۴-۵ داده می‌شوند. در این مرحله یک پیمانه مشخص را انتخاب می‌کنیم، پیمانه کولن (تابشی) که برای آن $\Phi = 0$ و A در شرط عرضی بودن $\nabla \cdot A = 0$ صدق کند. پتانسیل برداری A در غیاب چشمه در نزدیکی اتم در معادله زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (10-4)$$

این پیمانه برخلاف پیمانه لورنتس ناوردای نسبیتی نیست، اما چون بخش اعظمی از قلمرو اپتیک کوانتومی غیرنسبیتی است، انتخاب این پیمانه مشکلی ایجاد نمی‌کند. پیمانه کولن این امتیاز را دارد، همان‌طوری که از معادله ۳-۴ مشاهده می‌شود که در آن میدان تابشی به‌طور کامل توسط پتانسیل برداری توصیف می‌شود؛ در این صورت، داریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + V(r) \\ &= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{e}{m} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{2m} A^2 + V(r). \end{aligned} \quad (11-4)$$

معادله ۴-۹ به‌صورت زیر درمی‌آید: ئ

$$\hat{H}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{p}} + e(\mathbf{A} + \nabla\chi)]^2 + e \frac{\partial\chi}{\partial t} + V(r). \quad (12-4)$$

جواب معادله موج ۴-۱۰ عبارت است از

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c. \quad (13-4)$$

که در آن $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$ بردار موجی تابش است. وقتی $|\mathbf{r}|$ برابر ابعاد نوعی اتم (چند آنگستروم) و λ طول موج نوعی اپتیکی (چند صد نانومتر در بازه ۴۰۰-۷۰۰ nm) باشد، $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ است و بنابراین در محدوده اتم، پتانسیل برداری از نظر فضایی یکنواخت است، $A(\mathbf{r}, t) \cong A(t)$ این تقریب را تقریب دوقطبی می‌نامند. حال تابع پیمانه را $\chi(\mathbf{r}, t) = -A(t) \cdot \mathbf{r}$ انتخاب می‌کنیم. با این انتخاب داریم:

$$\begin{aligned} \nabla\chi(\mathbf{r}, t) &= -A(t), \\ \frac{\partial\chi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) &= -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t), \end{aligned} \quad (14-4)$$

و در نتیجه

$$\hat{H}' = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(r) + e \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t). \quad (15-4)$$

این معادله برخلاف معادله ۴-۱۱ که دارای دو جمله برهم کنش بود، یک جمله برهم کنش دارد (در تقریب دوقطبی). در آنچه به دنبال می‌آید، با $\hat{H}'$ کار خواهیم کرد که برهم کنش در پیمانه‌ای است که «پیمانه طول» نامیده می‌شود. عبارت $-e\mathbf{r}$ گشتاور دوقطبی است: $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$. به‌طور کلی در یک نمایش غیر مشخص، گشتاور دوقطبی $\mathbf{d}$ یک عملگر است. بنابراین

$$\hat{H}' = \hat{H}_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (۱۶-۴)$$

که در آن $\hat{H}_0$ توسط معادله ۴-۱ داده می‌شود.

۴-۲ برهم کنش اتم با یک میدان کلاسیکی

تا اینجا ماهیت میدان برهم کنش گر را مشخص نکرده‌ایم و حتی نگفتیم که میدان کلاسیکی است یا کوانتومی. راهی که به معادله ۴-۱۶ منجر شد، هم برای میدان‌های کلاسیکی و هم میدان‌های کوانتومی معتبر است. ولی در نهایت می‌خواهیم اختلافاتی را که اتم در برهم کنش با میدان‌های کلاسیکی و کوانتومی دارد، نشان دهیم. برای این منظور، ابتدا به موردی که اتم در یک میدان الکتریکی سینوسی کلاسیک قرار دارد، می‌پردازیم. فرض می‌کنیم میدان به‌صورت $\mathbf{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)$ باشد که در آن ω فرکانس تابشی است و اینکه میدان به‌طور ناگهانی در لحظه $t = 0$ برقرار شود. تقریب دوقطبی که در آن فرض می‌کنیم در محدوده ابعاد اتم $k \cdot r \ll 1$ است را در نظر گرفته‌ایم. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که حالت اولیه اتم $|i\rangle$ باشد، به‌طوری که $\hat{H}_0|i\rangle = E_0|i\rangle$. برای زمان‌های $t > 0$ بردار حالت $|\psi(t)\rangle$ را برحسب مجموعه کامل حالت‌های اتمی آزاد، بسط می‌دهیم.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k C_k(t) e^{-iE_k t/\hbar} |k\rangle, \quad (۱۷-۴)$$

که در آن دامنه‌های وابسته به زمان $C_k(t)$ در شرط بهنجارش زیر صدق می‌کند:

$$\sum_k |C_k(t)|^2 = 1. \quad (۱۸-۴)$$

این بسط را در معادله وابسته به زمان شرو دینگر

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{H}^{(1)}) |\psi(t)\rangle, \quad (۱۹-۴)$$

که در آن $H^{(1)} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(t)$ است، قرار می‌دهیم. سپس طرفین معادله را از سمت چپ در $\langle l|e^{iE_l t/\hbar}$ ضرب می‌کنیم. نتیجه به یک دسته معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جفت شده برای دامنه‌ها منجر می‌شود.

$$\dot{C}_l(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k(t) \langle l|\hat{H}^{(1)}|k\rangle e^{i\omega_{lk}t} \quad (۲۰-۴)$$

که در آن $\omega_{lk} = (E_l - E_k)/\hbar$ فرکانس‌های گذار بین ترازهای l و k است. این معادلات تا اینجا دقیق بوده و باید با این شرط اولیه $C_i(0) = 1$ به این معنا که ابتدا تنها حالت $|i\rangle$ اشغال شده است، حل شود. با گذشت زمان، اشغال حالت $|i\rangle$ کم و اشغال حالتی مانند $|f\rangle$ زیاد می‌شود، یعنی دامنه $C_f(t)$ افزایش می‌یابد. احتمال اینکه اتم در لحظه t از حالت $|i\rangle$ به حالت $|f\rangle$ گذار انجام دهد، برابر است با

$$P_{i \rightarrow f}(t) = C_f^*(t)C_f(t) = |C_f(t)|^2. \quad (21-4)$$

حل دقیق این معادلات برای دامنه‌ها، تنها برای چند مورد ساده ممکن است. البته امروزه می‌توان مجموعه معادلات دیفرانسیل را به‌طور عددی حل کرد، ولی وقتی میدان خارجی «ضعیف» باشد، می‌توان از نظریه اختلال وابسته به زمان جواب آن را به‌دست آورد [۱]. منظور از «ضعیف» در اینجا این است که $|E_0|$ یا درواقع $|\langle f|\vec{d} \cdot \vec{E}_0|i\rangle|$ کوچک باشد. معمولاً برای حل این مسئله، هامیلتونی برهم‌کنش را به‌صورت $\lambda H^{(1)}$ می‌نویسیم که در آن $0 \leq \lambda \leq 1$ (و در انتهای محاسبات $\lambda \rightarrow 1$ قرار می‌دهیم). دامنه احتمال برای یک حالت $|l\rangle$ را به‌صورت سری بسط می‌دهیم.

$$C_l(t) = C_l^{(0)}(t) + \lambda C_l^{(1)}(t) + \lambda^2 C_l^{(2)}(t) + \dots \quad (22-4)$$

با قرار دادن این بسط در معادله ۲۰-۴ و قرار دادن ضرایب توان‌های مساوی λ در طرفین تا مرتبه دوم، به‌دست می‌آوریم:

$$\dot{C}_l^{(0)} = 0, \quad (23-4)$$

$$\dot{C}_l^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k^{(0)} H_{lk}^{(1)}(t) e^{i\omega_{lk}t}, \quad (24-4)$$

$$\dot{C}_l^{(2)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k^{(1)} H_{lk}^{(1)}(t) e^{i\omega_{lk}t}, \quad (25-4)$$

که در آن $H_{lk}^{(1)}(t) \equiv \langle l|\hat{H}^{(1)}(t)|k\rangle$ ملاحظه می‌کنیم شکل عمومی روابطی که مرتبه n ام را به $(n-1)$ ام مرتبط می‌کنند، به‌صورت زیر است:

$$\dot{C}_l^{(n)} = -\frac{i}{\hbar} \sum_k C_k^{(n-1)}(t) H_{lk}^{(1)}(t) e^{i\omega_{lk}t}. \quad (26-4)$$

فرض اساسی روش نظری اختلال این است که میدان اعمال‌شده آن‌قدر ضعیف باشد که در جمعیت‌های اتمی تغییرات بسیار کمی ایجاد کند. یعنی اگر $C_i(0) = 1$ باشد، $C_f(0) = 0$ ($f \neq i$)، دراین صورت در لحظه $t > 0$ با تقریب بسیار خوبی داشته باشیم $C_i(t) \approx 1$ ، $|C_f(t)| \ll 1$ ($f \neq i$). بنابراین در معادله مرتبه اول ۲۴-۴ تنها جمله باقی‌مانده در طرف راست به‌ازای $k = i$ است و بنابراین

$$\dot{C}_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} H_{fi}^{(1)}(t) e^{i\omega_{fi}t} C_i^{(0)}(t) \quad (27-4)$$

یا

$$C_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{fi}^{(1)}(t') e^{i\omega_{fi}t'} C_i^{(0)}(t'). \quad (28-4)$$

با قرار دادن این عبارت در معادله مرتبه دوم ۲۵-۴ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} C_f^{(2)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_l \int_0^t dt' H_{fl}^{(1)}(t') e^{i\omega_{fl}t'} C_l^{(1)}(t') \\ &= \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_l \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' H_{fl}^{(1)}(t') e^{i\omega_{fl}t'} \\ &\quad \times H_{li}^{(1)}(t'') e^{i\omega_{li}t''} C_i^{(0)}(t''). \end{aligned} \quad (29-4)$$

معادله ۲۸-۴ دامنه گذار از حالت $|i\rangle$ به حالت V را می دهد، درحالی که معادله ۲۹-۴ دامنه گذار از حالت $|i\rangle$ به حالت های $|l\rangle$ و سپس به حالت $|f\rangle$ را می دهد. احتمال گذار کل از حالت $|i\rangle$ به حالت $|f\rangle$ برابر است با

$$P_{i \rightarrow f}(t) = \left| C_f^{(0)}(t) + C_f^{(1)}(t) + C_f^{(2)}(t) + \dots \right|^2. \quad (30-4)$$

اما تنها عناصر ماتریسی عملگر گشتاور دوقطبی $\hat{d}$ بین حالت های با پاریته مخالف غیر صفرند. بنابراین تصحیح مرتبه اول برای دامنه حالت اولیه صفر می شود.

$$C_i^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{ii}^{(1)}(t') C_i^{(0)}(t') = 0 \quad (31-4)$$

زیرا $H_{ii}^{(1)}(t) = 0$ و $C_i(t) = C_i^0(t) = 1$ بنابراین تا مرتبه اول داریم

$$C_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H_{fi}^{(1)}(t') e^{i\omega_{fi}t'}. \quad (32-4)$$

با قرار دادن $H^{(1)} = -\hat{d} \cdot \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ و بسط کسینوس بر حسب توابع نمایی، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} C_f^{(1)}(t) &= \frac{1}{2\hbar} (\hat{d} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi} \\ &\quad \times \left\{ \frac{(e^{i(\omega + \omega_{fi})t} - 1)}{(\omega + \omega_{fi})} - \frac{(e^{-i(\omega - \omega_{fi})t} - 1)}{(\omega - \omega_{fi})} \right\}, \end{aligned} \quad (33-4)$$

که در آن $(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0)_{fi} = \langle f | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 | i \rangle$. اگر فرکانس تابش، ω نزدیک به فرکانس گذار اتمی ω_{fi} باشد، جمله دوم بر جمله اول غلبه دارد. بنابراین می‌توانیم از جمله اول صرف‌نظر کنیم. این تقریب به‌طور مشابه با آنچه در تشدید مغناطیسی داریم، تقریب «موج چرخان» (RWA) نامیده می‌شود [۲] بنابراین احتمال گذار تا مرتبه اول برابر است با

$$P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t) = |C_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0|_{fi}^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{\Delta^2} \quad (34-4)$$

که در آن $\Delta = \omega - \omega_{fi}$ عبارت است از «واکوکی» بین میدان تابشی و گذار اتمی. وقتی $\Delta \neq 0$ باشد، $P_{i \rightarrow f}^{(1)}$ در

$$(P_{i \rightarrow f}^{(1)})_{\max} = \frac{|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0|_{fi}^2}{\hbar^2} \frac{1}{\Delta^2}. \quad (35-4)$$

ماکزیمم می‌شود. وقتی تشدید دقیق برقرار باشد، $\Delta = 0$ داریم:

$$(P_{i \rightarrow f}^{(1)})_{\max} = \frac{|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0|_{fi}^2}{4 \hbar^2} t^2. \quad (36-4)$$

برای اینکه بسط اختلالی معتبر باشد، باید $(P_{i \rightarrow f}^{(1)})_{\max} \ll 1$ در خارج از شرایط تشدید باید شرایطی برای $|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0|_{fi}$ و Δ اعمال شود. برای مورد تشدید معادله ۳۶-۴ تنها برای زمان بسیار کوتاه معتبر است. در شکل ۱-۴ تحول توزیع احتمال $P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t)$ را برای واکوکی کوچک ($\Delta \approx 0$) و واکوکی بزرگ رسم کرده‌ایم که در حالت دوم نوسانی است. همان‌طوری که شکل ۲-۴ نشان می‌دهد، احتمال گذار $P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t)$ در $\Delta = 0$ دارای یک قله تیز است. پهنای این قله با t^{-1} و ارتفاع آن با t^2 متناسب است. بنابراین مساحت زیر قله با t متناسب است. درواقع

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{\Delta^2} d(\Delta) = \frac{\pi}{2} t. \quad (37-4)$$

به‌علاوه، در حد $\Delta \approx 0$ و $t \gg 2\pi/\omega_{fi}$ می‌توان تابع زیر انتگرال ۳۷-۴ را با یک تابع دلتای دیراک تقریب زد.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{\Delta^2} = \frac{\pi}{2} t \delta(\Delta), \quad (38-4)$$

هرچند حد $t \rightarrow \infty$ درحقیقت با این الزام که سمت راست معادله ۳۵-۴ خیلی کوچک‌تر از یک باشد محدود شده است؛ در این حالت احتمال گذار برابر است با

$$P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t) = \frac{\pi}{2} \frac{|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0|_{fi}^2}{\hbar^2} t \delta(\omega - \omega_{fi}). \quad (39-4)$$

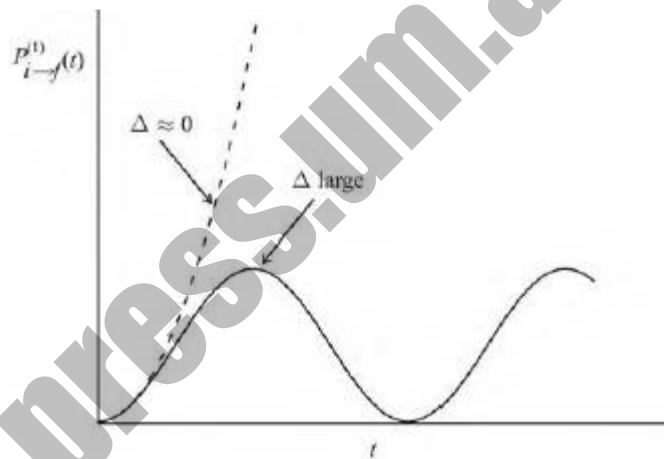
آهنگ احتمال گذار را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{P_{i \rightarrow f}^{(1)}}{t} = \frac{\pi}{2} \frac{|\langle \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 \rangle_{fi}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega - \omega_{fi}). \quad (40-4)$$

در عمل، محدوده گسترده‌ای از حالت‌های نهایی $|f\rangle$ برای گذار از حالت اولیه ممکن است و میدان خارجی نیز تک‌رنگ نیست. بنابراین برای اینکه آهنگ کل گذار را به دست آوریم، باید روی محدوده‌ای از فرکانس‌ها جمع‌بندی یا انتگرال‌گیری کنیم. اگر $[f]$ معرف مجموعه حالت‌های نهایی قابل دسترس باشد، در این صورت آهنگ گذار برای یک میدان تک‌رنگ برابر است با

$$W_{i \rightarrow [f]} = \frac{\pi}{2} \sum_{[f]} \frac{|\langle \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0 \rangle_{fi}|^2}{\hbar^2} \delta(\omega - \omega_{fi}). \quad (41-4)$$

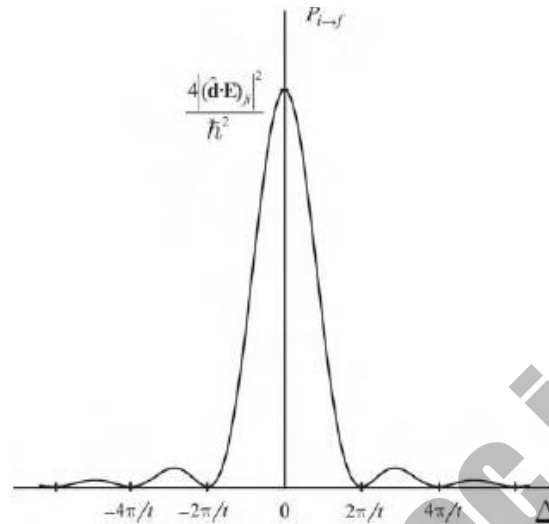
این رابطه قاعده طلایی فرمی نامیده می‌شود [۳].



شکل ۴-۱ نمودار $P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t)$ نسبت به زمان برای Δ های بزرگ و کوچک

حال فرض کنید نوری که به اتم می‌تابد، از طریق تابش یک لامپ باشد که پهنای وسیعی از فرکانس‌ها را که هیچ رابطه فازی بین آن‌ها وجود ندارد، دربرمی‌گیرد. دامنه نور در این صورت وابسته به فرکانس خواهد بود و از این رو، آهنگ احتمال گذار برای تمام فرکانس‌ها برابر است با

$$\frac{P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t)}{t} = \frac{1}{\hbar^2} \int d\omega \frac{\sin^2(\Delta t/2)}{\Delta^2} F(\omega) \quad (42-4)$$



شکل ۴-۲ احتمال گذار $P_{i \rightarrow f}^{(1)}(t)$ به صورت تابعی از Δ

که در آن

$$F(\omega) \equiv |\langle f | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0(\omega) | i \rangle|^2. \quad (4-43)$$

اگر تابع $F(\omega)$ پهن‌بند و تغییرات آن نسبت به ω در مقایسه با $(\sin^2(\Delta t/2)/\Delta^2)$ کند باشد، می‌توان $F(\omega)$ را با مقدارش در فرکانس شدید، $F(\omega_{fi})$ ، جایگزین کرد و از انتگرال بیرون آورد و در نتیجه

$$F(\omega) \equiv |\langle f | \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0(\omega) | i \rangle|^2. \quad (4-44)$$

بدین ترتیب، آهنگ گذار برابر است با

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{\pi}{2\hbar^2} F(\omega_{fi}). \quad (4-45)$$

گسترده‌ی فرکانس‌ها، همان‌طوری که در شکل ۴-۱ دیده می‌شود، به حذف و یا وافازی نوسانات منجر می‌گردد. علت این امر این است که بین فرکانس‌های مختلف رابطه‌ی فازی مشخصی وجود ندارد؛ نور ناهمدوس است. اگر نور توسط یک میدان نوری همدوس نظیر یک لیزر تولید شود، وافازی اتفاق نمی‌افتد و آهنگ گذار اختلالی مستقل از زمان بالا برای توصیف دینامیک مسئله مناسب نیست. بحث مربوط به تابش اتم توسط میدان لیزری همدوس در بخش ۴-۴ بررسی خواهد شد.

۴-۳ بوهم‌کنش اتم با یک میدان کوانتیده

در بحث گذشته هیچ فرضی در رابطه با موقعیت‌های نسبی ترازهای انرژی i و f نکردیم. گذارهای بین این ترازها مادامی که $E_0 \neq 0$ باشد، چه $E_i < E_f$ و چه $E_i > E_f$ باشد، با احتمال مخالف صفر رخ می‌دهند. همان‌طوری که

نشان خواهیم داد، وقتی میدان کوانتیده باشد، حتی در شرایطی که هیچ فوتونی حضور ندارد، در صورتی که $E_i > E_f$ باشد، گذار اتفاق می‌افتد؛ گسیل خودبه‌خودی. این تنها یکی از چند اختلافی است که وقتی میدان کوانتیده باشد نسبت به وقتی که نیست، در دینامیک اتم-میدان وجود دارد. یک میدان تک‌مدی آزاد را که توسط معادله ۲-۱۳۰ داده می‌شود، در تقریب دوقطبی در نظر بگیرید:

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e} [\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}] \quad (4-46)$$

این عملگر در تصویر هایزنبرگ است. اما می‌خواهیم در تصویر شرودینگر کار کنیم که در آن عملگر میدان عبارت است از

$$\hat{\mathbf{E}} = i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (4-47)$$

در این صورت، هامیلتونی آزاد باید به صورت زیر باشد:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{atom}} + \hat{H}_{\text{field}} \quad (4-48)$$

که $\hat{H}_{\text{atom}}$ مانند قبل هامیلتونی اتم آزاد و $\hat{H}_{\text{field}}$ هامیلتونی میدان آزاد $\hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$ است و جمله نقطه صفر را حذف کرده‌ایم؛ زیرا در دینامیک مشارکت ندارد. هامیلتونی برهم‌کنش عبارت است از

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(1)} &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = -i \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e})(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \\ &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e} \varepsilon_0 (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (4-49)$$

که در آن $\varepsilon_0 = i(\hbar\omega/2\varepsilon_0 V)^{1/2} \mathbf{e}$.

در اینجا چون سیستم‌های اتمی و میدان کوانتیده هستند، حالت‌های سیستم مرکب شامل حاصل ضرب‌های حالت‌های هر دو سیستم خواهند بود. فرض کنید حالت اولیه اتم-میدان $|i\rangle = |a\rangle|n\rangle$ باشد که در آن $|a\rangle$ حالت اولیه اتم و میدان شامل n فوتون است. برهم‌کنش اختلالی اتم با میدان کوانتیده باعث گذار به حالت $|f_1\rangle = |b\rangle|n-1\rangle$ با جذب یک فوتون می‌شود که در آن $|b\rangle$ یک حالت دیگر اتمی است یا با گسیل یک فوتون باعث گذار به حالت $|f_2\rangle = |b\rangle|n+1\rangle$ می‌شود. انرژی این حالت‌ها عبارت‌اند از

$$|i\rangle = |a\rangle|n\rangle, \quad E_i = E_a + n\hbar\omega, \quad (4-50\text{ا})$$

$$|f_1\rangle = |b\rangle|n-1\rangle, \quad E_{f_1} = E_b + (n-1)\hbar\omega, \quad (4-50\text{ب})$$

$$|f_2\rangle = |b\rangle|n+1\rangle, \quad E_{f_2} = E_b + (n+1)\hbar\omega, \quad (4-50\text{ج})$$

که در آن E_a و E_b به ترتیب انرژی‌های حالت‌های اتمی $|a\rangle$ و $|b\rangle$ هستند. در اینجا اختلال داده شده توسط معادله ۴-۴۹ مستقل از زمان است. عناصر ماتریسی برهم کنش عبارت‌اند از جذب گسیل

$$\begin{aligned}\langle f_1 | \hat{H}^{(1)} | i \rangle &= \langle b, n-1 | \hat{H}^{(1)} | a, n \rangle \\ &= -(\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0)_{ba} \sqrt{n},\end{aligned}\quad \begin{array}{l} (51-4) \\ \text{جذب} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\langle f_2 | \hat{H}^{(1)} | i \rangle &= \langle b, n+1 | \hat{H}^{(1)} | a, n \rangle \\ &= (\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0)_{ba} \sqrt{n+1},\end{aligned}\quad \begin{array}{l} (52-4) \\ \text{گسیل} \end{array}$$

که در آن

$$(\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0)_{ab} = \langle a | \hat{\mathbf{d}} | b \rangle \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \equiv \mathbf{d}_{ab} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \quad (53-4)$$

عامل $\langle a | \hat{\mathbf{d}} | b \rangle = \mathbf{d}_{ab}$ عنصر ماتریسی دوقطبی بین حالت‌های $|a\rangle$ و $|b\rangle$ است. در اینجا در مقایسه با مورد نیمه کلاسیک دو چیز جالب توجه است: نبودن فوتون‌ها ($n=0$) همان‌طوری که ممکن است انتظار داشته باشیم، مانع جذب می‌شود. این نکته به وضوح در توافق با مورد کلاسیک است - اگر میدان نباشد، گذاری هم نخواهد بود. اما در مورد گسیل، برطبق معادله ۴-۵۲ حتی وقتی هیچ فوتونی حضور ندارد، گذار می‌تواند اتفاق بیفتد. این پدیده که گسیل خودبه‌خودی نامیده می‌شود، هیچ همتای نیمه کلاسیکی ندارد. اگر $n > 0$ باشد، گسیل یک فوتون دیگر گسیل القایی نامیده می‌شود، این فرایند برای اساس کار لیزر^۱ است. آهنگ گسیل و جذب با مجذور قدرمطلق عناصر ماتریسی مربوط متناسب است. نسبت این دو آهنگ برابر است با

$$\frac{|\langle f_2 | \hat{H}^{(1)} | i \rangle|^2}{|\langle f_1 | \hat{H}^{(1)} | i \rangle|^2} = \frac{n+1}{n}, \quad (54-4)$$

نتیجه‌ای که به زودی از آن استفاده خواهیم کرد.

روش اختلالی قبلی را می‌توان با اصلاحات مناسبی در مورد میدان کوانتیده به کار برد. معادله شرودینگر همان شکل ۴-۱۹ را دارد، ولی اکنون $\hat{H}_0$ توسط معادله ۴-۴۸ و $\hat{H}^{(1)}$ توسط معادله ۴-۴۹ داده می‌شود. با صرف نظر کردن از تمام حالت‌های اتمی، به جز $|a\rangle$ و $|b\rangle$ بردار حالت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}|\psi(t)\rangle &= C_i(t)|a\rangle|n\rangle e^{-iE_a t/\hbar} e^{-in\omega t} \\ &\quad + C_{f1}(t)|b\rangle|n-1\rangle e^{-iE_b t/\hbar} e^{-i(n-1)\omega t} \\ &\quad + C_{f2}(t)|b\rangle|n+1\rangle e^{-iE_b t/\hbar} e^{-i(n+1)\omega t}\end{aligned}\quad (55-4)$$

1. LASER: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

که در آن فرض شده است $\langle \psi(0) | = |a\rangle \langle n|$ و $C_i(0) = 1$ و $C_{f1}(0) = C_{f2}(0) = 0$. با استفاده از روش اختلالی بالا تصحیح مرتبه اول برای دامنه‌های C_{f1} و C_{f2} متناظر با اینکه اتم در حالت $|b\rangle$ باشد، به دست می‌آید.

$$C_{f1}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle f_1 | \hat{H}^{(1)} | i \rangle e^{i(E_{f1} - E_i)t'/\hbar},$$

$$C_{f2}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \langle f_2 | \hat{H}^{(1)} | i \rangle e^{i(E_{f2} - E_i)t'/\hbar},$$
(۵۶-۴)

که در آن رابطه اول مربوط به جذب و رابطه دوم مربوط به گسیل است. دامنه احتمال برای اینکه اتم در حالت $|b\rangle$ باشد، صرف نظر از اینکه چگونه این گذار اتفاق افتاده است، برابر است با مجموع دامنه‌ها در معادله ۴-۵۴، یعنی $C_f^{(1)} = C_{f1}^{(1)} + C_{f2}^{(1)}$. از معادله ۴-۵۰ به دست می‌آوریم:

$$C_f^{(1)}(t) = \frac{i}{\hbar} (\hat{\mathbf{d}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0)_{ab} \left\{ (n+1)^{1/2} \frac{[e^{i(\omega + \omega_{ba})t} - 1]}{(\omega + \omega_{ba})} - n^{1/2} \frac{[e^{i(\omega - \omega_{ba})t} - 1]}{(\omega - \omega_{ba})} \right\}$$
(۵۷-۴)

که در آن $\omega_{ba} = (E_b - E_a)/\hbar$ و جمله اول ناشی از گسیل و جمله دوم مربوط به جذب است. اگر تعداد فوتون‌ها زیاد باشد، $n \gg 1$ می‌توان در جمله اول $\sqrt{n+1}$ را با $\sqrt{n}$ جایگزین کرد و در این صورت، معادلات ۴-۵۷ و ۴-۳۳ یکسان می‌شوند که نشان‌دهنده تناظر بین دامنه‌های کلاسیکی و کوانتومی است. این تناظر بین میدان‌های کلاسیکی و کوانتومی محدودیت خود را دارد و یکی از آن‌ها، همان‌طوری که قبلاً بحث شد، مورد $n = 0$ است.

اگر $|b\rangle$ حالت برانگیخته باشد، $\omega_{ba} > 0$ است و بنابراین وقتی $\omega \sim \omega_{ba}$ باشد، جمله اول در معادله ۴-۵۱ را می‌توان حذف کرد که همان تقریب موج چرخان است. البته اگر $|a\rangle$ حالت برانگیخته باشد، $\omega_{ba} < 0$ و اگر $\omega \sim -\omega_{ba}$ باشد، جمله دوم در معادله ۴-۵۷ را حذف و مشاهده می‌کنیم که جمله باقی‌مانده، حتی وقتی $n = 0$ باشد، صفر نمی‌شود؛ در این صورت، گذار بین حالت‌های $|a\rangle$ و $|b\rangle$ با گسیل خودبه‌خودی اتفاق می‌افتد. بنابراین تقریب موج چرخان به موردی که میدان و اتم کوانتیده هستند، قابل اعمال است. می‌توان نشان داد که قاعده طلایی فرمی نیز به‌طور مشابه برای این مورد می‌تواند به کار رود.

این بخش را با به دست آوردن قانون پلانک به روش نظریه میدان به پایان می‌بریم. فرض کنید مجموعه‌ای از اتم‌ها به‌طور تشدید با یک میدان کوانتیده با فرکانس $\omega = (E_b - E_a)/\hbar$ برهم‌کنش دارند که در آن $|a\rangle$ و $|b\rangle$ حالت‌های اتمی با انرژی‌های $E_b > E_a$ هستند. فرض کنید N_a و N_b به ترتیب معرف جمعیت اتمی در حالت‌های $|a\rangle$ و $|b\rangle$ باشند. به علاوه، فرض کنید W_{emis} معرف آهنگ گذار ناشی از گسیل و W_{abs} آهنگ گذار ناشی از جذب فوتون باشد. چون اتم‌ها مرتب فوتون جذب و گسیل می‌کنند، جمعیت‌های اتمی بر طبق روابط زیر با زمان تغییر می‌کنند:

$$\begin{aligned}\frac{dN_a}{dt} &= -N_a W_{\text{emis}} + N_b W_{\text{abs}} \\ \frac{dN_b}{dt} &= -N_b W_{\text{abs}} + N_a W_{\text{emis}}.\end{aligned}\quad (۵۸-۴)$$

در تعادل گرمایی داریم:

$$\frac{dN_a}{dt} = 0 = \frac{dN_b}{dt} \quad (۵۹-۴)$$

و بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\frac{dN_a}{dt} = 0 = \frac{dN_b}{dt} \quad (۶۰-۴)$$

اما بر طبق بولتزمن

$$\frac{N_b}{N_a} = \exp[(E_a - E_b)/kT] = \exp(\hbar\omega/kT), \quad (۶۱-۴)$$

و از معادله ۵۷-۴ داریم:

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{W_{\text{emis}}}{W_{\text{abs}}} = \frac{n+1}{n}. \quad (۶۲-۴)$$

بنابراین از معادلات ۶۱-۴ و ۶۲-۴ نتیجه می‌شود:

$$n = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}, \quad (۶۳-۴)$$

که اگر n را با $\bar{n}$ جایگزین کنیم، در توافق با معادله ۱۴۱-۲ و مبین این واقعیت است که نمی‌توانیم تعداد کاملاً معینی برای فوتون‌ها در نظر بگیریم.

حال این نتیجه را با آنچه اینشتین حتی قبل از ابداع الکتروپنایمیک کوانتومی به دست آورد [۴]، مقایسه کنیم. کاری که وی انجام داد، شبیه بالا بود، ولی وی به طور صریح بین گسیل خودبه‌خودی و القایی تفاوت قائل شد. وی ضرایب A ، B و C را که دارای معانی زیر بودند، معرفی کرد: AN_a آهنگ افزایش جمعیت در حالت $|b\rangle$ به‌خاطر گسیل خودبه‌خودی از حالت $|a\rangle A$ (آهنگ گسیل خودبه‌خودی است)، $BU(\omega)N_a$ آهنگ افزایش جمعیت حالت $|b\rangle$ به‌خاطر گسیل القایی از $|a\rangle$ ، $U(\omega)$ چگالی انرژی طیفی میدان و $CU(\omega)N_b$ آهنگ افزایش حالت $|a\rangle$ در نتیجه جذب توسط اتم‌ها در حالت $|b\rangle$ است. توجه کنید که جمله گسیل خودبه‌خودی مستقل از $U(\omega)$ است؛ در این صورت، معادلات آهنگ افزایش جمعیت عبارت‌اند از

$$\frac{dN_a}{dt} = -[A + BU(\omega)]N_a + CU(\omega)N_b \quad (۶۴-۴)$$

$$\frac{dN_b}{dt} = -CU(\omega)N_b + [A + BU(\omega)]N_a.$$

پس از مدت طولانی، جمعیت‌ها به یک حالت پایدار می‌رسند و مشتق‌های طرف چپ صفر می‌شوند. در نتیجه

$$[A + BU(\omega)]N_a = CU(\omega)N_b. \quad (۶۵-۴)$$

با استفاده از رابطه ۶۱-۴ داریم:

$$U(\omega) = \frac{A}{C \exp(\hbar\omega/kT) - B}. \quad (۶۶-۴)$$

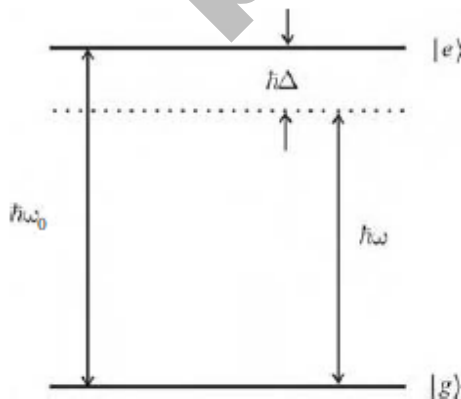
اما برای یک میدان گرمایی، باید از طریق مقایسه با معادله ۱۵۱-۲ داشته باشیم $C = B$ و

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}. \quad (۶۷-۴)$$

نسبت آهنگ‌های گسیل خودبه‌خودی A و گسیل القایی $BU(\omega)$ برابر است با

$$\frac{A}{BU(\omega)} = \exp(\hbar\omega/kT - 1). \quad (۶۸-۴)$$

این تست را برای یک چشمه طبیعی نظیر خورشید که آن را به‌عنوان یک جسم سیاه با دمای سطحی $T \approx 6000 \text{ K}$ در نظر می‌گیریم، می‌توان تقریب زد. این نسبت برای $\lambda = 400 \text{ nm}$ در حدود ۴۰۰ و برای $\lambda = 700 \text{ nm}$ در حدود ۳۰ است [۵]. بنابراین در هر دو انتهای طیف مرئی، گسیل خودبه‌خودی بر گسیل القایی غلبه دارد. در محدوده نور مرئی تنها چشمه‌های «غیرطبیعی» هستند که در آن‌ها وارونی جمعیت وجود دارد (یعنی تعداد اتم‌های حالت برانگیخته از تعداد اتم‌های حالت پایه بیشتر است)، نظیر لیزرها که در آن‌ها گسیل القایی بر گسیل خودبه‌خودی غلبه دارد.



شکل ۳-۴ ترازهای انرژی برای یک اتم دوترانه که تحت تأثیر یک میدان کلاسیکی نزدیک به تشدید با فرکانس ω قرار دارد. فرکانس تشدید بین دو تراز اتمی ω_0 و واکنشی برابر $\Delta = \omega_0 - \omega$ است.

گسیل خودبه‌خودی یک پدیده پیچیده است و تنها جنبه‌های اساسی آن را مورد بحث قرار داده‌ایم. برای اتم‌ها در فضای آزاد تعداد بی‌نهایت مد وجود دارد که اتم می‌تواند به آن‌ها تابش کند. گسیل خودبه‌خودی در این مورد به‌خوبی توسط نظریه وایسکوف-ویگنر به‌عنوان یک فرایند واپاشی برگشت‌ناپذیر توصیف شده است [۶]. پرداختن به این نظریه خارج از حوصله این کتاب است، لیکن تحت شرایط خاصی که تنها یک مد وجود داشته باشد که اتم به آن تابش کند، نظیر مورد اتم در یک کاواک، گسیل خودبه‌خودی می‌تواند برگشت‌پذیر باشد. یعنی اتم می‌تواند فوتون گسیل‌شده را دوباره جذب کند. چنین رفتاری در بخش ۴-۵ مورد بحث قرار می‌گیرد.

۴-۴ مدل رابی

در روش اختلال در برهم‌کنش‌های اتم-میدان فرض بر این است که جمعیت حالت اولیه اتمی اساساً بدون تغییر باقی می‌ماند، یعنی دامنه احتمال برای اینکه اتم در حالت دیگری قرار بگیرد، بسیار کوچک است. از طرف دیگر، یک میدان لیزری قوی با فرکانس نزدیک به تشدید با یک زوج تراز اتمی (که فرض می‌شود دارای پارامتر مخالف باشند) باعث خواهد شد که انتقال جمعیت بزرگی به حالت نزدیک به تشدید رخ دهد بدون اینکه گذار به حالت‌های دیگر اتفاق بیفتد. در چنین موردی نمی‌توان از نظریه اختلال استفاده کرد. در این صورت، تنها دو حالت غالب را حفظ و مسئله را «دقیق‌تر» حل می‌کنیم. این همان مدل رابی است [۷] که به‌خاطر کارهایی که مدت‌ها قبل رابی در ساخت اولیه تشدید مغناطیسی انجام داده بود، این نام‌گذاری انجام شد. ابتدا مورد نیمه کلاسیک را بررسی می‌کنیم.

مطابق قرارداد معمول، دو تراز اتمی را $|g\rangle$ (برای حالت پایه) و $|e\rangle$ (برای حالت رانگیخته) برچسب‌گذاری می‌کنیم. اختلاف انرژی این دو حالت با فرکانس گذار $\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar$ مشخص می‌شود. این فرکانس مطابق شکل ۴-۳ نزدیک به فرکانس ω لیزر است. هامیلتونی برهم‌کنش را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{H}^{(1)}(t) = \hat{V}_0 \cos \omega t \quad (۶۹-۴)$$

که در آن $\hat{V}_0 = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}_0$ است. بردار حالت را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\psi(t)\rangle = C_g(t)e^{-iE_g t/\hbar}|g\rangle + C_e(t)e^{-iE_e t/\hbar}|e\rangle. \quad (۷۰-۴)$$

از معادله شرودینگر

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle, \quad (۷۱-۴)$$

که در آن

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_0 \cos \omega t, \quad (۷۲-۴)$$

است، دسته معادلات جفت‌شده زیر برای دامنه‌های C_e و C_g به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\dot{C}_g &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{V} \cos \omega t e^{-i\omega_0 t} C_e \\ \dot{C}_e &= -\frac{i}{\hbar} \mathcal{V} \cos \omega t e^{i\omega_0 t} C_g\end{aligned}\quad (۷۳-۴)$$

که در آن $\mathcal{V} = \langle e | \hat{V}_0 | g \rangle = -\hat{\mathbf{d}}_{eg} \cdot \mathbf{E}_0$ است که آن را حقیقی فرض می‌کنیم. به‌عنوان شرایط اولیه فرض می‌کنیم که تمام جمعیت در حالت پایه قرار داشته باشد: $C_g(0) = 1$ و $C_e(0) = 0$. در معادله ۷۳-۴ پس از بسط $\cos \omega t$ و حفظ جملات نوسانی با فرکانس $\omega_0 - \omega$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\dot{C}_g &= -\frac{i}{2\hbar} \mathcal{V} \exp[i(\omega - \omega_0)t] C_e \\ \dot{C}_e &= -\frac{i}{2\hbar} \mathcal{V} \exp[-i(\omega - \omega_0)t] C_g.\end{aligned}\quad (۷۴-۴)$$

که البته با حذف جملات نوسانی با فرکانس $\omega_0 + \omega$ که تقریب RWA را تشکیل می‌دهد. با حذف C_g داریم:

$$\ddot{C}_e + i(\omega - \omega_0)\dot{C}_e + \frac{1}{4} \frac{\mathcal{V}^2}{\hbar^2} C_e = 0. \quad (۷۵-۴)$$

جواب آزمایشی زیر را در معادله زیر قرار می‌دهیم:

$$C_e(t) = e^{i\lambda t} \quad (۷۶-۴)$$

که به جواب‌های زیر منجر می‌شود:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \{ \Delta \pm [\Delta^2 + \mathcal{V}^2 / \hbar^2]^{1/2} \} \quad (۷۷-۴)$$

که در آن $\Delta = \omega_0 - \omega$ عبارت است از واکوکی فرکانس گذار اتمی و میدان لیزر. بنابراین جواب عمومی معادله عبارت است از

$$C_e(t) = A_+ e^{i\lambda_+ t} + A_- e^{i\lambda_- t}, \quad (۷۸-۴)$$

که با توجه به شرایط اولیه باید داشته باشیم:

$$A_{\pm} = \mp \frac{1}{2\hbar} \mathcal{V} [\Delta^2 + \mathcal{V}^2 / \hbar^2]^{-1/2}. \quad (۷۹-۴)$$

بالاخره جواب معادله ۷۴-۴ عبارت است از

$$\begin{aligned}C_e(t) &= i \frac{\mathcal{V}}{\Omega_R \hbar} e^{i\Delta t/2} \sin(\Omega_R t/2) \\ C_g(t) &= e^{i\Delta t/2} \left\{ \cos(\Omega_R t/2) - i \frac{\Delta}{\Omega_R} \sin(\Omega_R t/2) \right\},\end{aligned}\quad (۸۰-۴)$$

که در آن

$$\Omega_R = [\Delta^2 + \mathcal{V}^2 / \hbar^2]^{1/2} \quad (۸۱-۴)$$

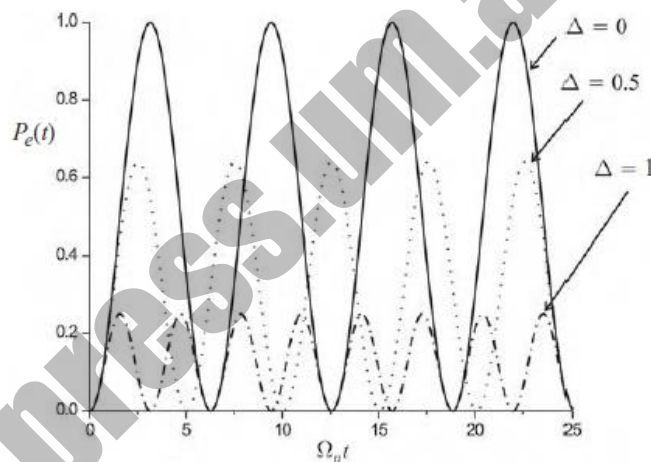
فرکانس رابی نامیده می‌شود. احتمال اینکه اتم در حالت $|e\rangle$ باشد، برابر است با

$$\begin{aligned} P_e(t) &= |C_e(t)|^2 \\ &= \frac{\mathcal{V}^2}{\Omega_R^2 \hbar^2} \sin^2(\Omega_R t / 2), \end{aligned} \quad (۸۲-۴)$$

که در شکل ۴-۴ برای مقادیر مختلف Δ رسم شده است. برای مورد تشدید دقیق، $\Delta = 0$ داریم:

$$P_e(t) = \sin^2\left(\frac{\mathcal{V}t}{2\hbar}\right), \quad (۸۳-۴)$$

در زمان $t = \pi\hbar/\mathcal{V}$ تمام جمعیت اتمی به حالت برانگیخته منتقل شده است.



شکل ۴-۴ نمودار $P_e(t)$ برحسب t برای مقادیر مختلف واکوکی Δ

اغلب بهتر است کمیتی موسوم به وارونی اتمی $W(t)$ که اختلاف جمعیت‌های حالت برانگیخته و حالت پایه را نشان می‌دهد، تعریف کنیم.

$$W(t) = P_e(t) - P_g(t), \quad (۸۴-۴)$$

که برای مورد تشدید و اینکه اتم ابتدا در حالت پایه‌اش قرار داشته باشد، برابر است با

$$\begin{aligned} W(t) &= \sin^2\left(\frac{\mathcal{V}t}{2\hbar}\right) - \cos^2\left(\frac{\mathcal{V}t}{2\hbar}\right) \\ &= -\cos(\mathcal{V}t/\hbar). \end{aligned} \quad (۸۵-۴)$$

توجه کنید که برای $\Delta = 0$ فرکانس رابی برابر است با $\Omega_R = \mathcal{V}/\hbar$ که همان فرکانس نوسانی وارونی اتمی است. دوباره در $t = \pi\hbar/\mathcal{V}$ تمام جمعیت به حالت برانگیخته منتقل می‌شود: $W(\pi\hbar/\mathcal{V}) = 1$. در اصطلاح آزمایش‌های NMR چنین تبدیلی پالس π نامیده می‌شوند [۸]. از طرف دیگر، اگر $t = \pi\hbar/2\mathcal{V}$ باشد، $W(\pi\hbar/2\mathcal{V}) = 0$ و جمعیت به طور همدوس بین حالت پایه و حالت برانگیخته به اشتراک گذاشته می‌شود.

$$C_e(\pi\hbar/2\mathcal{V}) = \frac{i}{\sqrt{2}},$$

$$C_g(\pi\hbar/2\mathcal{V}) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
(۸۶-۴)

بنابراین

$$|\psi(\pi\hbar/2\mathcal{V})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle).$$
(۸۷-۴)

همان‌طوری که روشن است، انتقال جمعیت از حالت پایه به حالت برانگیخته معادله ۸۷-۴ پالس $\pi/2$ نامیده می‌شود. چنین تبدیلات جمعیتی توسط پالس‌های π یا $\pi/2$ نه تنها برای حالت‌های اسپینی در آزمایش‌های NMR روش‌های متداولی است [۲]، بلکه برای انجام آزمایش‌های با حالت‌های اتمی یا یونی در طیف‌سنجی لیزر نیز متداول است [۹].

نتایج نظریه اختلال را می‌توان از مدل رابی، وقتی اندازه $\mathcal{V}/2\hbar$ در مقایسه با واکوکی Δ کوچک باشد که بتوان از آن در Ω_R صرف‌نظر کرد و یا اگر میدان تابشی در زمانی آن‌قدر کوتاه عمل کند که جمله $\sin^2(\mathcal{V}t/2\hbar)$ را بتوان با جمله اول بسط آن جایگزین کرد، به‌دست آورد. در هر دو مورد کاهش جمعیت حالت اولیه اتمی کوچک است و نظریه اختلال معتبر است.

۵-۴ مدل کاملاً مکانیک کوانتومی؛ مدل جینز^۱ - کامینگز^۲

اکنون به نسخه الکترودینامیک کوانتومی مدل رابی می‌پردازیم. در بحث اختلالی قبلی برهم‌کنش اتم با میدان کوآتیده الکترومغناطیسی، فرض کردیم میدان، یک میدان آزاد تک‌مدی (موج تخت) باشد. همان‌طور که در بالا بحث کردیم، یک اتم آزاد با تعداد بی‌شماری مد برهم‌کنش می‌کند و بنابراین دینامیک مربوط نمی‌تواند با فرض تنها یک میدان تک‌مدی توصیف شود. از طرف دیگر، اخیراً می‌توان محیط‌هایی ساخت که چگالی مدهای آن‌ها به‌طور قابل ملاحظه‌ای با فضای آزاد اختلاف داشته باشد. مقصود ما در اینجا کاواک‌های میکرووی کوچک یا از بعضی جهات کاواک‌های اپتیکی هستند که قادر به حفظ یک تک‌مد یا احتمالاً چند مد با پهنای زیاد (از نظر فرکانس) باشند. بنابراین در برخی از موارد می‌توان برهم‌کنش‌های تک‌مدی ایدئال را در آزمایشگاه

1. Jaynes
2. Cummings

انجام داد. در فصل ۱۰ چند نمونه از این‌ها را مورد بحث قرار خواهیم داد. ولی در اینجا مانند قبل، یک اتم با ترازهای $|g\rangle$ و $|e\rangle$ را که با میدان کواک تک‌مدی به صورت

$$\hat{E} = e \left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (۸۸-۴)$$

برهم کنش دارد، در نظر می‌گیریم که در آن e بردار قطبش در یک راستای دلخواه است؛ در این صورت، هامیلتونی برهم کنش عبارت است از

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(1)} &= -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{E} \\ &= \hat{d}g(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \end{aligned} \quad (۸۹-۴)$$

که در آن

$$g = - \left(\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) \quad (۹۰-۴)$$

و $\hat{d} = \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}$.

حال عملگرهای گذار اتمی

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| = \hat{\sigma}_+^\dagger, \quad (۹۱-۴)$$

و عملگر وارونی

$$\hat{\sigma}_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \quad (۹۲-۴)$$

را معرفی می‌کنیم. این عملگرها در جبر اسپینی پاولی صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} [\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] &= \hat{\sigma}_3 \\ [\hat{\sigma}_3, \hat{\sigma}_\pm] &= 2\hat{\sigma}_\pm. \end{aligned} \quad (۹۳-۴)$$

تنها عناصر غیرقطری عملگر دوقطبی مخالف صفرند؛ زیرا با توجه به ملاحظات پاریته، $\langle e|\hat{d}|e\rangle = 0 = \langle g|\hat{d}|g\rangle$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{d} &= d|g\rangle\langle e| + d^*|e\rangle\langle g| \\ &= d\hat{\sigma}_- + d^*\hat{\sigma}_+ = d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \end{aligned} \quad (۹۴-۴)$$

که در آن d حقیقی است و فرض کرده‌ایم d حقیقی است. بنابراین هامیلتونی برهم کنش عبارت است از

$$\hat{H}^{(1)} = \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (۹۵-۴)$$

که در آن $\lambda = dg/\hbar$

اگر فرض کنیم صفر انرژی بین حالت‌های $|g\rangle$ و $|e\rangle$ قرار داشته باشد (مطابق شکل ۴-۵)، در این صورت هامیلتونی اتمی آزاد را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}(E_e - E_g)\hat{\sigma}_3 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3, \quad (96-4)$$

که در آن $E_e = -E_g = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$. هامیلتونی میدان آزاد، پس از حذف جمله انرژی نقطه صفر، عبارت است

$$\hat{H}_F = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (97-4)$$

بنابراین هامیلتونی کل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}^{(0)} \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_3 + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \end{aligned} \quad (98-4)$$



شکل ۴-۵ ترازهای انرژی اتمی که در آن تراز $E=0$ وسط دو تراز قرار دارد.

در مورد میدان آزاد، قبلاً نشان دادیم که عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به صورت زیر تحول می‌یابند:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}. \quad (99-4)$$

به طور مشابه، می‌توان نشان داد که برای مورد اتمی آزاد

$$\hat{\sigma}_\pm(t) = \hat{\sigma}_\pm(0)e^{\pm i\omega_0 t}. \quad (100-4)$$

بنابراین می‌توان دید که وابستگی زمانی تقریبی حاصل ضرب های عملگری در معادله ۴-۹۸

به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_+ \hat{a} &\sim e^{i(\omega_0 - \omega)t} \\ \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger &\sim e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \\ \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger &\sim e^{i(\omega + \omega_0)t} \\ \hat{\sigma}_- \hat{a} &\sim e^{-i(\omega + \omega_0)t}.\end{aligned}\quad (10.1-4)$$

به ازای $\omega \approx \omega_0$ دو جمله آخر خیلی سریع تر از دو جمله اول تغییر می کنند. به علاوه برخلاف دو جمله اول، دو جمله آخر بقای انرژی را حفظ نمی کنند. جمله $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ متناظر است با انتقال اتم از حالت پایه به حالت برانگیخته و گسیل یک فوتون و جمله $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ متناظر است با انتقال اتم از حالت برانگیخته به حالت پایه و جذب یک فوتون. انتگرال گیری از معادله شرودینگر وابسته به زمان، مانند مورد اختلال، باعث می شود که مخرج کسر دو جمله آخر شامل $\omega + \omega_0$ و مخرج کسر دو جمله اول شامل $\omega_0 - \omega$ باشد. بنابراین جملاتی را که بقای انرژی را حفظ نمی کنند، حذف می کنیم که همان تقریب RWA است. بنابراین هامیلتونی در این تقریب به صورت زیر درمی آید:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (10.2-4)$$

برهم کنشی که توسط این هامیلتونی توصیف می شود، مدل جینز-کامینگز نامیده می شود [۱۰] قبل از پرداختن به حل چند مورد خاص، به بررسی چند ثابت حرکت می پردازیم. یک ثابت حرکت بدیهی «عدد» الکترونی است.

$$\hat{P}_E = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g| = 1, \quad [\hat{H}, \hat{P}_E] = 0 \quad (10.3-4)$$

که وقتی حالت اتمی دیگری اشغال نشده باشد، برقرار است. ثابت حرکت دوم عدد برانگیختگی است.

$$\hat{N}_e = \hat{a}^\dagger \hat{a} + |e\rangle\langle e|, \quad [\hat{H}, \hat{N}_e] = 0. \quad (10.4-4)$$

با استفاده از این ثابت های حرکت می توان معادله ۱۰۲-۴ را به دو قسمت تقسیم کرد.

$$\hat{H} = \hat{H}_I + \hat{H}_{II} \quad (10.5-4)$$

که در آن

$$\hat{H}_I = \hbar \omega \hat{N}_e + \hbar \left(\frac{\omega_0}{2} - \omega \right) \hat{P}_E, \quad (10.6-4)$$

$$\hat{H}_{II} = -\hbar \Delta + \hbar \lambda (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger),$$

به طوری که $[\hat{H}_I, \hat{H}_{II}] = 0$. بدیهی است که دینامیک اصلی در $\hat{H}_{II}$ قرار دارد و $\hat{H}_I$ تنها به یک فاز کلی بی اهمیت منجر می شود.

حال یک مثال ساده با $\Delta = 0$ را در نظر می‌گیریم که در آن اتم ابتدا در حالت برانگیخته $|e\rangle$ و میدان ابتدا در حالت تعداد $|n\rangle$ قرار داشته باشد. در این صورت، حالت اولیه سیستم اتم-میدان عبارت است از $|i\rangle = |n\rangle|e\rangle$ و انرژی آن برابر $n\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega$ است. حالت $|i\rangle$ تنها به حالت $|f\rangle = |n+1\rangle|g\rangle$ با انرژی $E_f = -\frac{1}{2}\hbar\omega + (n+1)\hbar\omega$ پیوند می‌کند. توجه کنید که $E_i = E_f$. بردار حالت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\psi(t)\rangle = C_i(t)|i\rangle + C_f(t)|f\rangle \quad (107-4)$$

که در آن $C_i(0) = 1$ و $C_f(0) = 0$ است. با استفاده از معادله شرودینگر در تصویر برهم‌کنش، $i\hbar d|\psi(t)\rangle/dt = \hat{H}_I|\psi(t)\rangle$ معادلات زیر برای ضرایب $C_i(t)$ و $C_f(t)$ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \dot{C}_i &= -i\lambda\sqrt{n+1} C_f, \\ \dot{C}_f &= -i\lambda\sqrt{n+1} C_i. \end{aligned} \quad (108-4)$$

با حذف C_f داریم:

$$\ddot{C}_i + \lambda^2(n+1) C_i = 0. \quad (109-4)$$

جواب این معادله که با شرایط اولیه سازگار است، عبارت است از

$$C_i(t) = \cos(\lambda t\sqrt{n+1}). \quad (110-4)$$

از معادله ۱۰۸-۴ داریم:

$$C_f(t) = -i \sin(\lambda t\sqrt{n+1}). \quad (111-4)$$

بنابراین جواب معادله عبارت است از

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \cos(\lambda t\sqrt{n+1}) |e\rangle |n\rangle \\ &\quad - i \sin(\lambda t\sqrt{n+1}) |g\rangle |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (112-4)$$

احتمال اینکه سیستم در حالت اولیه بماند، برابر است با

$$P_i(t) = |C_i(t)|^2 = \cos^2(\lambda t\sqrt{n+1}) \quad (113-4)$$

و احتمال اینکه سیستم به حالت $|f\rangle$ گذار انجام دهد، برابر است با

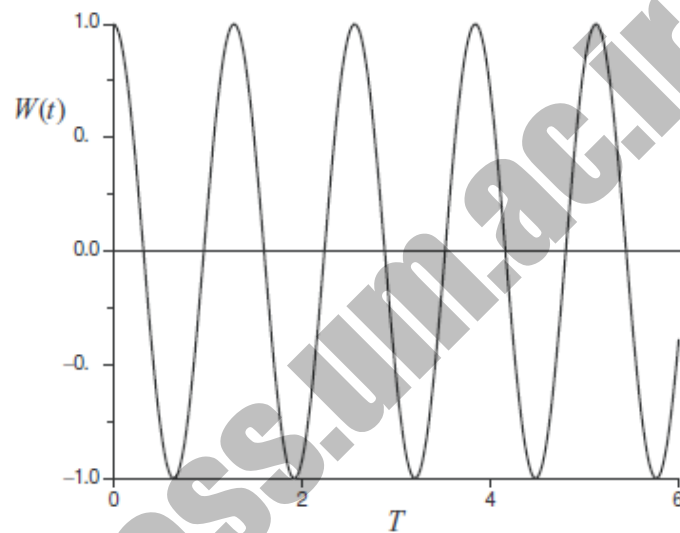
$$P_f(t) = |C_f(t)|^2 = \sin^2(\lambda t\sqrt{n+1}). \quad (114-4)$$

وارونی اتمی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi(t) \rangle \\ &= P_i(t) - P_f(t) \\ &= \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}). \end{aligned} \quad (115-4)$$

می‌توان یک فرکانس رابی الکترو دینامیک کوانتومی $\Omega(n) = 2\lambda\sqrt{n+1}$ معرفی کرد، به طوری که

$$W(t) = \cos[\Omega(n)t]. \quad (116-4)$$



شکل ۴-۶: وارونی اتمی تناوبی با میدانی که ابتدا در حالت $n > 5$ با فوتون قرار دارد.

واضح است که وارونی اتمی برای میدانی که ابتدا در یک حالت تعداد باشد، درست مانند مورد نیمه کلاسیک (صرف نظر از یک علامت منفی که به حالت اولیه اتمی متفاوت برمی گردد) دقیقاً تناوبی است (شکل ۴-۶) و به استثنای اینکه در مورد کلاسیک همواره باید در ابتدا میدان حضور داشته باشد. اما در مورد مکانیک کوانتومی، حتی وقتی $n = 0$ باشد، نوسانات رابی وجود دارد. این نوسانات، نوسانات رابی میدان خلأ هستند [۱۱] و البته همتای کلاسیکی ندارند. این نوسانات ناشی از گسیل خودبه خودی یک فوتون از اتم هستند که مجدداً جذب اتم و سپس گسیل می‌شوند و این عمل ادامه می‌کند: نمونه‌ای از گسیل خودبه خودی برگشت پذیر. این اثرات را می‌توان وقتی اتم با میدان‌هایی در کاواک‌های با مقادیر Q بسیار بالا برهم کنش داشته باشد، مشاهده کرد. اما علاوه بر این، به طور کلی رفتار دینامیکی اتمی برای تعداد معینی از فوتون‌ها بسیار شبیه مدل نیمه کلاسیکی رابی است، یعنی تناوبی و منظم است. شاید این کمی متناقض به نظر برسد؛ زیرا یک حالت تعداد غیر کلاسیکی ترین حالت میدان است. بنابر درک شهودی، انتظار می‌رود که وقتی میدان در یک

حالت همدوس باشد، باید نوسانات نیمه کلاسیکی رابی را که تناوبی و منظم‌اند، به‌دست آوریم. همان‌طور که نشان می‌دهیم، این درک شهودی در اینجا با شکست مواجه می‌شود. حال به جواب عمومی‌تر (حالت خالص) دینامیک می‌پردازیم. فرض می‌کنیم ابتدا اتم در یک برهم‌نهی از حالت‌های $|e\rangle$ و $|g\rangle$

$$|\psi(0)\rangle_{\text{atom}} = C_g|g\rangle + C_e|e\rangle, \quad (117-4)$$

و میدان در حالت

$$|\psi(0)\rangle_{\text{field}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad (118-4)$$

باشد، به‌طوری که حالت اولیه اتم-میدان به‌صورت زیر باشد:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle_{\text{atom}} \otimes |\psi(0)\rangle_{\text{field}}. \quad (119-4)$$

جواب معادله شرودینگر در این صورت برابر است با

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \{ [C_e C_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - i C_g C_{n+1} \sin(\lambda t \sqrt{n+1})] |e\rangle \\ + [-i C_e C_{n-1} \sin(\lambda t \sqrt{n}) + C_g C_n \cos(\lambda t \sqrt{n})] |g\rangle \} |n\rangle. \end{aligned} \quad (120-4)$$

عموماً این جواب یک حالت درهم‌تنیده است.

برای موردی که ابتدا اتم در حالت برانگیخته باشد، به‌طوری که $C_e = 1$ و $C_g = 0$ ، جواب معادله شرودینگر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_g(t)\rangle |g\rangle + |\psi_e(t)\rangle |e\rangle \quad (121-4)$$

که در آن $|\psi_g(t)\rangle$ و $|\psi_e(t)\rangle$ مؤلفه‌های میدان $|\psi(t)\rangle$ هستند که به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$|\psi_g(t)\rangle = -i \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(\lambda t \sqrt{n+1}) |n+1\rangle, \quad (122-4)$$

$$|\psi_e(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) |n\rangle.$$

وارونی اتمی برابر است با

$$\begin{aligned} W(t) &= \langle \psi(t) | \hat{\sigma}_3 | \psi(t) \rangle \\ &= \langle \psi_e(t) | \psi_e(t) \rangle - \langle \psi_g(t) | \psi_g(t) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}). \end{aligned} \quad (123-4)$$

که نتیجه عبارت است از مجموع وارونی‌های n فوتونی معادله ۴-۱۱۵ که با توزیع تعداد فوتون‌های حالت اولیه میدان توزین شده باشند.

برای حالت همدوس، کلاسیکی‌ترین حالت‌های کوانتومی، داریم:

$$C_n = e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \quad (۴-۱۲۴)$$

و وارونی برابر است با

$$W(t) = e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}). \quad (۴-۱۲۵)$$

نمودار $W(t)$ بر حسب زمان مقیاس شده $T = \lambda t$ که در شکل ۴-۷ نشان داده شده است، اختلافات مهم بین نوسانات کاملاً کوانتیده و نیمه کلاسیکی رابی را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌کنیم که نوسانات رابی ابتدا ناپدید می‌شوند یا فروپاشی می‌کنند. فروپاشی نوسانات رابی در ابتدای بررسی‌های این مدل برهم کنش مورد توجه قرار گرفته بود [۱۲]. چندین سال بعد با اجرای برنامه‌های کامپیوتری طولانی‌تر، دریافتند که پس از یک دوره سکون بعد از فروپاشی، نوسانات رابی دوباره، هرچند نه به‌طور کامل، آغاز می‌شوند [۱۳]. با گذشت زمان‌های طولانی‌تر، مشاهده می‌شود که رشته‌هایی از فروپاشی و احیای رخ می‌دهند و با افزایش زمان تمایز بین احیای کمتر می‌شود. این رفتار فروپاشی و احیای نوسانات رابی در مدل به‌طور کامل کوانتیده با مورد نیمه کلاسیک که در آن نوسانات دارای دامنه ثابت هستند، بسیار متفاوت است. حال این اختلاف را تشریح می‌کنیم. ابتدا مورد فروپاشی را در نظر می‌گیریم. میانگین عدد فوتون برابر $\bar{n} = |\alpha|^2$ است. بنابر این فرکانس رابی غالب برابر است با

$$\Omega(\bar{n}) = 2\lambda\sqrt{\bar{n}+1} \approx 2\lambda\sqrt{\bar{n}}, \quad \bar{n} \gg 1. \quad (۴-۱۲۶)$$

اما به سبب پهن‌شدگی احتمالات $|C_n|^2$ حول $\bar{n}$ برای تعداد فوتون‌ها، در محدوده $\bar{n} \pm \Delta n$ ، بازه‌ای از فرکانس‌ها «اهمیت» دارند. یعنی فرکانس‌هایی در محدوده $\Omega(\bar{n} - \Delta n)$ تا $\Omega(\bar{n} + \Delta n)$ زمان فروپاشی t_c را می‌توان از رابطه «عدم قطعیت» زمان-فرکانس تخمین زد.

$$t_c [\Omega(\bar{n} + \Delta n) - \Omega(\bar{n} - \Delta n)] \simeq 1 \quad (۴-۱۲۷)$$

که در آن پهنای فرکانس‌ها مسئول وافازی نوسانات رابی است. برای حالت همدوس، $\Delta n = \bar{n}^{1/2}$ است و با توجه به

$$\begin{aligned} \Omega(\bar{n} \pm \bar{n}^{1/2}) &\simeq 2\lambda[\bar{n} \pm \bar{n}^{1/2}]^{1/2} \\ &= 2\lambda\bar{n}^{1/2} \left[1 \pm \frac{1}{\bar{n}^{1/2}} \right]^{1/2} \\ &\simeq 2\lambda\bar{n}^{1/2} \left(1 \pm \frac{1}{2\bar{n}^{1/2}} \right) \\ &= 2\lambda\bar{n}^{1/2} \pm \lambda \end{aligned} \quad (۴-۱۲۸)$$

نتیجه می‌شود:

$$t_c[\Omega(\bar{n} + \bar{n}^{1/2}) - \Omega(\bar{n} - \bar{n}^{1/2})] \simeq t_c 2\lambda \simeq 1 \quad (129-4)$$

و بنابراین $t_c \approx (2\lambda)^{-1}$ که مستقل از $\bar{n}$ است.

محاسبه قبل برای زمان فروپاشی، خیلی دقیق نیست. اکنون محاسبه دقیق‌تری ارائه می‌دهیم. $[n + 1]^{1/2}$ را حول $\bar{n}$ بسط می‌دهیم.

$$[n + 1]^{1/2} = [\bar{n} + 1]^{1/2} + \frac{1}{2(\bar{n} + 1)^{1/2}}(n - \bar{n}) + \dots \quad (130-4)$$

بنابراین می‌توان وارونی را به صورت زیر تقریب زد:

$$W(t) \simeq \frac{1}{2} e^{-\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} \left[e^{2i\lambda t(\bar{n}+1)^{1/2}} e^{i\lambda n t/(\bar{n}+1)^{1/2}} e^{-i\lambda t\bar{n}/(\bar{n}+1)^{1/2}} + e^{-2i\lambda t(\bar{n}+1)^{1/2}} e^{-i\lambda n t/(\bar{n}+1)^{1/2}} e^{i\lambda t\bar{n}/(\bar{n}+1)^{1/2}} \right]. \quad (131-4)$$

توجه کنید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{in\lambda t/(\bar{n}+1)^{1/2}} = \exp \left[\bar{n} e^{i\lambda t/(\bar{n}+1)^{1/2}} \right]. \quad (132-4)$$

برای زمان کوتاه t

$$e^{i\lambda t/(\bar{n}+1)^{1/2}} \simeq 1 + i\lambda t/(\bar{n} + 1)^{1/2} - \frac{\lambda^2 t^2}{2(\bar{n} + 1)} \quad (133-4)$$

و بنابراین

$$e^{\bar{n} e^{i\lambda t/(\bar{n}+1)^{1/2}}} \simeq e^{\bar{n}} e^{i\lambda t\bar{n}/(\bar{n}+1)} e^{-\frac{1}{2} \frac{\lambda^2 t^2}{(\bar{n}+1)} \bar{n}}. \quad (134-4)$$

با توجه به تمام موارد بالا داریم:

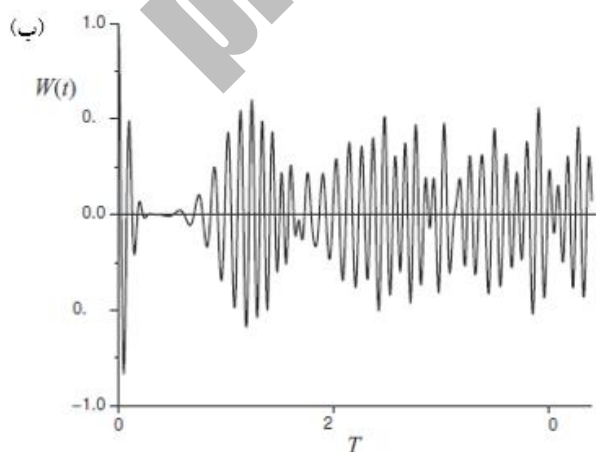
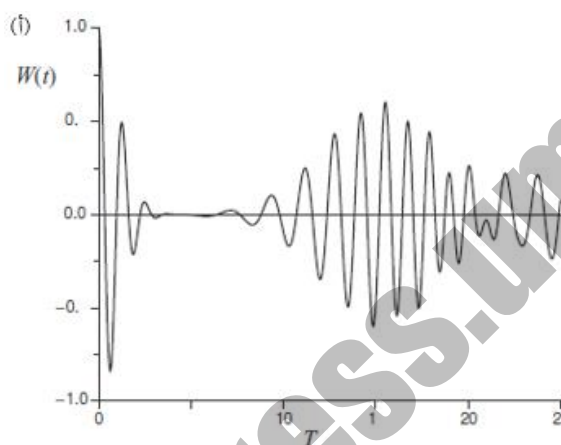
$$W(t) \simeq \cos\{2\lambda t(\bar{n} + 1)^{1/2}\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\lambda^2 t^2 \bar{n}}{\bar{n} + 1} \right\}, \quad (135-4)$$

که برای یک زمان کوتاه معتبر است. رابطه بالا نشان می‌دهد که وارونی از قانون واپاشی گاوسی تبعیت می‌کند که در آن زمان واپاشی از رابطه زیر داده می‌شود:

$$t_c = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \sqrt{\frac{\bar{n} + 1}{\bar{n}}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{\lambda}, \quad \bar{n} \gg 1 \quad (136-4)$$

که به جز در ثابت‌های عددی که از مرتبه واحد هستند، با تخمین‌های قبلی مطابقت دارد. حال پدیده احیا را بررسی می‌کنیم. $W(t)$ به وضوح از مجموع دو جمله نوسانی تشکیل شده است که هر کدام در یک فرکانس رابی، به خصوص $\Omega(n) = 2\lambda\sqrt{n+1}$ ، نوسان می‌کنند. اگر دو جمله مجاور با اختلاف فاز 180° نوسان کنند، انتظار داریم که حداقل به طور تقریب، این دو جمله اثر یکدیگر را خنثی کنند. از طرف دیگر، اگر جملات مجاور هم فاز باشند، انتظار تداخل سازنده داریم. در واقع هرگاه اختلاف فاز جملات مجاور مضرب صحیحی از 2π باشد، این اتفاق می‌افتد. چون تنها فرکانس‌های مهم حول $\bar{n}$ مشارکت دارند، احیا باید برای زمان‌های $t = t_R$ اتفاق بیفتد، به طوری که رابطه زیر برقرار باشد:

$$[\Omega(\bar{n} + 1) - \Omega(\bar{n})] t_R = 2\pi k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4-137)$$



شکل ۴-۷. ا. وارونی اتمی با میدانی که ابتدا در حالت همدوس $\bar{n} = 5$ قرار دارد. ب. همان مورد «ا»، ولی در زمان تحول طولانی‌تر؛ طولانی‌تر از زمان احیای اول. در اینجا T زمان مقیاس شده λt است

با بسط $\Omega(\bar{n})$ و $\Omega(\bar{n}+1)$ به دست می‌آوریم ، $t_R = (2\pi/\lambda)\bar{n}^{1/2}k$ ، با استفاده از ۱۱۸-۴ داریم:

$$W(t) \simeq \cos \left[2\lambda t(\bar{n}+1)^{1/2} + \lambda t\bar{n}/(\bar{n}+1)^{-1/2} - \bar{n} \sin \left(\frac{\lambda t}{(\bar{n}+1)^{1/2}} \right) \right] \quad (138-4)$$

$$\times \exp \left\{ -\bar{n} \left[1 - \cos \left(\frac{\lambda t}{(\bar{n}+1)^{1/2}} \right) \right] \right\}.$$

به وضوح پیداست که دامنه در زمان $t = t_R = (2\pi/\lambda)(\bar{n}+1)^{1/2}k \approx (2\pi/\lambda)\bar{n}^{1/2}k$ ($\bar{n} \gg 1$)، دو آزمایش را مورد بحث قرار خواهیم داد: یکی در زمینه الکترو دینامیک کوانتومی کاواک و دیگری در زمینه حرکت مرکز جرم یون به دام افتاده که در آن‌ها واپاشی و احیای نوسانات رابی مشاهده شده است.

۴-۶ حالت‌های پوشیده^۱

راه‌های زیادی برای حل دینامیک مدل جینز-کامینگز وجود دارد (به مرجع [۱۴] مراجعه کنید). در بخش ۴-۵ معادله شرودینگر وابسته به زمان را ابتدا برای میدان شامل n فوتون حل کردیم و سپس با یک برون‌یابی ساده مورد یک میدان را که از برهم‌نهی حالت‌های تعداد تشکیل شده بود، بررسی کردیم. راه مهم دیگر برای یافتن دینامیک مسئله این است که ابتدا حالت‌های ایستای هامیلتونی جینز-کامینگز را به دست آوریم. این ویژه‌حالت‌ها به دلایلی که در زیر روشن خواهد شد، حالت‌های «پوشیده» نامیده می‌شوند [۱۵]. مجدداً هامیلتونی مدل جینز-کامینگز را در نظر بگیرید:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \hat{\sigma}_3 + \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \lambda (\hat{a} \hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-) \quad (139-4)$$

که شرط تشدید $\omega = \omega_0$ را در این مرحله فرض نکرده‌ایم. برحسب حالت‌های تعداد میدان، جمله برهم‌کنش در $\hat{H}$ تنها گذارهای زیر را باعث می‌شود:

$$|e\rangle|n\rangle \leftrightarrow |g\rangle|n+1\rangle \quad (140-4)$$

یا

$$|e\rangle|n-1\rangle \leftrightarrow |g\rangle|n\rangle. \quad (141-4)$$

حالت‌های حاصل ضربی $|g\rangle|n\rangle, |e\rangle|n-1\rangle$ و غیره حالت‌های «برهنه» مدل جینز-کامینگز نامیده می‌شوند؛ این حالت‌ها، حالت‌های حاصل ضربی اتم و میدان مختل نشده هستند. برای یک n ثابت، دینامیک مسئله کاملاً به فضا‌های دوبعدی $|g\rangle|n\rangle, |e\rangle|n-1\rangle$ یا $|g\rangle|n-1\rangle, |e\rangle|n\rangle$ محدود می‌شود. برای یک n معین

1. dressed state

حالت‌های حاصل ضربی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\psi_{1n}\rangle &= |e\rangle|n\rangle \\ |\psi_{2n}\rangle &= |g\rangle|n+1\rangle. \end{aligned} \quad (142-4)$$

بدیهی است که $\langle\psi_{1n}|\psi_{2n}\rangle = 0$. با استفاده از این پایه، عناصر ماتریسی $\hat{H}$ ، $H_{ij}^{(n)} = \langle\psi_{1n}|\hat{H}|\psi_{2n}\rangle$ را به دست می‌آوریم که عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} H_{11}^{(n)} &= \hbar\left[n\omega + \frac{1}{2}\omega_0\right], \\ H_{22}^{(n)} &= \hbar\left[(n+1)\omega - \frac{1}{2}\omega_0\right], \\ H_{12}^{(n)} &= \hbar\lambda\sqrt{n+1} = H_{21}^{(n)}. \end{aligned} \quad (143-4)$$

بنابراین در زیر فضای 2×2 معادله ۱۴۲-۴ نمایش ماتریسی $\hat{H}$ را به دست می‌آوریم:

$$H^{(n)} = \begin{bmatrix} n\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 & \hbar\lambda\sqrt{n+1} \\ \hbar\lambda\sqrt{n+1} & (n+1)\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \end{bmatrix}. \quad (144-4)$$

این ماتریس «جامع» است؛ زیرا همان‌طور که گفتیم، دینامیک مسئله تنها حالت‌هایی را که در آن‌ها عدد فوتونی آن‌ها به اندازه ± 1 با هم اختلاف داشته باشد، به هم متصل می‌کند. برای یک مقدار معین n ، ویژه‌مقدارهای انرژی $H^{(n)}$ به صورت زیر است:

$$E_{\pm}(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega \pm \hbar\Omega_n(\Delta) \quad (145-4)$$

که در آن

$$\Omega_n(\Delta) = [\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)]^{1/2} \quad (\Delta = \omega_0 - \omega) \quad (146-4)$$

فرکانس رابی است که اکنون دربرگیرنده واکوکی Δ نیز هست. واضح است که به ازای $\Delta = 0$ به دست می‌آوریم $\Omega_n(0) = 2\lambda\sqrt{n+1}$ که با فرکانس‌های رابی در الکترو دینامیک کوانتومی که قبلاً دیدیم، یکسان است. ویژه‌حالت‌های $|n, \pm\rangle$ متناظر با ویژه‌مقدارهای انرژی به صورت زیر داده می‌شوند:

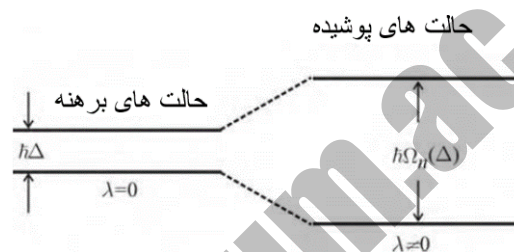
$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \cos(\Phi_n/2)|\psi_{1n}\rangle + \sin(\Phi_n/2)|\psi_{2n}\rangle \\ |n, -\rangle &= -\sin(\Phi_n/2)|\psi_{1n}\rangle + \cos(\Phi_n/2)|\psi_{2n}\rangle \end{aligned} \quad (147-4)$$

که در آن زاویه Φ_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Delta} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_n(0)}{\Delta} \right) \quad (148-4)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} \sin(\Phi_n/2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\Omega_n(\Delta) - \Delta}{\Omega_n(\Delta)} \right]^{1/2} \\ \cos(\Phi_n/2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\Omega_n(\Delta) + \Delta}{\Omega_n(\Delta)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (149-4)$$



شکل ۴-۸ شکاف تراز انرژی ناشی از برهم‌کنش اتم با میدان کوانتیده. ترازهای شکافته‌شده طرف راست، ترازهای انرژی حالت‌های پوشیده هستند.

حالت‌های $|n \pm\rangle$ اغلب «حالت‌های پوشیده» یا دوگانه جینز-کامینگز نامیده می‌شوند. حالت‌های برهنه^۱ $|\psi_{1n}\rangle$ و $|\psi_{2n}\rangle$ با انرژی‌های به ترتیب $E_{1n} = \hbar(\omega_0/2 + n\omega)$ و $E_{2n} = \hbar[-\omega_0/2 + (n+1)\omega]$ همان‌طور که در شکل ۴-۸ نشان داده شده است، به‌خاطر برهم‌کنش، بیشتر شکافته شده‌اند. شکافتگی حالت‌های برهنه به حالت‌های پوشیده نوعی انتقال استارک است که اغلب انتقال استارک AC یا دینامیک نامیده می‌شود. توجه کنید که در حد تشدید دقیق، $\Delta=0$ ، حالت‌های برهنه تبهگن هستند، ولی شکافتگی حالت‌های پوشیده باقی می‌ماند. در این حد، حالت‌های پوشیده برطبق روابط زیر به حالت‌های برهنه مرتبط می‌شوند:

$$\begin{aligned} |n, +\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|n\rangle + |g\rangle|n+1\rangle) \\ |n, -\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|e\rangle|n\rangle + |g\rangle|n+1\rangle). \end{aligned} \quad (150-4)$$

برای اینکه ببینیم چگونه حالت‌های پوشیده را می‌توان برای یافتن دینامیک حالت‌های اولیه عام به کار برد، مورد خاصی که در آن میدان در یک برهم‌نهی از حالت‌های تعداد قرار دارد را در نظر بگیرید.

1. bare states

$$|\psi_f(0)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \quad (۱۵۱-۴)$$

که در آن یک اتم که در حالت $|e\rangle$ آماده شده است، به میدان تزریق می‌شود. بنابراین حالت اولیه سیستم اتم-میدان عبارت است از

$$\begin{aligned} |\psi_{af}(0)\rangle &= |\psi_f(0)\rangle |e\rangle \\ &= \sum_n C_n |n\rangle |e\rangle = \sum_n C_n |\psi_{1n}\rangle. \end{aligned} \quad (۱۵۲-۴)$$

از معادله ۴-۱۴۷، $|\psi_{1n}\rangle$ را برحسب حالت‌های پوشیده $|n \pm\rangle$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|\psi_{1n}\rangle = \cos(\Phi_n/2) |n, +\rangle - \sin(\Phi_n/2) |n, -\rangle \quad (۱۵۳-۴)$$

و بنابراین

$$|\psi_{af}(0)\rangle = \sum_n C_n [\cos(\Phi_n/2) |n, +\rangle - \sin(\Phi_n/2) |n, -\rangle]. \quad (۱۵۴-۴)$$

چون حالت‌های پوشیده $|n \pm\rangle$ حالت‌های ایستای سیستم اتم-میدان هستند، بردار حالت در زمان $t > 0$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} |\psi_{af}(t)\rangle &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right] |\psi_{af}(0)\rangle \\ &= \sum_n C_n \left[\cos(\Phi_n/2) |n, +\rangle e^{-iE_+(n)t/\hbar} - \sin(\Phi_n/2) |n, -\rangle e^{-iE_-(n)t/\hbar} \right] \end{aligned} \quad (۱۵۵-۴)$$

البته نتیجه کلی را می‌توان با جای گذاری $|n \pm\rangle$ از معادله ۴-۱۴۷ در پایه حالت‌های برهنه نوشت. در حد $\Delta = 0$ همان نتیجه قبلی ۴-۱۲۰ را به دست می‌آوریم. اثبات این مطلب به عنوان تمرین برعهده خواننده گذاشته می‌شود.

۴-۷ روش عملگر چگالی: کاربرد حالت‌های گرمایی

تابه حال، تنها حالت‌هایی را در نظر گرفتیم که در آن میدان و اتم ابتدا در حالت‌های خالص بوده‌اند. با وجود این، به طور کلی یک یا هر دو زیرسیستم ممکن است در حالت مخلوط باشند که در این صورت، لازم است برحسب عملگر چگالی، مسئله را حل کنیم. به عنوان مثال، ممکن است میدان ابتدا در یک حالت گرمایی باشد که توسط عملگر چگالی (۲-۱۴۴) توصیف می‌شود. در بررسی برهم کنش یک اتم دوترازی با یک حالت گرمایی که توسط عملگر چگالی توصیف شده است، راه دیگری برای حل دینامیک مدل جینز-کامینگز وجود دارد. از تصویر برهم کنش استفاده و فرض می‌کنیم شرط تشدید برقرار باشد، به طوری که دینامیک توسط

هامیلتونی زیر توصیف شود:

$$\hat{H}_1 = \hbar\lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-). \quad (156-4)$$

اگر $\hat{\rho}(t)$ عملگر چگالی سیستم اتم-میدان در لحظه t باشد، تحول سیستم توسط معادله زیر داده می‌شود:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_1, \hat{\rho}] \quad (157-4)$$

که جواب آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}_1(t)\hat{\rho}(0)\hat{U}_1^\dagger(t) \quad (158-4)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \hat{U}_1(t) &= \exp[-i\hat{H}_1t/\hbar] \\ &= \exp[-i\lambda t(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-)]. \end{aligned} \quad (159-4)$$

در زیر فضای اتمی دوبعدی، عملگرهای $\hat{\sigma}_\pm$ و $\hat{\sigma}_3$ دارای نمایش زیرند:

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (160-4)$$

که از قرارداد زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \langle e|\hat{\sigma}_j|e\rangle & \langle e|\hat{\sigma}_j|g\rangle \\ \langle g|\hat{\sigma}_j|e\rangle & \langle g|\hat{\sigma}_j|g\rangle \end{pmatrix} \quad j = \pm, 3. \quad (161-4)$$

عملگر تحول $\hat{U}_1(t)$ را می‌توان در این زیر فضای دوبعدی به صورت زیر نوشت:

$$\hat{U}_1(t) = \begin{pmatrix} \hat{C}(t) & \hat{S}'(t) \\ \hat{S}(t) & \hat{C}'(t) \end{pmatrix} \quad (162-4)$$

که در آن

$$\hat{C}(t) = \cos(\lambda t\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}) \quad (163-4)$$

$$\hat{S}(t) = -i\hat{a}^\dagger \frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger})}{\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger}} \quad (164-4)$$

$$\hat{C}'(t) = \cos(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}) \quad (165-4)$$

$$\hat{S}'(t) = -i\hat{a} \frac{\sin(\lambda t\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}})}{\sqrt{\hat{a}^\dagger\hat{a}}}. \quad (166-4)$$

(عملگرهای $\hat{C}$ و $\hat{S}$ و غیره در اینجا نباید با عملگرهای کسینوس و سینوس فاز در فصل ۲ اشتباه شوند.) مزدوج هرمیتی $\hat{U}_I(t)$ ی معادله ۱۶۲-۴ عبارت است از

$$\hat{U}_I^\dagger(t) = \hat{U}_I(-t) = \begin{pmatrix} \hat{C}(t) & -\hat{S}'(t) \\ -\hat{S}(t) & \hat{C}'(t) \end{pmatrix}. \quad (۱۶۷-۴)$$

حال فرض می‌کنیم در $t = 0$ عملگر چگالی برای سیستم اتم-میدان به صورت حاصل ضرب حالت های اتم و میدان نوشته می‌شود.

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}^F(0) \otimes \hat{\rho}^A(0). \quad (۱۶۸-۴)$$

علاوه بر این، به عنوان یک مثال، فرض می‌کنیم که اتم ابتدا در حالت برانگیخته باشد، به طوری که $\hat{\rho}^A(0) = |e\rangle\langle e|$ در این صورت، ماتریس چگالی مربوط برای اتم عبارت است از (با استفاده از قرارداد معادله ۱۶۱-۴)

$$\rho^A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۶۹-۴)$$

و بنابراین می‌توان ماتریس چگالی سیستم را به صورت زیر نوشت:

$$\hat{\rho}(0) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}^F(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\rho}^F(0) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (۱۷۰-۴)$$

با استفاده از معادلات ۱۶۲-۴، ۱۶۷-۴ و ۱۶۹-۴ در معادله ۱۵۸-۴ به دست می‌آوریم:

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \hat{C}(t)\hat{\rho}(0)\hat{C}(t) & -\hat{C}(t)\hat{\rho}^F(0)\hat{S}'(t) \\ \hat{S}(t)\hat{\rho}^F(0)\hat{C}(t) & -\hat{S}(t)\hat{\rho}^F(0)\hat{S}'(t) \end{pmatrix}. \quad (۱۷۱-۴)$$

عملگر چگالی کاهش یافته میدان از گرفتن رد روی حالت های اتمی به دست می‌آید.

$$\hat{\rho}^F(t) = \text{Tr}_A \hat{\rho}(t) = \hat{C}(t)\hat{\rho}^F(0)\hat{C}(t) - \hat{S}(t)\hat{\rho}^F(0)\hat{S}'(t). \quad (۱۷۲-۴)$$

عناصر ماتریس چگالی برای میدان عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{nm}^F(t) &\equiv \langle n | \hat{\rho}^F(t) | m \rangle \\ &= \langle n | \hat{C}(t)\hat{\rho}^F(0)\hat{C}(t) | m \rangle - \langle n | \hat{S}(t)\hat{\rho}^F(0)\hat{S}'(t) | m \rangle. \end{aligned} \quad (۱۷۳-۴)$$

از طرف دیگر، با گرفتن رد روی حالت های میدان، عملگر چگالی کاهش یافته اتم را به دست می‌آوریم.

$$\hat{\rho}^A(t) = \text{Tr}_F \hat{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho}(t) | n \rangle. \quad (۱۷۴-۴)$$

عناصر ماتریسی عملگر چگالی عبارت‌اند از

$$\langle i | \hat{\rho}^A(t) | j \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle i, n | \hat{\rho}(t) | j, n \rangle = \rho_{ij}^A(t) \quad (۱۷۵-۴)$$

که در آن $i, j = e, g$ عناصر قطری $\rho_{ee}^A(t)$ و $\rho_{gg}^A(t)$ به ترتیب جمعیت حالت برانگیخته و حالت پایه را می‌دهند که در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$\rho_{gg}^A(t) + \rho_{ee}^A(t) = 1. \quad (۱۷۶-۴)$$

وارونی اتمی به صورت زیر داده می‌شود:

$$W(t) = \rho_{ee}^A(t) - \rho_{gg}^A(t) = 2\rho_{ee}^A(t) - 1. \quad (۱۷۷-۴)$$

از معادلات ۱۷۱-۴ و ۱۷۵-۴ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \rho_{ee}^A(t) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{C}(t) \hat{\rho}^F(0) \hat{C}(t) | n \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n | \hat{\rho}^F(0) | n \rangle \cos^2(\lambda t \sqrt{n+1}). \end{aligned} \quad (۱۷۸-۴)$$

اگر میدان ابتدا در یک حالت خالص باشد، یعنی

$$|\psi_F\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (۱۷۹-۴)$$

در این صورت

$$\hat{\rho}^F(0) = |\psi_F\rangle \langle \psi_F| \quad (۱۸۰-۴)$$

بنابراین

$$\rho_{ee}^A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 \cos^2(\lambda t \sqrt{n+1}) \quad (۱۸۱-۴)$$

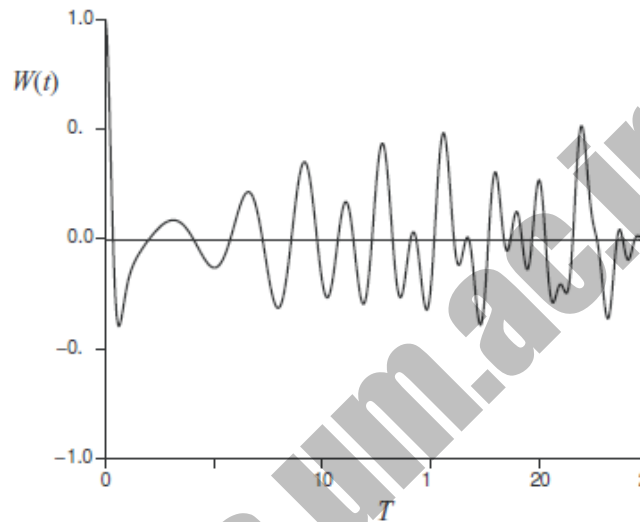
که با قرار دادن در معادله ۱۷۷-۴ همان وارونی اتمی معادله ۱۲۳-۴ را می‌دهد. حال فرض می‌کنیم میدان ابتدا در یک حالت گرمایی (یک حالت مخلوط) باشد، یعنی

$$\hat{\rho}^F(0) = \hat{\rho}_{Th} = \sum_n P_n |n\rangle \langle n| \quad (۱۸۲-۴)$$

که در آن P_n توسط معادله ۱۴۵-۴ داده می‌شود. از معادله ۱۴۷-۴ وارونی اتمی برای یک اتم که به طور تشدید با میدان گرمایی برهم کنش دارد را به صورت زیر به دست می‌آوریم [۱۶]:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(2\lambda t \sqrt{n+1}). \quad (۱۸۳-۴)$$

در شکل ۴-۹، $W(t)$ را نسبت به λt برای یک میدان گرمایی با میانگین عدد فوتونی $\bar{n} = 2$ رسم کرده‌ایم. تجزیه و تحلیل این رفتار را برعهده خواننده می‌گذاریم.



شکل ۴-۹ واریونی اتمی نسبت به زمان برای اتمی که ابتدا در حالت برانگیخته قرار دارد و میدانی که در حالت گرمایی با $\bar{n} = 2$ است. در اینجا نیز $T = \lambda t$ است.

۴-۸ مدل جینز - کامینگز با واکوکی بزرگ: برهم‌کنش پاشنده

تا اینجا عمدتاً فرض کردیم واکوکی برابر صفر باشد، $\Delta = \omega_0 - \omega = 0$. یک تغییر مهم در مدل اولیه جینز - کامینگز شرایطی است که در آن واکوکی آنقدر بزرگ باشد، به‌طوری که گذارهای اتمی مستقیم رخ ندهد، ولی درعین‌حال برهم‌کنش‌های «پاشنده» بین یک اتم منفرد و میدان کاواک رخ دهند [۱۷]. این نسخه مدل جینز - کامینگز در چند کاربرد مرتبط با تست‌های بنیادی مکانیک کوانتومی حائز اهمیت است. بعضی از آن‌ها را در فصل ۱۰ مورد بحث قرار خواهیم داد.

همان‌طور که در پیوست «ج» نشان داده شده است، هامیلتونی برهم‌کنش مؤثر اتم - میدان در حالت واکوکی بزرگ به‌صورت زیر است:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar \chi [\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_3], \quad (۱۸۴-۴)$$

که در آن $\chi = \lambda^2 / \Delta$. توجه کنید که $|e\rangle\langle e| = \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-$. فرض کنید حالت اولیه سیستم اتم - میدان $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|n\rangle$ باشد، یعنی اتم در حالت پایه و میدان در یک حالت تعداد باشد؛ در این صورت، برطبق

هایملتونِ برهم‌کنش بالا، حالت سیستم در لحظه $t > 0$ عبارت است از

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{i\chi nt}|g\rangle|n\rangle \quad (185-4)$$

درحالی‌که برای حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |e\rangle|n\rangle$ داریم:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{i\chi(n+1)t}|e\rangle|n\rangle. \quad (186-4)$$

که مشاهده می‌شود چیز جالب توجهی رخ نمی‌دهد؛ تنها یک ضریب فاز غیرقابل اندازه‌گیری ظاهر شده است. از طرف دیگر، اگر حالت اولیه میدان یک حالت همدوس باشد، برای $|\psi(0)\rangle = |g\rangle|\alpha\rangle$ داریم:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{i\chi(n+1)t}|e\rangle|n\rangle. \quad (187-4)$$

و برای حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |e\rangle|\alpha\rangle$ داریم:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t/\hbar}|\psi(0)\rangle = e^{-i\chi t}|e\rangle|\alpha\rangle e^{-i\chi t}. \quad (188-4)$$

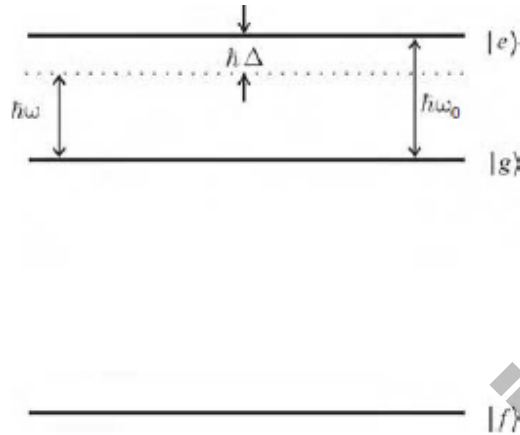
شایان توجه است که دامنه حالت همدوس به اندازه زاویه χt در فضای فاز دوران پیدا می‌کند و جهت دوران به حالت اولیه اتم بستگی دارد. حال فرض کنید ابتدا اتم در یک برهم‌نهی از حالت‌های پایه و برانگیخته باشد. برای سادگی، این برهم‌نهی را یک حالت «متوازن» به صورت $|\psi_{\text{atom}}\rangle = (|g\rangle + e^{i\phi}|e\rangle)/\sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم که در آن ϕ یک ضریب فاز است. با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |\psi_{\text{atom}}\rangle = |\alpha\rangle$ ای سیستم اتم-میدان داریم:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}_{\text{eff}}t/\hbar}|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|\alpha\rangle e^{i\chi t} + e^{-i(\chi t - \phi)}|e\rangle|\alpha\rangle e^{-i\chi t}) \quad (189-4)$$

این حالت دارای ویژگی جالبی است از این نظر که بین اتم و میدان درهم‌تنیدگی وجود دارد. اگر فرض کنیم $\chi t = \pi/2$ داریم:

$$\left|\psi\left(\frac{\pi}{2\chi}\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|i\alpha\rangle - i e^{i\phi}|e\rangle|-i\alpha\rangle). \quad (190-4)$$

توجه کنید که برطبق تصویر فضای فاز، دو حالت همدوس در معادله ۱۹۰-۴ به اندازه 180° ، بیشترین مقدار ممکن، از یکدیگر فاصله دارند. حالت‌های همدوسی که فازشان به اندازه 180° اختلاف داشته باشد، بیشترین تشخیص‌پذیری را دارند، به این مفهوم که اگر $|\alpha|$ به قدر کافی بزرگ باشد، هیچ گونه هم‌پوشانی بین این دو حالت وجود ندارد. درواقع، این ادعا حتی وقتی $|\alpha|$ برابر $\sqrt{2}$ باشد، ادعای درستی است. برای مقادیر خیلی بزرگ $|\alpha|$ دو حالت همدوس را گوییم به طور ماکروسکوپی تشخیص‌پذیرند و برای مقادیر نه‌چندان بزرگ، آن‌ها را تشخیص‌پذیر مزوسکوپی گوییم.



شکل ۴-۱۰ ترازهای $|e\rangle$ و $|g\rangle$ اتم با میدان درحال تشدید قرار ندارند، به‌طوری‌که گذارهای مستقیم بین آن‌ها اتفاق نمی‌افتد و تنها برهم‌کنش پاشنده رخ می‌دهد. حالت نهایی $|f\rangle$ و $|g\rangle$ آن‌قدر دور از تشدید با میدان هستند که حتی برهم‌کنش پاشنده هم اتفاق نمی‌افتد.

حالت درهم‌تنیده (۴-۱۹۰) ممکن است داستان گربه‌نگون‌بخت شرودینگر را تداعی کند، حالتی که در برزخ قرار دارد، یعنی حالتی درهم‌تنیده بین مرگ و زندگی و واپاشی کردن و نکردن اتم میکروسکوپی. بنابراین حالت درهم‌تنیده «پارادوکس» مشهور شرودینگر به‌صورت زیر است:

$$|\psi_{atom-cat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|> \text{گربه زنده} | + |> \text{اتم نکرده واپاشی} | \right] \quad (۴-۱۹۱)$$

تناظر بین این حالت و ۴-۱۹۰ کاملاً آشکار است؛ حالت‌های اتم دوترازی نقش اتم رادیواکتیو و دو حالت میدان همدوس نقش گربه را ایفا می‌کنند.

بالاخره یک حالت اولیه دیگر برای اتم وجود دارد که اغلب بررسی می‌شود. فرض کنید مانند آنچه در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است، یک حالت اتمی دیگر مانند $|f\rangle$ با انرژی $E_f \ll E_i$ و با پارامتر مخالف با $|g\rangle$ وجود داشته باشد. فرض می‌شود که کاواک شامل مدی که تشدید بین $g \leftrightarrow f$ ایجاد کند، نباشد و به‌علاوه فرض می‌کنیم که حالت $|f\rangle$ نسبت به مدهای موجود در کاواک دور از تشدید باشد، به‌طوری‌که هیچ برهم‌کنش پاشنده‌ای نیز وجود نداشته باشد. بنابراین اگر اتم در حالت اولیه $|f\rangle$ و میدان در حالت اولیه همدوس $|\alpha\rangle$ باشد، حالت حاصل ضرب $|\alpha\rangle |f\rangle$ به همان صورت باقی می‌ماند، یعنی تحول پیدا نمی‌کند. حال فرض کنید اتم در یک برهم‌نهی به‌صورت $|\psi_{atom}\rangle = (|g\rangle + e^{i\phi}|f\rangle)/\sqrt{2}$ فراهم شده باشد. در این صورت، می‌توان نشان داد که حالت اولیه اتم-میدان $|\psi(0)\rangle = |\psi_{atom}\rangle |\alpha\rangle$ به‌صورت زیر تحول می‌یابد:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle |\alpha\rangle e^{i\chi t} + e^{i\phi} |f\rangle |\alpha\rangle). \quad (۴-۱۹۲)$$

در این صورت، تنها یک مؤلفه از برهم‌نهی اتمی اولیه باعث انتقال فاز در حالت همدوس می‌شود، نکته‌ای که

باعث مزیت در بعضی از کاربردها می‌گردد. برای $\chi t = \pi/2$ داریم:

$$\left| \psi \left(\frac{\pi}{2\chi} \right) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|-\alpha\rangle + e^{i\phi}|f\rangle|\alpha\rangle), \quad (۱۹۳-۴)$$

که یک نسخه دیگر از حالت گربه شرودینگر است. در فصل‌های ۷ و ۸ و ۱۰ بیشتر در رابطه با گربه شرودینگر بحث خواهیم کرد.

۹-۴-۹-۴ تعمیم‌های مدل جینز - کامینگز

تعمیم‌های بسیاری برای مدل جینز - کامینگز اولیه با انواع مختلف برهم‌کنش وجود دارد. از بین آن‌ها می‌توان مدل‌های شامل گذارهای دوفوتونی، مدل‌های چندمدی و چندترازی، مدل‌های پیوند رامن، مدل‌های دوکانالی و غیره را نام برد. در اینجا به این مدل‌ها نمی‌پردازیم و خواننده را به مقاله‌های مروری در بخش مراجع [۱۴ و ۱۹] ارجاع می‌دهیم. بعضی از این تعمیم‌ها به عنوان تمرین در آخر فصل آمده است. به علاوه، برهم‌کنش‌هایی از نوع جینز - کامینگز در حرکت ارتعاشی یک یون در تله الکترومغناطیسی نیز رخ می‌دهد. ساده‌ترین نمونه آن در فصل ۱۰ بررسی خواهد شد.

۱۰-۴-۱۰-۴ تجزیه اشمیت^۱ و آنتروپی فون نویمان^۲ برای مدل جینز - کامینگز

این فصل را با بحث درباره تجزیه اشمیت و آنتروپی فون نویمان مربوط به آن، از منظری که به مدل جینز - کامینگز مرتبط شود، به پایان می‌بریم. از آنجا که این سیستم یک سیستم دوجزئی است، همان‌طوری که در پیوست «ا» به آن اشاره شده است، برای آن تجزیه اشمیت ممکن است. قبلاً جواب معادله شرودینگر وابسته به زمان را در معادله ۴-۱۲۰ نشان دادیم. در اینجا آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t)|g\rangle|n\rangle + b_n(t)|e\rangle|n\rangle], \quad (۱۹۴-۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_n(t) &= C_g C_n \cos(\lambda t \sqrt{n}) - i C_e C_{n-1} \sin(\lambda t \sqrt{n}), \\ b_n(t) &= C_e C_n \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) - i C_g C_{n+1} \sin(\lambda t \sqrt{n+1}). \end{aligned} \quad (۱۹۵-۴)$$

اما مطابق تجزیه اشمیت در هر لحظه t می‌توان همواره پایه‌های $\{|u_i(t)\rangle\}$ را برای اتم و پایه‌های $\{|v_i(t)\rangle\}$ را برای میدان یافت، به‌طوری که حالت خالص سیستم را بتوان به صورت زیر نوشت:

$$|\Psi(t)\rangle = g_1(t)|u_1(t)\rangle|v_1(t)\rangle + g_2(t)|u_2(t)\rangle|v_2(t)\rangle. \quad (۱۹۶-۴)$$

1. Schmidt
2. von Neumann

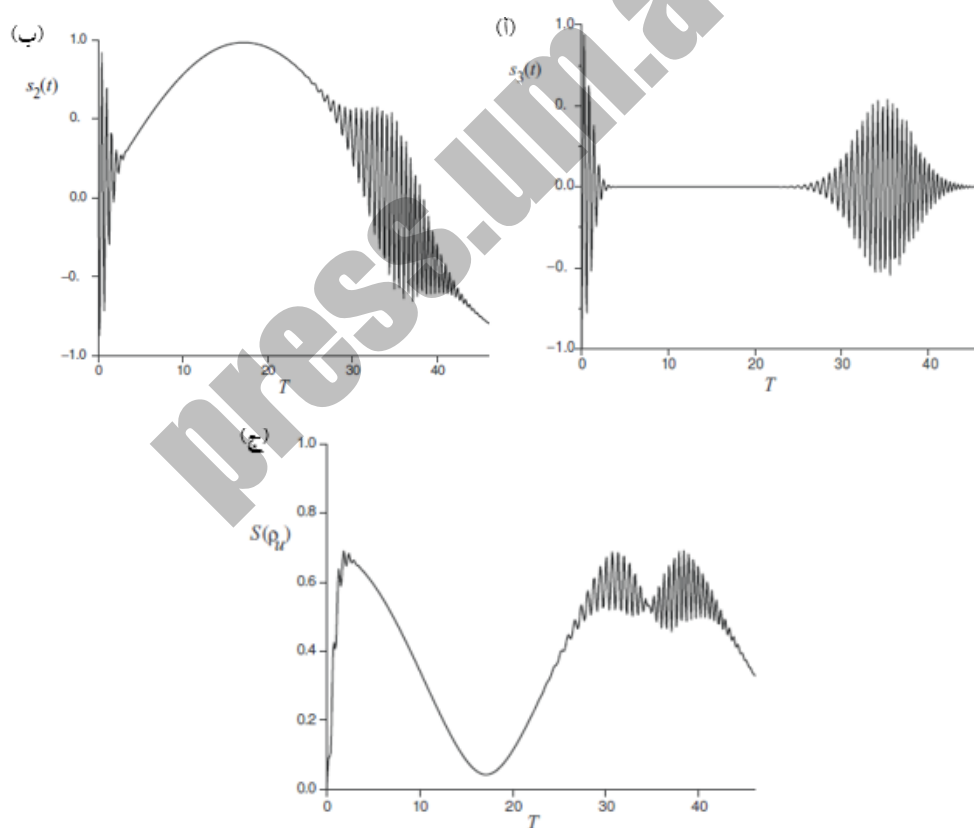
در این صورت، ماتریس‌های چگالی کاهش‌یافته اتم و میدان یکسان‌اند.

$$\rho_u(t) = \begin{pmatrix} |g_1(t)|^2 & 0 \\ 0 & |g_2(t)|^2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_v(t) = \begin{pmatrix} |g_1(t)|^2 & 0 \\ 0 & |g_2(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (۱۹۷-۴)$$

برای اینکه ضرائب $g_1(t)$ و $g_2(t)$ و ویژه‌بردارهای $|u_i\rangle$ و $|v_i\rangle$ را به دست آوریم، ابتدا عملگر چگالی کاهش‌یافته اتم در پایه برهنه $|e\rangle$ و $|g\rangle$ را محاسبه می‌کنیم و سپس به دست می‌آوریم:

$$\rho_u = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(t)|^2 & \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)b_n^*(t) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)a_n^*(t) & \sum_{n=0}^{\infty} |b_n(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (۱۹۸-۴)$$



شکل ۴-۱۱ نمودارهای s_2, s_3 و $S(\hat{\rho}_u)$ نسبت به λt زمان مقیاسی $T = \lambda t$ است

سپس می‌توان مانند آنچه در معادله ۲۵-آ آمده است، ماتریس چگالی را برحسب مؤلفه‌های بردار بلاخ نوشت.

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t)b_n^*(t) + b_n(t)a_n^*(t)], \\ s_2(t) &= -i \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t)b_n^*(t) - b_n(t)a_n^*(t)], \\ s_3(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} [|a_n(t)|^2 - |b_n(t)|^2]. \end{aligned} \quad (۱۹۹-۴)$$

در این صورت، همان‌طور که در پیوست «ا» آمده است، ضرائب $g_1(t)$ و $g_2(t)$ را می‌توان به‌صورت زیر برحسب طول بردار بلاخ نوشت:

$$g_1(t) = \frac{1}{2}[1 + |s(t)|], \quad g_2(t) = \frac{1}{2}[1 - |s(t)|]. \quad (۲۰۰-۴)$$

توجه کنید که مد میدان که قبلاً در یک فضای بی‌نهایت بعدی با پایه‌های حالت فوک توصیف می‌شد، اکنون به یک سیستم «دوترازی» در پایه‌های اشمیت تبدیل شده است. طول بردار بلاخ سنج‌های برای خالص بودن سیستم اتم-میدان است. طول بردار بلاخ برای حالت‌های خالص اتم و میدان برابر واحد است. همان‌طور که در پیوست «ا» آمده است، فایده تجزیه اشمیت این است که به آسانی می‌توان عبارتی برای آنتروپی فون‌نویمن به‌دست آورد که برای هریک از زیرسیستم‌های مدل جینز-کامینگز عبارت است از

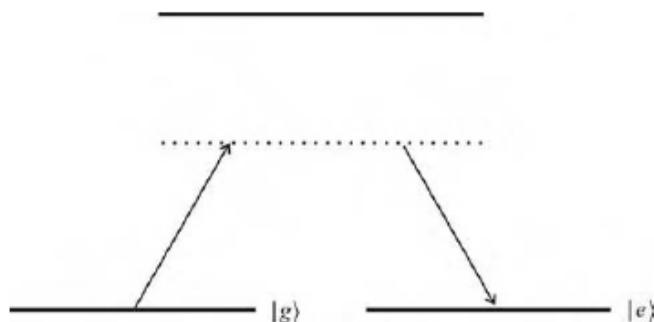
$$S(\hat{\rho}_u) = -g_1(t) \ln g_1(t) - g_2(t) \ln g_2(t) = S(\hat{\rho}_v). \quad (۲۰۱-۴)$$

هرگاه $|s| = 1$ باشد، داریم $s(\hat{\rho}_u) = 0 = s(\hat{\rho}_v)$. در شکل ۴-۱۱ برای اتمی که ابتدا در حالت برانگیخته و میدانی که ابتدا در یک حالت همدوس با $\alpha = \sqrt{30}$ قرار دارد، (ا) مؤلفه s_3 بردار بلاخ، (ب) مؤلفه s_2 و (ج) آنتروپی فون‌نویمن $S(\hat{\rho}_u)$ را نسبت به زمان مقیاس شده $T = \lambda t$ رسم کرده‌ایم. با این شرط اولیه به‌خصوص همواره $s_1 = 0$ است. توجه کنید که s_3 باعث فروپاشی و سپس احیای وارونی اتم می‌گردد و s_2 در نقطه‌ای در خلال زمان فروافت^۱ به یک نزدیک می‌شود که نشان می‌دهد اتم و میدان در آن زمان در حالت خالص قرار دارند. البته آنتروپی فون‌نویمن در آن نقطه، مقدارِ مینیمم خود را دارد. این نتیجه ممکن است قدری عجیب و خلاف انتظار به‌نظر برسد. این رفتار ابتدا با یک نوع دیگری از محاسبات توسط جی-باناگلوچ^۲ مشاهده شد [۲۰] و بعداً توسط فونیکس^۳ و نایت [۲۱] مورد بررسی بیشتر قرار گرفت.

1. quiescent
2. Gea-Banacloche
3. Phenix

مسائل

- ۱- مدل نیمه کلاسیکی رابی (یعنی یک اتم دوترازی با یک میدان کلاسیکی) در تقریب RWA که توسط معادله ۴-۷۴ داده می‌شود را در نظر بگیرید. با فرض اینکه اتم ابتدا در حالت برانگیخته است، جواب این معادله را پیدا کنید. وارونی اتمی را به صورت تابعی از زمان محاسبه کنید.
- ۲- با استفاده از نتیجه مسئله قبل، مقدار چشمداشتهی وابسته به زمان عملگر گشتاور دوقطبی اتمی $\hat{d} = d(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$ را برای مورد تشدید به دست آورید. تحول گشتاور دوقطبی را با وارونی اتمی برای یک شرط تشدید یکسان مقایسه نمایید و در مورد مشابهت‌ها و اختلافات آن‌ها بحث کنید.
- ۳- در یک مدل کاملاً کوانتیده اتم دوترازی که با یک میدان کوانتیده در تقریب RWA برهم کنش دارد، مدل جینز-کامینگز، جواب دقیق تشدید را برای حالتی که در آن ابتدا اتم در حالت برانگیخته و میدان در حالت تعداد $|n\rangle$ قرار داشت، به دست آوردیم (معادلات ۴-۱۰۷ تا ۴-۱۱۶ را ببینید). می‌دانیم که نوسانات رابی وارونی اتمی برای این مورد، مانند مدل نیمه کلاسیکی، تناوبی است. با استفاده از این جواب، مقدار چشمداشتهی عملگر دوقطبی اتمی را به دست آورید و آن را با نتیجه سؤال قبل مقایسه کنید. آیا به هیچ طریقی تحول زمانی گشتاور دوقطبی اتمی به آنچه در مورد نیمه کلاسیکی به دست آمد، شباهتی دارد؟ در این مورد بحث کنید.
- ۴- مقدار چشمداشتهی گشتاور دوقطبی اتمی که توسط مدل جینز-کامینگز داده می‌شود را برای حالتی که میدان ابتدا در یک حالت همدوس باشد، به دست آورید. این نتیجه را با دو نتیجه قبل مقایسه کنید. برای این کار، باید مقدار چشمداشتهی گشتاور دوقطبی را بر حسب زمان رسم کنید.
- ۵- در این فصل، دینامیک مدل جینز-کامینگز را با فرض تشدید دقیق، $\Delta = 0$ ، به دست آوردیم. این مسئله را برای مورد $\Delta \neq 0$ انجام دهید. نمودار وارونی اتمی را به دست آورید و به اثر غیر صفر بودن واکوکی بر فروپاشی و احیای نوسانات رابی توجه نمایید و آن را محاسبه کنید.
- ۶- مدل جینز-کامینگز تشدید را برای حالت اولیه گرمایی، مانند آنچه در بخش ۴-۷ آمده است، در نظر بگیرید. فرض کنید ابتدا اتم در حالت برانگیخته باشد. فروپاشی نوسانات رابی را بررسی کنید و وابستگی زمانی فروپاشی به میانگین عدد فوتونی میدان گرمایی را تعیین کنید.
- ۷- یک مدل ساده از پراکندگی رامان تبهکن به صورت نشان داده شده در شکل ۴-۱۲ (که در آن $E_g = E_e$ است) را که توسط هامیلتونی برهم کنش $\hat{H}_I = \hbar\lambda\hat{a}^\dagger\hat{a}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$ توصیف می‌شود و در آن $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ و $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ است، در نظر بگیرید.
 - ا. حالت‌های پوشیده برای این مدل را به دست آورید.
 - ب. با این فرض اولیه که میدان در یک حالت همدوس و اتم در حالت پایه‌اش قرار دارد، وارونی اتمی را به دست آورید و نشان دهید که احیای نوسانات رابی منظم و کامل است.
 - ج. وارونی اتمی را برای یک حالت اولیه گرمایی به دست آورید.



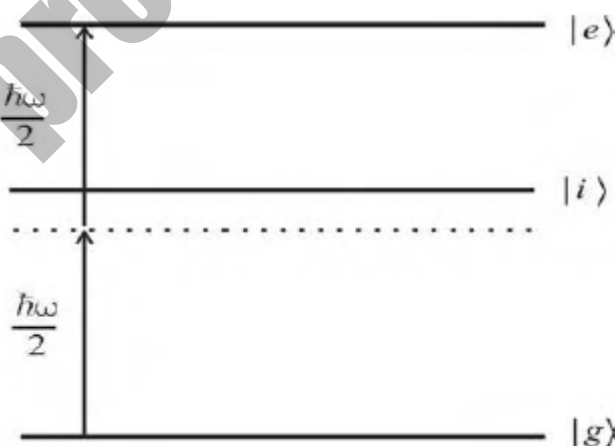
شکل ۴-۱۲ نمودار تراز انرژی مدل تیهگن رامان جفت‌شده. خط نقطه‌چین معرف حالت واسطه «مجازی» است که خیلی دور از تراز حقیقی (خط پر بالایی) است که قرار است اشغال شود.

۸- تعمیم تشدید دوفوتونی مدل جینز-کامینگز با هامیلتونی مؤثر $\hat{H}_{eff} = \hbar\eta(\hat{a}^2\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^{2\dagger}\hat{\sigma}_-)$ توصیف می‌شود که در آن برای سهولت از جمله انتقال استارک صرف‌نظر کرده‌ایم. این هامیلتونی معرف جذب و گسیل دو فوتون بین ترازهای اتمی با پارته‌های یکسان است. این فرایند در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده است که در آن خط نقطه‌چین معرف یک حالت واسطه مجازی با پارته مخالف است.

ا. حالت‌های پوشیده برای این سیستم را به‌دست آورید.

ب. با این فرض که اتم ابتدا در حالت پایه و میدان در یک حالت تعداد باشد، وارونی اتمی را برای این مدل به‌دست آورید. همین مسئله را برای یک حالت همدوس تکرار کنید. درمورد پدیده‌های فرپاشی و احیا برای این حالت‌ها بحث کنید.

ج. وارونی اتمی برای یک حالت اولیه گرمایی را به‌دست آورید.



شکل ۴-۱۳ نمودار تراز انرژی برای فرایند تشدید دو فوتون. حالت‌های $|e\rangle$ و $|g\rangle$ دارای پارته یکسان هستند، درحالی‌که حالت واسطه $|i\rangle$ دارای پارته مخالف آن‌هاست. خط نقطه‌چین معرف تراز اتمی مجازی است که با حالت $|i\rangle$ وافاز است.

$$\hat{H}_{eff} = \hbar\eta(\hat{a}\hat{b}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{\sigma}_-)$$

۹- تغییر دومی در مدل دوفوتونی مسئله قبل توسط هامیلتونی (۱۰-۱) مدل جینز-کامینگز تشدید را برای موردی که هر دو مد ابتدا در حالت همدوس باشند، به دست آورید. در مورد پدیده‌های فروپاشی و احیا بحث کنید.

۱۰- مدل جینز-کامینگز تشدید را برای موردی که در آن ابتدا اتم در حالت برانگیخته و میدان در یک حالت همدوس با $\alpha = \sqrt{30}$ قرار دارد، در نظر بگیرید.

ا. با گرفتن رد از عملگر چگالی روی حالت‌های اتمی یا میدان عملگر، چگالی کاهش یافته را به دست آورید (پیوست «ا» را ببینید). میزان درهم تنیدگی اتم و میدان را به صورت تابعی از زمان تعیین کنید. به این نکته که در نقطه وسط بین فروپاشی اولیه و اولین احیای نوسانات رابی چه اتفاقی می افتد، مخصوصاً توجه کنید. آیا این رفتار شگفت‌انگیز است؟ چه ارتباطی، اگر وجود دارد، بین نتیجه به دست آمده با نتایج بخش ۴-۱۰ وجود دارد؟

ب. نمودارهای (پربندی یا سه بعدی) تابع Q ی میدان معادله ۳-۱۱ را برای زمان‌های مختلف بین $t = 0$ و زمان اولین احیای نوسانات رابی به دست آورید.

۱۱- حالت اتم-میدان (۴-۱۹۳) را با فرض $\phi = 0$ در نظر بگیرید. فرض کنید راهی برای تعیین حالت اتمی وجود دارد (مانند آنکه از طریق یونش میدان که در فصل ۱۰ به آن خواهیم پرداخت). به عنوان مثال، اگر اتم در حالت $|g\rangle$ باشد، حالت میدان به صورت $|\langle g|\psi(\pi)\rangle|/|\langle g|\psi(\pi)\rangle| = |\alpha|$ در خواهد آمد، با نتیجه مشابهی برای وقتی که اتم در حالت $|f\rangle$ باشد (پیوست «د» را ببینید). حال فرض کنید به طریقی بتوان اتم را در حالت‌های برهم نهی $|s_{\pm}\rangle = (|g\rangle \pm |f\rangle)/\sqrt{2}$ آشکار کرد. حالت‌های میدان در این صورت چگونه خواهند بود؟

۱۲- مسئله بحث شده در بخش ۴-۱۰ را دوباره در نظر بگیرید، با این تفاوت که حالت اولیه اتم در یک برهم نهی $|\psi(0)\rangle_{\text{atom}} = (|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$ قرار داشته باشد. نمودارهای مورد نظر مؤلفه‌های بردار بلاخ و آنتروپی فون‌نویمن را رسم کنید. این نتایج را با نتایج موردی که در آن اتم ابتدا در حالت برانگیخته است، مقایسه نمایید.

مراجع

- [1] Sakurai, J. J. (1994). *Modern Quantum Mechanics*, revised edition (Reading: Addison-Wesley, p. 316).
- [2] Two standard references on nuclear magnetic resonance, wherein the rotating wave approximation is discussed, are: Abragam, A. (1961). *Principles of Nuclear Magnetism* (Oxford: Oxford University Press); Slichter, C. P. *Principles of Magnetic Resonance*, 3rd edition (Berlin: Springer, 1992).
- [3] See Reference [1], p. 332.
- [4] Einstein, A. (1916). *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, 18, 318; *Mitt. Phys. Ges. Zürich*, 16 (1916), 47; *Phys. Zeitschr.*, 18 (1917), 121. This last article appears in an English translation from the German in ter Haar, D. *The Old Quantum Theory* (Oxford: Pergamon, 1967) and is reprinted in Knight, P. L. and Allen, L. *Concepts in Quantum Optics* (Oxford: Pergamon, 1983). See also, Pais A. *Subtle is the Lord... The Science and Life of Albert Einstein* (Oxford: Oxford University Press, 1982), pp. 402–415.
- [5] Milonni, P. W. (1984). *Am. J. Phys.*, 52, 340.

- [6] Weisskopf V. F. and Wigner, E. (1930). *Z. Phys.*, 63, 54. See also, Sargent, M. III, Scully, M. O. and Lamb, Jr., W. E. *Laser Physics* (Reading: Addison-Wesley, 1974), p. 236.
- [7] Rabi, I. I. (1937). *Phys. Rev.*, 51, 652.
- [8] See References [2] and Bloch, F. (1946). *Phys. Rev.*, 70, 460; Hahn E. L., *Phys. Rev.*, 80 (1950), 580.
- [9] See, for example, Shore, B. W. (1990). *The Theory of Coherent Atomic Excitation* (New York: Wiley), and references therein.
- [10] Jaynes, E. T. and Cummings, F. W. (1963). *Proc. IEEE*, 51, 89.
- [11] Sanchez-Mondragon, J. J. Narozhny, N. B. and Eberly, J. H. (1983). *Phys. Rev. Lett.*, 51, 550; Agarwal, G. S. (1985). *J. Opt. Soc. Am. B*, 2, 480.
- [12] Cummings, F. W. (1965). *Phys. Rev.*, 149, A1051; Stenholm, S. (1973). *Phys. Rep.*, 6, 1; Meystre, P. Geneux, E. Quattropiani, A. and Faust, A. (1975). *Nuovo Cim. B*, 25, 521; *J. Phys. A*, 8, 95 (1975).
- [13] Eberly, J. H. Narozhny, N. B. and Sanchez-Mondragon, J. J. (1980). *Phys. Rev. Lett.*, 44, 1323; Narozhny, N. B. Sanchez-Mondragon, J. J. and Eberly, J. H. (1981). *Phys. Rev. A*, 23, 236; Knight, P. L. and Radmore, P. M. (1982). *Phys. Rev. A*, 26, 676.
- [14] Yoo, H. J. and Eberly, J. H. (1985). *Phys. Rep.*, 118, 239; Shore, B. W. and Knight, P. L. (1993). *J. Mod. Opt.*, 40, 1195.
- [15] Knight, P. L. and Milonni, P. W. (1980). *Phys. Rep.*, 66, 21.
- [16] Knight, P. L. and Radmore, P. M. (1982). *Phys. Lett. A*, 90, 342. Note that in this paper, the atom is assumed to be initially in the ground state
- [17] Savage, C. M. Braunstein, S. L. and Walls, D. F. (1990). *Opt. Lett.*, 15, 628.
- [18] Schrödinger, E. (1935). *Naturwissenschaften*, 23, 807, 823, 844. An English translation can be found in *Quantum Theory of Measurement*, edited by J. Wheeler and W. H. Zurek (Princeton: Princeton University Press, 1983).
- [19] Le Kien, F. and Shumovsky, A. S. (1991). *Intl. J. Mod. Phys. B*, 5, 2287; A. Messina, S. Maniscalco and Napoli, A. *J. Mod. Opt.*, 50 (2003), 1.
- [20] Gea-Banacloche, J. (1990). *Phys. Rev. Lett.*, 65, 3385.
- [21] Phoenix, S. J. D. and Knight, P. L. (1991). *Phys. Rev. A*, 44, 6023. See also Phoenix, S. J. D. and Knight, P. L. (1988). *Ann. Phys. (N. Y.)*, 186, 381

کتاب‌شناسی

مراجع زیر، علاوه بر آنچه در بالا به آن اشاره شد، انتخابی از کتاب‌های مفید در مبحث برهم‌کنش اتم-میدان هستند که در آن‌ها میدان را هم به صورت کلاسیکی و هم به صورت کوانتومی با جهت‌گیری‌ای که بیشتر برای خوانندگان اپتیک کوانتومی مفید باشد، ارائه می‌دهند:

- Louisell, W. H. *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley, 1973).
- Allen L. and Eberly, J. H. *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (New York: Wiley, 1975; Mineola: Dover, 1987).
- Loudon, R. *The Quantum Theory of Light*, 3rd edition (Oxford: Oxford University Press, 2000).
- Weissbluth, M. *Photon-Atom Interactions* (New York: Academic Press, 1989).
- Meystre, P. and Sargent, M. III, *Elements of Quantum Optics*, 3rd edition (Berlin: Springer, 1999).
- Cohen-Tannoudji, C. Dupont-Roc, J. and Grynberg, G. *Atom-Photon Interactions* (New York: Wiley, 1992).
- Mandel, L. and Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).

توابع همدوسی کوانتومی

در این فصل نظریه‌های کلاسیکی و کوانتومی همدوسی را بررسی می‌کنیم. با شروع از مثال تداخل یانگ مفهوم نظریه همدوسی مرتبه اول کلاسیکی و توابع همدوسی مرتبه اول را به اختصار مورد بحث قرار می‌دهیم. سپس به معرفی توابع همدوسی مرتبه اول کوانتومی می‌پردازیم و فرمول‌بندی کاملاً کوانتومی تداخل یانگ را ارائه می‌دهیم. سپس توابع همدوسی مرتبه دوم که توابع هم‌بستگی شدت-شدت نیز نامیده می‌شوند را معرفی می‌کنیم و به ارتباط آن‌ها با آزمایش هانبری، براون^۱ و تویس^۲ که یکی از توسعه‌های پیشگام اپتیک کوانتومی است، می‌پردازیم. بالاخره این فصل را با وارد شدن به تمام توابع همدوسی مرتبه‌های بالاتر و کاربرد آن‌ها به عنوان ملاکی برای همدوسی کامل میدان تابشی کوانتیده به پایان می‌بریم.

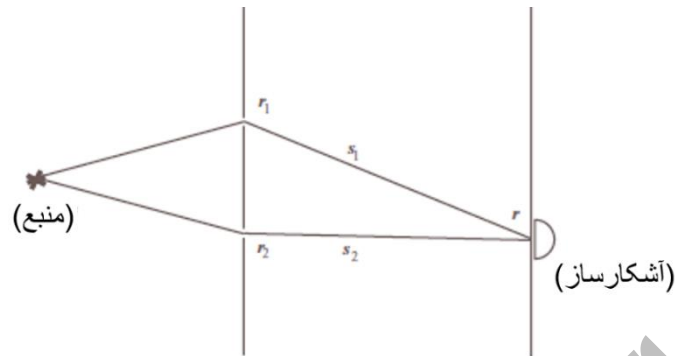
۱-۵ توابع همدوسی کلاسیکی

ابتدا به اختصار به مرور همدوسی کلاسیکی می‌پردازیم [۱] و برای این کار از آزمایش دو شکاف یانگ مطابق شکل ۱-۵ استفاده می‌کنیم. تحت شرایط خاصی، فرایندهای تداخلی روی پرده ظاهر خواهند شد. اگر چشمه دارای پهنای باند $\Delta\omega$ و اختلاف راه برابر $\Delta s = |s_1 - s_2|$ باشد، در صورتی که $\Delta s \leq c/\Delta\omega$ باشد، تداخل رخ خواهد داد. $\Delta s_{\text{coh}} \leq c/\Delta\omega$ را طول همدوسی و $\Delta t_{\text{coh}} = \Delta s_{\text{coh}}/c = 1/\Delta\omega$ را زمان همدوسی می‌نامیم. فرایندهای تداخلی وقتی $\Delta t_{\text{coh}} \Delta\omega \approx 1$ باشد، قابل مشاهده‌اند. میدان در روی پرده یا در محل آشکارساز در زمان t را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از میدان‌ها در زمان‌های قبل تر $t_1 = t - s_1/c$ و $t_2 = t - s_2/c$ نوشت. یعنی

$$E(\mathbf{r}, t) = K_1 E(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 E(\mathbf{r}_2, t_2) \quad (1-5)$$

1. Hanbury Brown

2. Twiss



شکل ۱-۵ طرح‌واره استاندارد برای آزمایش تداخل دو شکاف ینگ

که در آن $E(\mathbf{r}_i, t_i)$ میدان مختلط در روی پرده است که از شکاف i ام رسیده و K_1 و K_2 ضرایب هندسی مختلط هستند که به ترتیب به فاصله‌های s_1 و s_2 بستگی دارند. برای سهولت در اینجا میدان‌ها را کمیت‌های اسکالر در نظر می‌گیریم و معادل این فرض است که میدان‌ها دارای قطبش‌های یکسان باشند. از اثرات تفرقی وابسته به شکاف‌ها صرف نظر می‌شود. طول اپتیکی آشکارسازها دارای زمان پاسخ طولانی است و تنها می‌تواند میانگین شدت نور را اندازه‌گیری کنند. بنابراین شدت نور در محل آشکارساز به صورت زیر داده می‌شود:

$$I(\mathbf{r}) = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle \quad (2-5)$$

که در اینجا میانگین‌گیری نسبت به زمان انجام شده است، یعنی

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (3-5)$$

فرض می‌کنیم این میانگین ماناست، یعنی مستقل از انتخاب مبدأ زمان است. بنابه فرضیه ارگودیک، میانگین زمانی با میانگین آنسامبلی معادل است. در این صورت، با استفاده از معادله ۱-۵ داریم:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) = & |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \\ & + |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle \\ & + 2\text{Re} \left[K_1^* K_2 \langle E^*(\mathbf{r}_1, t_1) E(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4-5)$$

دو جمله اول شدت‌های وابسته به میدان از هریک از شکاف‌ها هستند و جمله سوم به تداخل منجر می‌شود. حال با قرار دادن

$$\begin{aligned} I_1 &= |K_1|^2 \langle |E(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \\ I_2 &= |K_2|^2 \langle |E(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle. \end{aligned} \quad (5-5)$$

تابع همدوسی متقابل بهنجار مرتبه اول را به صورت زیر معرفی می کنیم:

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{\langle E^*(x_1)E(x_2) \rangle}{\sqrt{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}}, \quad (۶-۵)$$

که در آن از قرارداد متداول $x_i = \mathbf{r}_i, t_i$ استفاده کرده ایم. بنابراین می توان شدت اندازه گیری شده در محل پرده را بر حسب هریک از شدت ها به اضافه جمله همدوسی به صورت زیر نوشت:

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \left[K_1 K_2 \gamma^{(1)}(x_1, x_2) \right]. \quad (۷-۵)$$

حال اگر قرار دهیم $K_i = |K_i| \exp(i\psi_i)$ و بنویسیم

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \exp(i\Phi_{12}) \quad (۸-۵)$$

داریم:

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \cos(\Phi_{12} - \psi) \quad (۹-۵)$$

که در آن $\psi = \psi_1 - \psi_2$ اختلاف فاز حاصل از اختلاف راه (که فرض می شود از طول همدوسی کوچک تر است) است. تداخل به ازای $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \neq 0$ رخ می دهد. سه نوع همدوسی متمایز وجود دارد:

$$\begin{aligned} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| &= 1, & \text{همدوسی کامل} \\ 0 < |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| &< 1, & \text{همدوسی جزئی} \\ |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| &= 0, & \text{واهمدوسی کامل} \end{aligned} \quad (۱۰-۵)$$

بهتر است تعریف رالی از قابلیت رؤیت^۱ فرانتها را وارد کنیم.

$$\mathcal{V} = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}), \quad (۱۱-۵)$$

که در آن

$$I_{\max}^{\min} = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| \quad (۱۲-۵)$$

بنابراین

$$\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\gamma^{(1)}(x_1, x_2)|}{I_1 + I_2}. \quad (۱۳-۵)$$

بدیهی است که برای همدوسی کامل، مرئی بودن (یا وضوح) فرانتها دارای ماکزیمم زیر است:

1. visibility

$$\gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad (14-5)$$

درحالی که برای ناهمدوسی کامل، قابلیت رؤیت باید صفر باشد، $\gamma = 0$. به علاوه، باید به یک خاصیت مهم نیز توجه کنیم. با توجه به معادله ۵-۶ بدیهی است که اگر صورت کسر به صورت زیر قابل تجزیه باشد:

$$\langle E^*(x_1)E(x_2) \rangle = \langle E^*(x_1) \rangle \langle E(x_2) \rangle \quad (15-5)$$

داریم $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$. بنابراین خاصیت تجزیه پذیری می تواند به عنوان یک ملاک برای همدوسی کامل اپتیکی مورد استفاده قرار گیرد. مشابه کوانتومی این ملاک، تجزیه پذیری مقدار چشمداشتی حاصل ضرب عملگرهای میدان، همان طوری که خواهیم دید، به یک ملاک برای همدوسی کامل در میدان کوانتومی نور منجر می شود.

اکنون چند مثال از توابع همدوسی مرتبه اول کلاسیکی را ارائه می دهیم. ابتدا همدوسی زمانی میدان نوری مانا در یک نقطه فضایی ثابت را بررسی می کنیم. به عنوان مثال، یک میدان نوری تک رنگ که در راستای محور z انتشار می یابد، در نقطه ای به مختصات z در لحظات t و $t + \tau$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 e^{i(kz - \omega t)} \\ E(z, t + \tau) &= E_0 e^{i[kz - \omega(t + \tau)]}. \end{aligned} \quad (16-5)$$

این مقادیر به ترتیب همان مقادیر $E(x_1)$ و $E(x_2)$ هستند که از آن ها به دست می آوریم:

$$\langle E^*(z, t)E(z, t + \tau) \rangle = E_0^2 e^{-i\omega\tau}. \quad (17-5)$$

این تابع، تابع خودهم بستگی^۱ نامیده می شود که با حذف متغیر مکان به صورت $\langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle$ نوشته می شود. واضح است که در این حالت

$$\gamma^{(1)}(x_1, x_2) = \gamma^{(1)}(\tau) = \gamma^{(1)*}(-\tau) = e^{-i\omega\tau} \quad (18-5)$$

و بنابراین $|\gamma^{(1)}(\tau)| = 1$ ؛ یعنی همدوسی زمانی کامل وجود دارد. اما چشمه نوری کاملاً تک رنگ وجود ندارد. در یک مدل واقعی تر از چشمه «تک رنگ» باید فرایندهای تصادفی را که توسط آن ها نور از واپاشی اتم های برانگیخته در چشمه صادر می شود، در نظر بگیریم. این چشمه های تک رنگ، نور را به صورت قطارهای موج با طول موج محدود صادر می کنند که این قطارها توسط تغییرات گسسته فاز از یکدیگر جدا می شوند. زمان قطار موج میانگین، τ_0 ، یک چشمه معین را زمان همدوسی آن چشمه می گوئیم. این زمان همدوسی با عکس پهنای خط طیفی اتم های چشمه ارتباط دارد. در این صورت، می توان طول همدوسی ℓ_{coh} یک قطار موج را به صورت $\ell_{\text{coh}} = c\tau_0$ تعریف کرد. بنابراین میدان زیر را در نظر می گیریم:

1. autocorrelation

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} e^{i\psi(t)} \quad (۱۹-۵)$$

که در آن $\psi(t)$ همان طور که در شکل ۵-۲ (ا) نشان داده شده است، یک تابع پله‌ای تصادفی در محدوده $(0, 2\pi)$ با دوره تناوب τ_0 است. تابع خودهم‌بستگی در این حالت عبارت است از

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = E_0^2 e^{-i\omega\tau} \langle e^{i[\psi(t+\tau) - \psi(t)]} \rangle \quad (۲۰-۵)$$

بنابراین

$$\gamma^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{i[\psi(t+\tau) - \psi(t)]} dt, \quad (۲۱-۵)$$

که در آن اختلاف در فازها در شکل ۵-۲ (ب) نشان داده شده است.

حال بازه $0 < t < \tau_0 - \tau$ را به دو زیربازه تقسیم می‌کنیم: به‌ازای $0 < t < \tau_0 - \tau$ ، $\psi(t + \tau) - \psi(t) = 0$ است، اما برای $\tau_0 - \tau < t < \tau_0$ ، $\psi(t + \tau) - \psi(t)$ یک عدد تصادفی بین $(0, 2\pi)$ است. همین امر برای بازه‌های زمان همدوسی بعدی اتفاق می‌افتد. انتگرال بالا را می‌توان محاسبه کرد (برای جزئیات به مرجع [۱] مراجعه کنید):

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}(\tau) &= \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{-i\omega\tau}, \quad \tau < \tau_0 \\ &= 0, \quad \tau \geq \tau_0, \end{aligned} \quad (۲۲-۵)$$

و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |\gamma^{(1)}(\tau)| &= 1 - \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau < \tau_0 \\ &= 0, \quad \tau \geq \tau_0. \end{aligned} \quad (۲۳-۵)$$

بنابراین اگر زمان تأخیر τ از زمان همدوسی τ_0 طولانی‌تر باشد، هیچ همدوسی‌ای اتفاق نمی‌افتد.

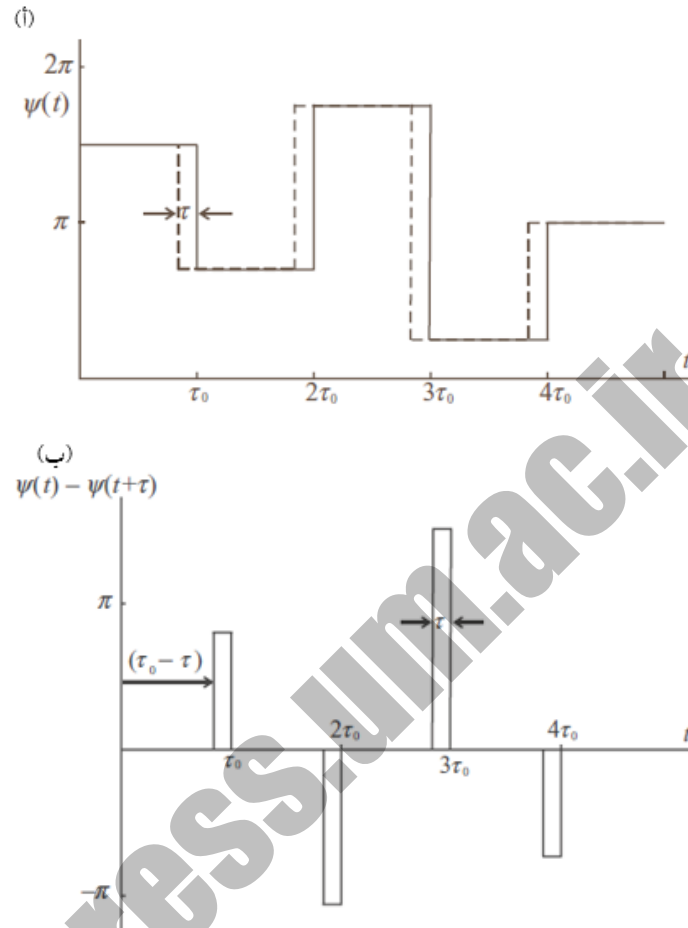
یک مدل واقعی‌تر از نور با طیف پهن‌شده بر اثر برخورد^۱ مدلی است که در آن تابش دارای یک طیف توانی لورنتسی است که مرکز آن در فرکانس ω_0 قرار دارد. در چنین موردی تابع خودهم‌بستگی (با فرض اینکه در امتداد محور z ها انتشار یابد) عبارت است از

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = E_0^2 e^{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_0} \quad (۲۴-۵)$$

که در آن τ_0 را می‌توان به‌عنوان زمان میانگین بین برخوردها تعبیر کرد. در نتیجه

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)}(\tau) &= e^{-i\omega_0\tau - |\tau|/\tau_0}, \\ 0 &\leq |\gamma^{(1)}(\tau)| \leq 1. \end{aligned} \quad (۲۵-۵)$$

1. Collision-broadened light



شکل ۲-۵. أ. فاز تصادفی $\psi(t)$ ، خط پر)، $\psi(t + \tau)$ (خط چین) با دوره تناوب τ . ب. اختلاف فاز $\psi(t) - \psi(t + \tau)$

بدیهی است که در حد $\tau \rightarrow \infty$ داریم $|\gamma^{(1)}(\tau)| \rightarrow 0$. بنابراین با افزایش زمان تأخیر، پرتو بیشتر ناهمدوس می‌شود. اگر $|\tau| \ll \tau_0$ باشد، به سمت همدوسی کامل می‌رسیم. به علاوه اگر زمان میانگین برخوردها کوتاه شود، طیف پهن تر می‌شود و با افزایش τ مقدار $|\gamma^{(1)}(\tau)|$ سریع تر به سمت صفر میل می‌کند ($|\gamma^{(1)}(\tau)| \rightarrow 0$). پرتوهای نوری با چنین تابع خودهم‌بستگی آشوبی نامیده می‌شوند، هر چند انواع دیگری از پرتوهای نور با توان‌های طیفی متفاوت، مانند توابع گاوسی نیز تحت عنوان آشوبی نام گذاری می‌شوند.

۲-۵ توابع همدوسی کوانتومی

گلوبر و همکارانش در یک مجموعه از مقالات در دهه ۱۹۶۰ [۲] نشان دادند که چگونه می‌توان یک نظریه کوانتومی همدوسی را با روشی نزدیک به نظریه کلاسیکی از مشاهده‌پذیرها ساخت. شدت یک پرتو نوری با

ابزاری اندازه گیری می شود که با جذب فوتون های پرتو، آن را تضعیف می کند. تعیین شدت یک پرتو با اندازه گیری پاسخ سیستم جذب کننده آن انجام می شود. یک آشکارساز ایدئال را که از یک تک اتم با ابعاد کوچک تر از طول موج نور تشکیل شده است، در نظر می گیریم. جذب نور در نوار پهنی از طول موج ها باعث یونش اتم می شود و آشکارسازی متعاقب فوتوالکترون ها، آشکارسازی تعداد فوتون ها را موجب می شود. با شمردن فوتوالکترون ها خواص آماری میدان نوری را می توان تعیین کرد.

آشکارساز تک اتمی از طریق برهم کنش دوقطبی (همان طور که در فصل ۴ بحث شد)

$$\hat{H}^{(1)} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \quad (26-5)$$

با میدان کوانتیده برهم کنش می کند. در اینجا از تصویر هایزنبرگ استفاده می کنیم که در آن عملگر میدان الکتریکی به صورت زیر است:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2 \varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]. \quad (27-5)$$

چون طول موج نور از ابعاد اتم بزرگ تر است، $|\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}| \ll 1$ (تقریب دوقطبی) میدان در محل آشکارساز اتمی برابر است با

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \approx i \sum_{\mathbf{k}, s} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2 \varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) \right]. \quad (28-5)$$

به علاوه، مؤلفه ای از میدان که باعث جذب می شود، فرکانس مثبت میدان است؛ زیرا شامل عملگر نابودی است

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, s} \left(\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{2 \varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) \quad (29-5)$$

فرض می کنیم اتم ابتدا در حالت $|g\rangle$ و میدان در حالتی مانند $|i\rangle$ باشد. بر اثر جذب تابش، اتم به حالت $|e\rangle$ و میدان به حالت $|f\rangle$ گذار انجام می دهد. فرض می کنیم حالت $|e\rangle$ یک حالت یونیده اتم باشد و آن را با یک حالت الکترون آزاد تقریب می زنیم (یک مدل بسیار ایدئالی از آشکارساز فوتونی)

$$|e\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad (30-5)$$

که در آن $\hbar \mathbf{q}$ تکانه الکترون آزاد شده است. بنابراین با شرایط اولیه $|I\rangle = |g\rangle|i\rangle$ و حالت نهایی $|F\rangle = |e\rangle|f\rangle$ عنصر ماتریسی گذار عبارت است از

$$\langle F | \hat{H}^{(1)} | I \rangle = -\langle e | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle \langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle. \quad (31-5)$$

احتمال گذار برای سیستم اتم-میدان با کمیت زیر متناسب است:

$$\left| \langle F | \hat{H}^{(1)} | I \rangle \right|^2. \quad (۳۲-۵)$$

احتمال اینکه میدان از حالت $|i\rangle$ به حالت $|f\rangle$ گذار انجام دهد، متناسب است با

$$\left| \langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \right|^2. \quad (۳۳-۵)$$

درواقع آنچه به دنبال آن هستیم، حالت نهایی آشکارساز است، نه میدان. بنابراین باید روی تمام حالت‌های نهایی جمع‌بندی کنیم. برای تمام مقاصد عملی این مجموعه، حالت‌های نهایی را می‌توان کامل در نظر گرفت (و همواره می‌توان با افزودن حالت‌های گذار غیرمجاز آن را کامل کرد). بنابراین

$$\begin{aligned} \sum_f \left| \langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \right|^2 \\ = \sum_f \langle i | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) | f \rangle \langle f | \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle \\ = \langle i | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle, \end{aligned} \quad (۳۴-۵)$$

که در آن $\hat{\mathbf{E}}^{-}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^{\dagger}$. در آنچه گذشت، فرض کردیم میدان ابتدا در یک حالت خالص قرار دارد. اما بیشتر احتمال دارد که حالت اولیه یک حالت مخلوط باشد که توسط یک عملگر چگالی به صورت زیر توصیف شود:

$$\hat{\rho}_F = \sum_i P_i |i\rangle \langle i|. \quad (۳۵-۵)$$

در این صورت، مقدار چشمداشتی ۳۴-۵ را باید با میانگین آنسامبلی زیر جایگزین کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \hat{\rho}_F \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right\} \\ = \sum_i P_i \langle i | \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle. \end{aligned} \quad (۳۶-۵)$$

به شکل مرتب‌شده نرمال عملگرها توجه کنید. این امر نتیجه استفاده ما از آشکارساز جذب‌کننده است. از این پس از قرارداد قبلی خود استفاده می‌کنیم که در آن میدان‌ها دارای قطبش یکسان هستند، یعنی آن‌ها را اسکالر در نظر می‌گیریم. بار دیگر از نماد $x = (\mathbf{r}, t)$ استفاده و تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$G^{(1)}(x, x) = \text{Tr} \left\{ \rho \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x) \right\} \quad (۳۷-۵)$$

که شدت نور در نقطه فضا-زمان $x = \mathbf{r}, t$ است، یعنی $I(\mathbf{r}, t) = G^{(1)}(x, x)$ مشابه کوانتومی عبارت کلاسیکی میانگین زمانی یا آنسامبلی بخش قبلی است. برای آزمایش تداخل یانگ، آن‌طوری که در شکل ۵-۱

نشان داده شده است، قسمت مثبت میدان در محل آشکارساز فوتونی واقع در مکان $\mathbf{r}$ و در زمان t عبارت است از برهم‌نهی میدان‌های حاصل از دوشکاف

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = K_1 \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2 \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \quad (38-5)$$

که همان قسمت مثبت فرکانس کوانتومی مشابه با رابطه کلاسیکی در معادله ۵-۱ است. شدت نور روی پرده (درواقع روی آشکارساز فوتونی) عبارت است از

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right\} \\ &= |K_1|^2 G^{(1)}(x_1, x_1) + |K_2|^2 G^{(1)}(x_2, x_2) \\ &\quad + 2 \text{Re} [K_1^* K_2 G^{(1)}(x_1, x_2)] \end{aligned} \quad (39-5)$$

که در آن

$$G^{(1)}(x_i, x_i) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(x_i) \hat{E}^{(+)}(x_i) \right\} \quad i = 1, 2, \dots \quad (40-5)$$

و به‌ازای $x_2 = \mathbf{r}_2, t_2$ و $x_1 = \mathbf{r}_1, t_1$

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) \right\} \quad (41-5)$$

تابع اخیر یک تابع هم‌بستگی مرتبه اول عام است که معادله ۵-۴۰ یک حالت خاص آن به حساب می‌آید. توجه کنید که $G^{(1)}(x_i, x_i)$ شدت نوری است که از x_i به آشکارساز می‌رسد و $G^{(1)}(x_1, x_2)$ سنجه‌ای از هم‌بستگی نور دریافت‌شده از x_1 و x_2 و بنابراین سنجه‌ای برای تداخل است. به‌علاوه می‌توان مشابه با تابع همدوسی کلاسیکی $\gamma^{(1)}(x_1, x_2)$ در معادله ۵-۶ تابع همدوسی کوانتومی به‌نحیج مرتبه اول را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$g^{(1)}(x_1, x_2) = \frac{G^{(1)}(x_1, x_2)}{[G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)]^{1/2}} \quad (42-5)$$

که برای آن

$$0 \leq |g^{(1)}(x_1, x_2)| \leq 1. \quad (43-5)$$

مانند مورد کلاسیک سه نوع همدوسی داریم:

$$\begin{aligned} |g^{(1)}(x_1, x_2)| &= 1, & \text{همدوسی کامل} \\ 0 < |g^{(1)}(x_1, x_2)| &< 1, & \text{همدوسی جزئی} \\ |g^{(1)}(x_1, x_2)| &= 0 & \text{واهمدوسی} \end{aligned} \quad (44-5)$$

از تعریف تابع هم‌بستگی می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1, x_2) &= [G^{(1)}(x_2, x_1)]^* \\ G^{(1)}(x_i, x_i) &\geq 0 \\ G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2) &\geq |G^{(1)}(x_1, x_2)|^2. \end{aligned} \quad (45-5)$$

تساوی در رابطه اخیر قابلیت رؤیت ماکزیمم فرانز، یعنی $|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$ را مشخص می‌کند. برای یک میدان کوانتیده موج تخت تک‌مدی که با بردار موجی $\mathbf{k}$ انتشار می‌یابد، قسمت فرکانس مثبت عملگر میدان عبارت است از

$$\hat{E}^{(+)}(x) = iK \hat{a} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (46-5)$$

که در آن

$$K = \left(\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 V} \right)^{1/2}. \quad (47-5)$$

اگر میدان در حالت تعداد $|n\rangle$ باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x) &= \langle n | \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x) | n \rangle \\ &= K^2 n \end{aligned} \quad (48-5)$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1, x_2) &= \langle n | \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) | n \rangle \\ &= K^2 n \exp\{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_2 - t_1)]\} \end{aligned} \quad (49-5)$$

و بنابراین

$$|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1. \quad (50-5)$$

برای یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ داریم:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x) &= \langle \alpha | \hat{E}^{(-)}(x) \hat{E}^{(+)}(x) | \alpha \rangle \\ &= K^2 |\alpha|^2, \end{aligned} \quad (51-5)$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x_1, x_2) &= \langle \alpha | \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) | \alpha \rangle \\ &= K^2 |\alpha|^2 \exp\{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_2 - t_1)]\}. \end{aligned} \quad (52-5)$$

بنابراین مانند قبل به‌دست می‌آوریم $|g^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$. مانند مورد کلاسیک، نکته کلیدی در همدوسی کوانتومی مرتبه اول تجزیه مقدار چشمداشتی تابع هم‌بستگی در صورت کسر ۴۲-۵ است. یعنی

$$G^{(1)}(x_1, x_2) = \langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(+)}(x_2) \rangle = \langle \hat{E}^{(-)}(x_1) \rangle \langle \hat{E}^{(+)}(x_2) \rangle. \quad (53-5)$$

این شرط برای حالت‌های تعداد و همدوس برقرار است. مورد حالت گرمایی به‌عنوان تمرین برعهده خواننده گذاشته می‌شود.

۳-۵ تداخل یانگ

به‌عنوان آخرین مثال، همدوسی کوانتومی مرتبه اول در آزمایش تداخل یانگ را به تفصیل بررسی می‌کنیم. روش ارائه‌شده توسط والز [۳] را دنبال می‌کنیم. در اینجا نیز با توجه به شکل ۵-۱ فرض می‌کنیم چشمه نور تک‌رنگ و ابعاد شکاف‌ها از مرتبه طول‌موج نور باشد. فرض آخر به ما امکان می‌دهد تا از اثرات تفرق صرف‌نظر و فرض کنیم شکاف‌ها چشمه‌های نقطه‌ای امواج کروی هستند و اینکه میدان در روی پرده (در محل آشکارساز) در مکان $\mathbf{r}$ در زمان t مجموع امواج کروی دو شکاف باشد:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = f(r) [\hat{a}_1 e^{iks_1} + \hat{a}_2 e^{iks_2}] e^{-i\omega t} \quad (54-5)$$

که در آن

$$f(r) = i \left[\frac{\hbar \omega}{2\epsilon_0 (4\pi R)} \right]^{1/2} \frac{1}{r}. \quad (55-5)$$

R شعاع حجم بهنجارش، s_1 و s_2 فاصله شکاف‌ها تا پرده و $r = |\mathbf{r}|$ که در معادله بالا ظاهر شده است، نتیجه‌ای از تقریب $s_1 \approx s_2 = r$ است. همچنین $k = |\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ اندازه اعداد موجی هریک از دو شکاف است. عملگرهای میدان $\hat{a}_1$ و $\hat{a}_2$ به ترتیب وابسته به مدهای شعاعی میدان برای فوتون‌های صادرشده از شکاف‌های ۱ و ۲ هستند. شدت نور توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, t) &= \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) \right\} \\ &= |f(r)|^2 \left\{ \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1) + \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2) \right. \\ &\quad \left. + 2 \left| \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2) \right| \cos \Phi \right\} \end{aligned} \quad (56-5)$$

که در آن

$$\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2) = \left| \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2) \right| e^{i\psi} \quad (57-5)$$

و

$$\Phi = k(s_1 - s_2) + \psi. \quad (58-5)$$

بیشترین قابلیت رؤیت فرانزهای تداخلی در $\Phi = 2\pi m$ که در آن m یک عدد صحیح است، رخ می‌دهد و به صورت $1/r^2$ با فاصله آشکارساز از فرانز مرکزی کاهش می‌یابد.

اما توجه کنید که پرتوی که به شکاف‌ها می‌رسد را می‌توان با یک مد موج تخت تقریب زد و عملگر میدان مربوط را $\hat{a}$ در نظر گرفت. اگر شکاف‌ها به یک اندازه باشند و اگر آشکارسازها را دقیقاً پشت آن‌ها قرار دهیم، فوتون‌های فرودی با احتمال مساوی از هریک از شکاف‌ها عبور خواهند کرد. یعنی دو شکاف به گونه‌ای عمل می‌کنند که گویی یک باریکه منفرد را به دو باریکه تجزیه کرده‌اند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2) \quad (5-59)$$

که در آن

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0, \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (5-60)$$

متأسفانه رابطه ۵-۵۹ به خودی خود یک تبدیل یکانی نمی‌دهد. برای اینکه آن را یکانی بسازیم، لازم است یک مد دیگر که آن را مد «فرضی» می‌نامیم، وارد کنیم (استدلال پشت این فرض در فصل ۶ آمده است). این مد فرضی را $\hat{b}$ می‌نامیم و قرار می‌دهیم $\hat{b} = (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)/\sqrt{2}$ که در آن $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$. این مد همواره در حالت خلأ خواهد بود. بنابراین در آنچه به دنبال می‌آید، می‌توان آن را صرف نظر کرد، ولی برای روشن شدن مطلب آن را نگه می‌داریم.

فرض کنید فوتون‌های فرودی به شکاف‌ها در مد a قرار داشته باشند. با توجه به فرض بالا یک حالت فرودی که شامل n فوتون است، در حالت $|n\rangle_a |0\rangle_b$ قرار دارد. این حالت برطبق رابطه زیر به a_1 و a_2 ارتباط دارد:

$$\begin{aligned} |n\rangle_a |0\rangle_b &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}^{\dagger n} |0\rangle_a |0\rangle_b \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger)^n |0\rangle_1 |0\rangle_2 \end{aligned} \quad (5-61)$$

که در آن $|0\rangle_1$ و $|0\rangle_2$ معرف حاصل ضرب حالت‌های خلأ مد‌های a_1 و a_2 است. برای مودی که تنها یک فوتون وجود داشته باشد، داریم:

$$\begin{aligned} |1\rangle_a |0\rangle_b &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |1\rangle_2), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle), \end{aligned} \quad (5-62)$$

که در سطر دوم نماد $|1, 0\rangle$ معرف یک فوتون در مد ۱ و هیچ فوتون در مد ۲ است و برعکس برای $|0, 1\rangle$. توجه کنید که وقتی $\hat{b} = (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)/\sqrt{2}$ روی حالت ۵-۶۲ عمل کند، متحد با صفر می‌شود که با این ایده که هیچ

فوتونی در مد فرضی وجود ندارد، سازگار است. اگر حالت فرودی $|1\rangle_a |1\rangle_b$ باشد، شدت در آزمایش ینگ توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$I(\mathbf{r}, t) = |f(\mathbf{r})|^2 \left\{ \frac{1}{2} \langle 1, 0 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | 0, 1 \rangle + \frac{1}{2} \langle 0, 1 | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | 0, 1 \rangle + \langle 1, 0 | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | 0, 1 \rangle \cos \Phi \right\} \quad (۶۳-۵)$$

که برابر است با

$$I(\mathbf{r}, t) = |f(\mathbf{r})|^2 [1 + \cos \Phi]. \quad (۶۴-۵)$$

درمورد دو فوتون، از معادله ۶۱-۵ داریم:

$$|2\rangle_a |0\rangle_b = \frac{1}{2} [|2, 0\rangle + \sqrt{2} |1, 1\rangle + |0, 2\rangle] \quad (۶۵-۵)$$

توجه کنید که اعمال $\hat{b} = (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)/\sqrt{2}$ روی معادله ۶۵-۵ دوباره به صفر منجر می‌شود. شدت این حالت برابر است با

$$I(\mathbf{r}, t) = 2 |f(\mathbf{r})|^2 [1 + \cos \Phi]. \quad (۶۶-۵)$$

برای حالت کلی n فوتون داریم:

$$I(\mathbf{r}, t) = n |f(\mathbf{r})|^2 [1 + \cos \Phi]. \quad (۶۷-۵)$$

برای یک حالت همدوس فرودی به شکاف‌ها، با استفاده از عملگر جابه‌جایی و ۵۹-۵ داریم:

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle_a |0\rangle_b &= \hat{D}_a(\alpha) |0\rangle_a |0\rangle_b = \hat{D}_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \hat{D}_2\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) |0, 0\rangle \\ &= \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_1 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \end{aligned} \quad (۶۸-۵)$$

که در آن

$$\hat{D}_i(\alpha/\sqrt{2}) = \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger - \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}} \hat{a}\right) \quad i = 1, 2. \quad (۶۹-۵)$$

شدت در این حالت برابر است با

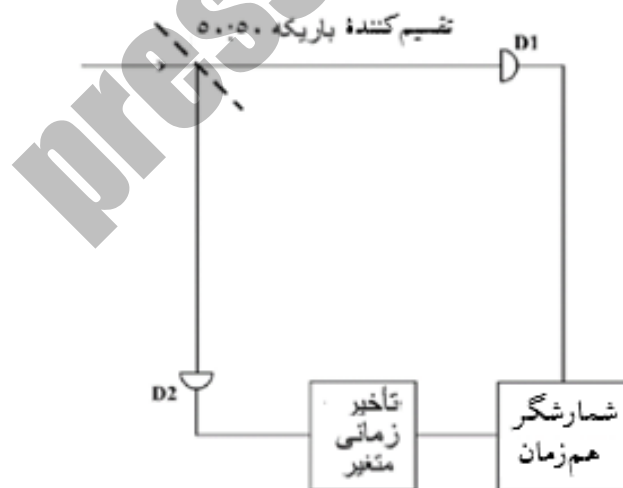
$$I(\mathbf{r}, t) = |\alpha|^2 |f(\mathbf{r})|^2 [1 + \cos \Phi]. \quad (۷۰-۵)$$

در تمام موارد، دو مد تداخل کننده از یک باریکه تک‌مدی سرچشمه گرفته‌اند. همه این موارد همدوس مرتبه اول هستند که به الگوی تداخلی یکسانی منجر می‌شوند؛ تنها شدت کلی تحت تأثیر تعداد دقیق یا میانگین فوتون‌ها قرار می‌گیرد. توجه کنید همان‌طور که گفتیم، مد فرضی b در حالت خلا باقی می‌ماند و بنابراین می‌توانستیم آن را ندیده بگیریم، همانند آنچه والز [۳] انجام داد، ولی به نظر ما اینکه تأکید کنیم یکانی بودن در تمام تبدیلات حفظ می‌شود، اهمیت دارد.

معادله ۵-۶۳ تأییدی است بر این نظر مشهور دیراک [۴] که «هر فوتون تنها با خودش تداخل می‌کند و تداخل بین فوتون‌های مختلف رخ نمی‌دهد». متأسفانه از این نظر که احتمالاً به قصد نشان دادن تباین تصویرهای کوانتومی و کلاسیکی از تداخل نور بیان شده است، برخلاف آنچه منظور دیراک بوده است، بعضی این‌طور تعبیر کرده‌اند که فوتون‌های حاصل از باریکه‌های نور مستقل نمی‌توانند تداخل کنند. همان‌طوری که به سادگی می‌توان دید، اگر مدهای a_1 و a_2 واقعاً مستقل باشند، حالت $|n_1\rangle|n_2\rangle$ نمی‌تواند به فرآیندهای تداخلی منجر شوند. اما اگر مدها در حالت‌های همدوس $|\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle$ باشند که از لیزرهای مستقل حاصل شده باشند، در این صورت

$$I(\mathbf{r}, t) = |f(\mathbf{r})|^2 \{ |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + 2|\alpha_1^* \alpha_2| \cos \Phi \} \quad (5-71)$$

که به وضوح فرآیندهای تداخلی را نشان می‌دهد. تداخل نور صادر شده توسط لیزرهای مستقل به‌طور تجربی توسط مگیار^۲ و مندل^۳ [۵] چند سال بعد از اختراع لیزر نشان داده شد. شمارشگر هم‌زمان



شکل ۵-۳ نمایشی از طرح‌واره آزمایش هانبوری براون و توپس

۴-۵ توابع همدوسی مرتبه‌های بالاتر

همدوسی مرتبه اول در آزمایش یانگ را می‌توان به‌طور ریاضی به‌عنوان نتیجه از تجزیه مقادیر چشمداشتی در تابع همبستگی در هر دو مورد کلاسیکی و کوانتومی در نظر گرفت. با چنین آزمایشی می‌توان درجه تک‌رنگی چشمه نور یا طول همدوسی نور را تعیین کرد، ولی این آزمایش هیچ اطلاعی درباره خواص آماری نور نمی‌دهد. یعنی آزمایش‌های مرتبه اول قادر نیستند حالت‌های نور با توزیع‌های طیفی یکسان، ولی توزیع‌های عدد فوتونی متفاوت را از یکدیگر تشخیص دهند. دیدیم که یک میدان تک‌مدی چه در حالت تعداد و چه در حالت همدوس، یک همدوسی کوانتومی مرتبه اول است، در حالی که توزیع‌های فوتونی این حالت‌ها به‌طور مشخصی با یکدیگر اختلاف دارند.

در دهه ۱۹۵۰ هانبوری براون و تویس [۶] در منچستر یک نوع آزمایش همبستگی جدید راه‌اندازی کردند که به‌جای همبستگی میدان‌ها، به همبستگی شدت‌ها می‌پرداختند. طرحی از این آزمایش در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. آشکارسازهای D_1 و D_2 به فاصله‌های مساوی از تقسیم‌کننده‌های باریکه قرار دارند. این طرح‌واره تأخیر در آهنگ هم‌زمانی که در آن یکی از آشکارسازها علامت را در لحظه t و دیگری در لحظه $t + \tau$ ثبت می‌کنند، اندازه‌گیری می‌کند. اگر τ ، زمان تأخیری، از زمان همدوسی τ_0 کوچک‌تر باشد می‌توان درباره آمار باریکه نوری که به تقسیم‌کننده باریکه می‌رسد، اطلاعات کسب کرد. آهنگ شمارش هم‌زمان با میانگین زمانی یا آماری متناسب است.

$$C(t, t + \tau) = \langle I(t) I(t + \tau) \rangle \quad (۷۲-۵)$$

که در آن $I(t)$ و $I(t + \tau)$ شدت‌های لحظه‌ای دو آشکارساز هستند (در اینجا این کمیت‌ها کلاسیکی هستند). اگر فرض کنیم میدان‌ها ایستا باشند، میانگین تنها تابع t است. اگر شدت میانگین در هریک از آشکارسازها $\langle I(t) \rangle$ باشد، احتمال یافتن یک شمارش هم‌زمان با تأخیر زمانی τ برابر است با

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(\tau) &= \frac{\langle I(t) I(t + \tau) \rangle}{\langle I(t) \rangle^2} \\ &= \frac{\langle E^*(t) E^*(t + \tau) E(t + \tau) E(t) \rangle}{\langle E^*(t) E(t) \rangle^2}. \end{aligned} \quad (۷۳-۵)$$

این تابع، تابع همدوسی کلاسیکی مرتبه دوم است. اگر آشکارسازها در فواصل متفاوت از تقسیم‌کننده باریکه قرار داشته باشند، تابع همدوسی مرتبه دوم را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد:

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) &= \frac{\langle I(x_1) I(x_2) \rangle}{\langle I(x_1) \rangle \langle I(x_2) \rangle} \\ &= \frac{\langle E^*(x_1) E^*(x_2) E(x_2) E(x_1) \rangle}{\langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle}. \end{aligned} \quad (۷۴-۵)$$

مشابه با همدوسی مرتبه اول گوئیم همدوسی کلاسیکی تا مرتبه دوم است چنانچه $|\gamma^{(1)}(x_1, x_2)| = 1$ و $|\gamma^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)| = 1$ باشد. شرط دوم ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

$$\langle E^*(x_1)E^*(x_2)E(x_2)E(x_1) \rangle = \langle |E(x_1)|^2 \rangle \langle |E(x_2)|^2 \rangle. \quad (۷۵-۵)$$

برای یک موج تخت که در راستای z انتشار می‌یابد، مانند معادله ۵-۱۶، به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)E(t) \rangle = E_0^4 \quad (۷۶-۵)$$

و بنابراین $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$ برای هر باریکه نور که شدت آن ثابت باشد و افت و خیز نداشته باشد، داریم $\gamma^{(2)}(\tau) = 1$ $I(t) = I(t+\tau) = I_0$.

اما برخلاف تابع همدوسی مرتبه اول، لازم نیست تابع همدوسی مرتبه دوم محدود به یک یا کوچک‌تر از یک باشد. برای دیدن این مطلب، ابتدا تابع همدوسی با تأخیر صفر را در نظر می‌گیریم:

$$\gamma^{(2)}(0) = \frac{\langle I(t)^2 \rangle}{\langle I(t) \rangle^2}. \quad (۷۷-۵)$$

برای یک رشته شامل N اندازه‌گیری که در زمان‌های $t_1, t_2, \dots, t_N$ انجام می‌شود میانگین‌های مربوطه عبارت‌اند از

$$\langle I(t) \rangle = \frac{I(t_1) + I(t_2) + \dots + I(t_N)}{N} \quad (۷۸-۵)$$

$$\langle I(t)^2 \rangle = \frac{I(t_1)^2 + I(t_2)^2 + \dots + I(t_N)^2}{N}.$$

حال با اعمال نامساوی کوشی به اندازه‌گیری‌ها در لحظات t_1 و t_2 داریم:

$$2I(t_1)I(t_2) \leq I(t_1)^2 + I(t_2)^2. \quad (۷۹-۵)$$

که از آنجا با استفاده از این نامساوی در $\langle I(t)^2 \rangle$ ، نتیجه می‌شود:

$$\langle I(t)^2 \rangle \geq \langle I(t) \rangle^2 \quad (۸۰-۵)$$

و در نتیجه

$$1 \leq \gamma^{(2)}(0) < \infty, \quad (۸۱-۵)$$

که نشان می‌دهد راهی برای تعیین حد بالا وجود ندارد.

برای تأخیرهای زمانی غیر صفر، مثبت بودن شدت، رابط $0 \leq \gamma^{(2)}(\tau) < \infty$ ($\tau \neq 0$) را تضمین می‌کند، اما از نامساوی ۵-۸۱ می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} & [I(t_1)I(t_1 + \tau) + \dots + I(t_N)I(t_N + \tau)]^2 \\ & \leq [I(t_1)^2 + \dots + I(t_N)^2][I(t_1 + \tau)^2 + \dots + I(t_N + \tau)^2]. \end{aligned} \quad (۸۲-۵)$$

برای یک دنباله طولانی از اندازه گیری‌های متعدد، دو دنباله طرف راست معادل یکدیگرند و بنابراین

$$\langle I(t)I(t + \tau) \rangle \leq \langle I(t) \rangle^2 \quad (۸۳-۵)$$

و بنابراین داریم:

$$\gamma^{(2)}(\tau) \leq \gamma^{(2)}(0). \quad (۸۴-۵)$$

نتایج به دست آمده در ۵-۸۱ و ۵-۸۴ کرانی برای میدان‌های نوری کلاسیکی مشخص می‌کند. بعداً نشان خواهیم داد که بعضی از حالت‌های کوانتومی نور، نسخه کوانتومی نامساوی ۵-۸۴ را نقض می‌کنند. برای یک چشمه نور که شامل تعداد زیادی اتم‌های تابش کننده مستقل که دچار پهن شدن گری بر خوردی طیف شده باشد، می‌توان نشان داد که توابع همدوسی مرتبه اول و دوم توسط رابطه زیر به هم مرتبط اند:

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + |\gamma^{(1)}(\tau)|^2, \quad (۸۵-۵)$$

رابطه‌ای که برای همه انواع نور آشوبی برقرار است. بدیهی است که چون $|\gamma^{(1)}(\tau)| \leq 1$ است، نتیجه می‌شود $|\gamma^{(2)}(\tau)| \leq 2$. ۱. از نتیجه معادله ۵-۲۵ برای چشمه‌های با طیف لورنتسی داریم:

$$\gamma^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_0}. \quad (۸۶-۵)$$

هرچند در حد $\tau \rightarrow \infty$ ، $\gamma^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$ است، بدیهی است که برای تأخیر زمانی صفر، $\tau \rightarrow 0$ داریم $\gamma^{(2)}(0) = 2$. در واقع برای هر نوع نور آشوبی، $\gamma^{(2)}(0) = 2$ است. مفهوم این نتیجه به شرح زیر است: اگر نور فرودی به یکی از آشکارسازها مستقل از نور فرودی بر آشکارساز دیگر باشد، باید یک آهنگ هم‌زمانی یکنواخت مستقل از t وجود داشته باشد. این همان چیزی است که هانبوری براون و توپس انتظار داشتند [۶]. با استفاده از یک تصویر مقدماتی (و البته اشتباه) که در آن فوتون‌ها به طور مستقل از چشمه صادر می‌شوند و این فرض که تقسیم کننده پرتو فوتون‌ها را نمی‌شکافد، بلکه یا آن‌ها را منعکس می‌کند یا عبور می‌دهد، انتظار داشتند که بتوانند وجود فوتون‌ها را اثبات کنند. آن‌ها آهنگ آشکارسازی برای تأخیر زمانی صفر را دو برابر این آهنگ برای تأخیر زمانی طولانی به دست آوردند. اگر فوتون‌ها وجود داشته باشند، باید در تأخیر زمانی صفر به صورت زوج-زوج و در تأخیر زمانی طولانی به طور مستقل از یکدیگر برسند. فوتون‌هایی که به صورت «خوشه‌ای» زوج می‌رسند را اثر خوشه‌ای فوتون (یا اثر هانبوری براون و توپس) می‌نامند. توجه کنید که با اندازه گیری شمارش هم‌زمانی در زمان‌های تأخیری در حال افزایش، می‌توان همدوسی زمانی τ_0 چشمه را اندازه گیری کرد.

در پاراگراف قبل از خوشه فوتونی صحبت کردیم، با وجودی که نتیجه مهم ۵-۸۶ براساس نظریه کوانتومی نور به دست نیامده بود. حال تابع همدوسی کوانتومی مرتبه دوم را معرفی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که نور در یک حالت همدوس، آن‌چنان که (با یک تقریب معقول) از یک لیزر کاملاً تثبیت شده^۱ به دست آمده است، تا مرتبه دوم همدوس است و اینکه چشمه‌های نور گرمایی اثر خوشه‌ای فوتون را نشان می‌دهند. در این موارد تصویرهای کوانتومی و کلاسیکی با یکدیگر توافقی دارند، اما خواهیم دید که شرایطی وجود دارد که نظریه کوانتومی وضعیت‌هایی را پیش‌بینی می‌کند که برای آن‌ها همتای کلاسیکی وجود ندارد.

استدلال به کاررفته در مورد مرتبه اول را به آشکارسازی دو فوتون بر اثر جذب تعمیم می‌دهیم. احتمال گذار برای جذب دو فوتون متناسب است با

$$| \langle f | \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle |^2 \quad (87-5)$$

که پس از جمع‌بندی روی تمام حالت‌های نهایی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\langle i | \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle \quad (88-5)$$

با تعمیم به حالت‌های میدان ناخالص، تابع هم‌بستگی کوانتومی مرتبه دوم را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(x_1) \hat{E}^{(-)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_2) \hat{E}^{(+)}(x_1) \right\} \quad (89-5)$$

که باید آن را به عنوان میانگین آنسامبلی $I(x_1)I(x_2)$ تعبیر کرد و همانند مورد مرتبه اول، مرتب‌سازی نرمال عملگرهای میدان برای آشکارسازی جذبی^۲ مهم است و باید انجام شود. تابع همدوسی کوانتومی مرتبه دوم را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = \frac{G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2)} \quad (90-5)$$

که در آن $g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)$ احتمال مشترک آشکارسازی یک فوتون در زمان t_1 در نقطه $\mathbf{r}_1$ و فوتون دیگر در زمان t_2 در نقطه $\mathbf{r}_2$ است. یک میدان کوانتومی را همدوس مرتبه دوم گوئیم اگر $g^{(1)}(x_1, x_2) = 1$ و $g^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = 1$ باشد و این ایجاب می‌کند که $G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1)$ به صورت زیر تجزیه شود:

$$G^{(2)}(x_1, x_2; x_2, x_1) = G^{(1)}(x_1, x_1) G^{(1)}(x_2, x_2). \quad (91-5)$$

در یک نقطه ثابت، $g^{(2)}$ تنها به فاصله زمانی $\tau = t_2 - t_1$ بستگی دارد:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(-)}(t + \tau) \hat{E}^{(+)}(t + \tau) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle}{\langle \hat{E}^{(-)}(t) \hat{E}^{(+)}(t) \rangle \langle \hat{E}^{(-)}(t + \tau) \hat{E}^{(+)}(t + \tau) \rangle} \quad (92-5)$$

1. Well-stabilized laser

2. Absorptive detection

که به عنوان احتمال شرطی برای اینکه اگر یک فوتون در لحظه t آشکار شد، یکی دیگر نیز در $t + \tau$ آشکار شود، تعبیر می شود.

برای یک میدان تک مدی به شکل ۴۶-۵، تابع $g^{(2)}(\tau)$ به صورت زیر درمی آید:

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} \quad (۹۳-۵)$$

$$= 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2},$$

که مستقل از τ است.

برای میدان در یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ نتیجه می شود:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 \quad (۹۴-۵)$$

که بدین معنی است که احتمال هم زمانی تأخیری مستقل از زمان است. این حالت، یک حالت همدوس مرتبه دوم است. برای یک میدان در حالت گرمایی تک مدی (همه مدهای دیگر فیلتر شده اند) که با ۱۳۸-۲ داده می شود، می توان نشان داد که

$$g^{(2)}(\tau) = 2 \quad (۹۵-۵)$$

که احتمال بیشتری برای آشکارسازی فوتون های هم زمان را نشان می دهد. برای یک حالت گرمایی چندمدی (فیلتر نشده) می توان نشان داد [۷] که مانند مورد کلاسیک داریم:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \quad (۹۶-۵)$$

که در بازه $1 \leq g^{(2)}(\tau) \leq 2$ قرار دارد. برای نور با پهن شدگی برخورد یا طیف لورنتسی و تابع همدوسی مرتبه اول

$$g^{(1)}(\tau) = e^{-i\omega_0 \tau - |\tau|/\tau_0} \quad (۹۷-۵)$$

(پیوست «ب» را ببینید) داریم:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + e^{-2|\tau|/\tau_0} \quad (۹۸-۵)$$

که همان نتیجه مورد کلاسیکی است. اما در اینجا منطقی است که این نتیجه را به صورت ورود فوتون ها تعبیر کنیم. در $|\tau| \ll \tau_0$ ، احتمال اینکه در خلال زمان $|\tau|$ دو فوتون شمارش شود، در مقایسه با مورد تصادفی، بزرگ است. برای تأخیر زمانی صفر $g^{(2)}(0) = 2$ ، $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ این نامساوی مشخص کننده خوشه فوتونی است. برای یک حالت همدوس چندمدی می توان با استفاده از تعریف ۹۳-۵ نشان داد:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 \quad (۹۹-۵)$$

و چون $g^{(2)}(\tau)$ مستقل از تأخیر زمانی است، فوتون‌ها به صورت تصادفی با یک توزیع پواسونی می‌رسند. اما وقتی $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ باشد، یک امکان دیگر نیز وجود دارد. این مورد نقطه مقابل خوشه فوتونی، پادگروهی شدن فوتون‌ها^۱ است [۸]. برای این حالت فوتون‌ها تمایل دارند که با فواصل زمانی یکسان برسند و احتمال یافتن فوتون‌های هم‌زمان در بازه زمانی τ از این احتمال برای مورد حالت همدوس (مورد تصادفی) کمتر است. همان‌طور که در فصل ۷ نشان خواهیم داد، این وضعیت کاملاً غیر کلاسیکی است از این نظر که احتمال‌های منفی در آن وارد می‌شوند که برای میدان کلاسیکی بی‌معنی‌اند. اما فعلاً یک میدان تک‌مدی در حالت تعداد $|n\rangle$ را در نظر می‌گیریم که از آن نتیجه می‌شود:

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \begin{cases} 0 & n = 0, 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & n \geq 2 \end{cases} \quad (۱۰۰-۵)$$

واضح است که $g^{(2)}(0) < 1$ و همان‌طور که قبلاً بحث شد، این خارج از محدوده مجاز برای همتای کلاسیکی $g^{(2)}(0) \geq 1$ است. این واقعیت که $g^{(2)}(0)$ مقادیر غیرمجاز کلاسیکی می‌گیرد را می‌توان به عنوان نقض کوانتومی نامساوی کوشی تعبیر کرد. توجه کنید که مطابق معادله ۹۴-۵ هرگاه $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle$ باشد، $g^{(2)}(0)$ کوچک‌تر از یک خواهد بود (برای حالت تعداد، $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = 0$ است). حالت‌هایی که برای آن‌ها این شرط برقرار است، زیرپواسونی نامیده می‌شوند (همان‌طور که در فصل ۷ خواهیم دید، حالت‌هایی که دارای آمار زیرپواسونی هستند، غیر کلاسیکی‌اند). چون $g^{(2)}(\tau)$ برای یک میدان تک‌مدی مقدار ثابتی است، پادگروهی رخ نمی‌دهد؛ شرط وقوع این امر $g^{(2)}(0) < g^{(2)}(\tau)$ است. نکته در اینجا است که پادگروهی و آمار زیرپواسونی اثرات متفاوتی هستند، هرچند اغلب به اشتباه آن‌ها را یکسان در نظر می‌گیرند، اما یکسان نیستند [۹]. تعمیم به همدوسی کوانتومی به مرتبه n ام سراسر است. تابع هم‌بستگی کوانتومی مرتبه n ام به صورت زیر داده می‌شود:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) = \text{Tr} \left\{ \hat{\rho} \hat{E}^{(-)}(x_1) \dots \hat{E}^{(-)}(x_n) \hat{E}^{(+)}(x_n) \dots \hat{E}^{(+)}(x_1) \right\} \quad (۱۰۱-۵)$$

و بنابراین تابع همدوسی مرتبه n ام به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) = \frac{G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1)}{G^{(1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1)}(x_n, x_n)} \quad (۱۰۲-۵)$$

چون $G^{(n)}$ شامل آهنگ‌های شمارش (آهنگ‌های شدت و هم‌زمانی) که همواره مثبت‌اند، است، نتیجه می‌شود:

1. Photon antibunching

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) \geq 0. \quad (۱۰۳-۵)$$

با تعمیم تعریف همدوسی مرتبه دوم، یک میدان همدوس مرتبه n است اگر برای تمام $n \geq 1$ داشته باشیم:

$$|g^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1)| = 1 \quad (۱۰۴-۵)$$

اگر به ازای $n \rightarrow \infty$ معادله ۱۰۳-۵ برقرار باشد، حالت را همدوس کامل می‌نامیم. شرط لازم و کافی برای اینکه معادله ۱۰۳-۵ برقرار باشد، این است که تابع هم‌بستگی تجزیه‌پذیر باشد، یعنی

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) = G^{(1)}(x_1, x_1) \dots G^{(1)}(x_n, x_n) \quad (۱۰۵-۵)$$

شرطی که خودبه‌خود برای حالت‌های همدوس برقرار است.

مسائل

۱- عبارتی برای الگوی تداخلی یک آزمایش دوشکاف یانگ برای حالت میدان ورودی n فوتونی به‌دست آورید، یعنی معادله ۵-۶۶ را ثابت کنید.

۲- عبارتی برای الگوی تداخلی آزمایش دوشکاف یانگ برای باریکه نور گرمایی به‌دست آورید.

۳- نشان دهید نور گرمایی همدوس مرتبه اول است، ولی همدوس مرتبه دوم و بالاتر نیست.

۴- حالت برهم‌نهی خلأ و حالت یک فوتون را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle,$$

که در آن $|C_0|^2 + |C_1|^2 = 1$ است و خواص همدوسی آن را بررسی کنید. توجه کنید که از نظر مکانیک کوانتومی، این حالت چون یک حالت خالص است «همدوس» است. نتیجه خود را با نتیجه به‌دست آمده برای حالت مخلوط مقایسه کنید.

$$\rho = |C_0|^2 |0\rangle \langle 0| + |C_1|^2 |1\rangle \langle 1|.$$

۵- با فرض اینکه $|\alpha|$ بزرگ باشد، در مورد خواص همدوسی برهم‌نهی دو حالت همدوس زیر بحث کنید (این حالت، حالت گربه شرودینگر نامیده می‌شود).

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)$$

و نتیجه را با مخلوط زیر مقایسه کنید:

$$\rho = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle \langle \alpha| + |-\alpha\rangle \langle -\alpha|)$$

مراجع

- [1] Fowles, G. R. (1989). Introduction to Modern Optics, 2nd edition (Mineola: Dover), p. 58; Pedrott, F. L. and Pedrotti, L. S. Introduction to Optics, 2nd edition (Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993), p. 247.
- [2] Glauber, R. J. Phys. Rev. (1963). 130, 2529; Phys. Rev., 131 (1963), 2766; Titulaer, U. M. and Glauber, R. J. Phys. Rev., 140 (1965), B676. See also Mehta, C. L. and Sudarshan, E. C. G Phys. Rev., 138 (1965), B274.
- [3] Walls, D. F. Am. J. Phys. (1977). 45, 952.
- [4] Dirac, P. A. M. (1958). The Principles of Quantum Mechanics, 4th edition (Oxford: Oxford University Press), p. 9.
- [5] Magyar, G. and Mandel, L. (1963). Nature, 198, 255.
- [6] Hanbury Brown, R. and Twiss, R. Q. (1956). Nature, 177, 27. For a complete and historical account of intensity interferometry, see R. Hanbury Brown, The Intensity Interferometer (London: Taylor and Francis, 1974).
- [7] See Loudon, R. (2000). The Quantum Theory of Light, 3rd edition (Oxford: Oxford University Press), chapter 3.
- [8] See Loudon, R. Phys. Bull. (1976). 27, 21, reprinted in L. Allen and P. L. Knight, Concepts of Quantum Optics (Oxford: Pergamon, 1983), p. 174; and the review article, Walls, D. F. Nature, 280 (1979), 451.
- [9] Zou, X. T. and Mandel, L. (1990). Phys. Rev. A, 41, 475.

کتاب‌شناسی

یک منبع اطلاعات استاندارد در مورد نظریه همدوسی و اپتیک کلاسیک عبارت است از

- Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics*, 7th edition (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).

یک کتاب مفید دیگر با یک فصل بسیار خوب در مورد نظریه همدوسی کلاسیک عبارت است از

- Lipson, S. Lipson, G. H. and Tannhauser, D. S. *Optical Physics* 3rd edition (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).

کتابی که همدوسی کلاسیکی و کوانتومی را مورد بحث قرار می‌دهد، کتاب مفصل زیر است:

- Mandel, L. and Wolf, E. *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).

بعضی از کتاب‌ها که نظریه همدوسی اپتیک کوانتومی را خوب ارائه داده‌اند، عبارت‌اند از:

- Weissbluth, M. *Photon-Atom Interactions* (New York: Academic Press, 1989).

(بحث همدوسی کوانتومی در این کتاب تاحدودی به آنچه در کتاب بالا آمده است، نزدیک است.)

- Loudon, R. *The Quantum Theory of Light*, 3rd edition (Oxford: Oxford University Press, 2000).

- Walls, D. F. and Milburn, G. J. *Quantum Optics*, 2nd edition (Berlin: Springer, 1994).

مراجعه به مقاله مروری زیر، هرچند قدیمی است، توصیه می‌شود:

- Mandel, L. and Wolf, E. Coherence Properties of Optical Fields, *Rev. Mod. Phys.*, 37 (1965), 231.

تقسیم‌کننده‌های باریکه و تداخل‌سنج‌ها

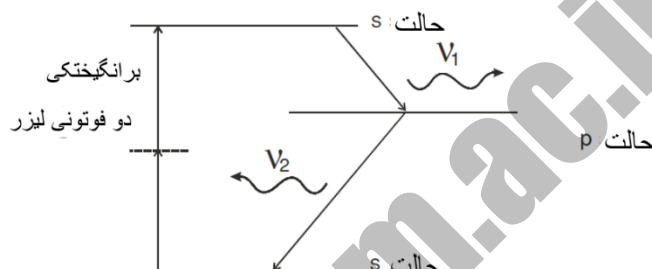
۱-۶ آزمایش‌ها با تک فوتون‌ها

عامل مرکزی در نظریهٔ اپتیک کوانتومی، همان‌طوری که از فصل‌های قبل فهمیدیم، مفهوم فوتون است. شاید مناسب باشد که این سؤال را مطرح کنیم: شواهد وجود فوتون چیست؟ اکثر ما برای اولین بار در مبحث اثر فوتوالکتریک با مفهوم فوتون مواجه شده‌ایم. همان‌طور که در فصل ۵ نشان داده‌ایم، درواقع اثر فوتوالکتریک برای آشکارسازی غیرمستقیم حضور فوتون‌ها به کار برده شد. درواقع، این فوتوالکتردها بودند که شمردن می‌شدند، اما می‌شد بعضی از جنبه‌های اثر فوتوالکتریک را بدون وارد کردن مفهوم فوتون توصیف کرد. درواقع می‌توان حتی فراتر از این رفت و با یک نظریهٔ نیمه کلاسیک که در آن اتم‌ها کوانتیده و میدان کلاسیکی باشد، آن را توصیف کرد. اما لازم است بگوییم برای توصیف تمام جنبه‌های اثر فوتوالکتریک میدان باید کوانتیده باشد. از قضا «دلیل» مهم دیگر برای وجود فوتون، یعنی اثر کامپتون را نیز می‌توان بدون میدان کوانتیده تشریح کرد.

در تلاشی که تیلور^۱ در ۱۹۰۹ [۱] برای یافتن اثرات کوانتومی نور انجام داد، فرآیندهای تداخلی را در یک آزمایش با چشمهٔ نوری فوق‌العاده ضعیف به دست آورد. چشمه‌ای که وی مورد استفاده قرار داد، یک لامپ گازی بود که نور حاصل از آن را با عبور دادن از شیشه‌های دوده‌اندود ضعیف می‌کرد. به جای «دوشکاف» از یک سوزن استفاده کرد که وقتی در معرض نور چشمه قرار می‌گرفت، سایه‌اش روی پرده، فرآیندهای یک الگوی تفرق را نشان می‌داد. اما آنچه تیلور مشاهده کرد، این بود که با کاهش مستمر شدت نور، حتی آن قدر پایین که می‌توان براساس بررسی‌های انرژی نتیجه‌گیری کرد که در هر لحظه تنها یک فوتون بین چشمه و پرده وجود

1. Taylor

داشته باشد، هنوز هم فرانرها مشاهده می‌شوند. ظاهراً فوتون‌هایی که یکی یکی از سوزن عبور می‌کنند، به تداخل منجر می‌شوند. احتمالاً همین تجربه منشأ این نظر مشهور دیراک [۲] است که «هر فوتون تنها با خودش تداخل می‌کند و تداخل بین دو فوتون اتفاق نمی‌افتد». اما امروزه، همان‌طور که در فصل ۵ مورد بحث قرار گرفت، می‌دانیم که یک چشمه گرمایی نظیر لامپ به کاررفته توسط تیلور، فوتون‌ها را به صورت یکی یکی تولید نمی‌کند، بلکه آن‌ها را به صورت خوشه ایجاد می‌کند. بنابراین اشتباه است که تنها با در نظر گرفتن ملاحظات انرژی، تعداد فوتون‌های بین چشمه و پرده را در هر لحظه تعیین کرد؛ احتمال قوی وجود دارد که در این اثر خوشه‌ای، دو فوتون در هر لحظه وجود داشته باشند. یک



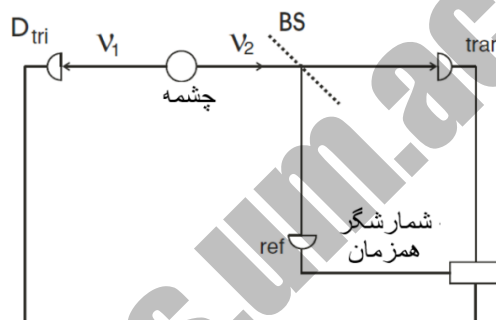
شکل ۶-۱ نمودار ترازهای انرژی چشمه تک فوتونی برای آزمایش‌های گرانیگر و همکاران. یک اتم کلسیم تحت تابش یک لیزر با جذب دو فوتون به حالت بالاتر s برانگیخته می‌شود. سپس اتم به صورت آبشاری ابتدا با گسیل یک فوتون با فرکانس ν_1 به حالت p واپاشی می‌کند و سپس با گسیل یک فوتون با فرکانس ν_2 به حالت اولیه s برمی‌گردد.

چشمه لیزر، فوتون‌ها را به طور تصادفی تولید می‌کند. بنابراین - حتی وقتی خیلی ضعیف باشد - احتمال این هست که بیش از یک فوتون بین پرده و چشمه وجود داشته باشد. برای اینکه تاحد ممکن به حالتی که یک فوتون منفرد بین چشمه و پرده باشد برسیم، لازم است یک چشمه پاد خوشه‌ای فوتونی داشته باشیم. این خود به چشمه‌ای نیاز دارد که شامل تنها تعداد کمی و در حد ایدئال، تنها یک اتم باشد.

یک چنین چشمه‌ای تنها اخیراً توسط گرانیگر^۱ و همکاران [۳] تولید شد که در اصل برای تست بنیادی مکانیک کوانتومی، جست‌وجوی نقض نامساوی بل، راه‌اندازی شده بود و سپس برای نشان دادن تقسیم‌ناپذیری فوتون به کار رفت. این چشمه از یک باریکه اتم کلسیم تشکیل شده است که توسط نور لیزر به حالت‌های بالاتر s برانگیخته می‌شود. حالت s با گسیل یک فوتون با فرکانس ν_1 به حالت p واپاشی می‌کند. متعاقب آن، اتم یک واپاشی سریع دیگر انجام می‌دهد؛ این بار با گسیل یک فوتون دیگر با فرکانس ν_2 به حالت پایه s می‌رود (شکل ۶-۱ را ببینید). این فوتون‌ها برای برقراری بقای تکانه در دو جهت مخالف گسیل می‌شوند. در آزمایشی که در مرجع [۳] تشریح شده است، فوتون اول که توسط D_{trig} آشکار می‌شود، به عنوان یک «ماشه» عمل می‌کند تا یک مجموعه آشکارسازهای فوتونی را که در خروجی یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ قرار دارند، از فوتون

1. Grangier

دیگری که مطابق شکل ۶-۲ به آن می‌رسد، آگاه کند. این ماشه با سد الکترونیک آشکارسازی به فاصله زمانی کوتاه به فوتوالکترون‌ها اعلام می‌کند که منتظر صدور یک فوتون از تقسیم‌کننده باریکه باشند. این امر باعث می‌شود فوتون‌هایی که به‌طور ناخواسته از سایر منابع وارد آشکارسازها می‌شوند، شمرده نشوند. طرح‌واره آزمایش شکل ۶-۲ به گونه‌ای است که تنها ماهیت ذره‌ای فوتون‌ها را نشان می‌دهد؛ یعنی فوتون منفردی که به تقسیم‌کننده باریکه می‌رسد، یا به سمت آشکارساز D_{ref} منعکس می‌شود یا به سمت آشکارساز D_{tran} عبور می‌کند. یعنی این آزمایش یک آزمایش «کدام مسیر»^۱ است و هیچ اثر تداخلی از آن انتظار نمی‌رود. هیچ شمارش هم‌زمانی از فوتون‌های عبور کرده و منعکس شده نباید وجود داشته باشد (شمارش‌ها باید پادهم‌بسته باشند) و چون تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ است، تکرارهای آزمایش باید به علامت‌دهی ۵۰٪ برای هر آشکارساز منجر شوند. پیش‌بینی‌های این آزمایش توسط محققان تأیید شده است.



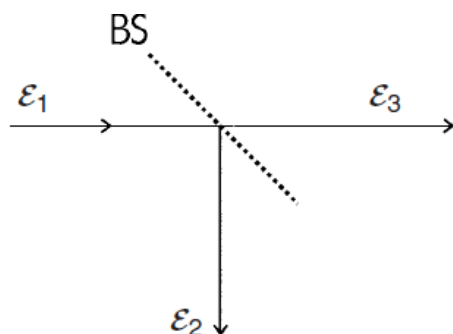
شکل ۶-۲ آزمایش پادهم‌بستگی گرانگیر و همکاران. آشکارسازی فوتون ماشه، شمارشگرهای هم‌زمان را از عبور یک فوتون از تقسیم‌کننده باریکه آگاه می‌کند. تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ است.

۶-۲ مکانیک کوانتومی تقسیم‌کننده‌های باریکه

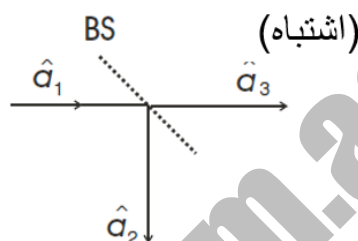
در اینجا باید قدری تأمل نماییم و تقسیم‌کننده باریکه را در یک چهارچوب کاملاً کوانتومی بررسی کنیم. در فصل قبل مفهوم تقسیم‌کننده باریکه را تاحدی به اختصار معرفی کردیم. در آنجا توانستیم از آن بگذریم؛ زیرا برای باریکه‌های نور «کلاسیک‌مانند»، باریکه‌های همدوس و گرمایی، بررسی‌های کوانتومی و کلاسیکی تقسیم‌کننده‌های باریکه با هم توافق داشتند. اما در سطح یک یا چند فوتون، روش کلاسیک در مورد تقسیم‌کننده‌های باریکه به نتایج همراه با خطا و کاملاً گمراه‌کننده منجر می‌شود.

برای اینکه ببینیم چگونه استدلال کلاسیکی درباره تقسیم‌کننده‌های باریکه به خطا منجر می‌شود، ابتدا یک میدان نوری کلاسیکی با دامنه مختلط E_1 را که مطابق شکل ۶-۳ به یک تقسیم‌کننده باریکه بدون اتلاف می‌تابد و E_2 و E_3 به ترتیب دامنه‌های باریکه‌های منعکس شده و عبور کرده‌اند، در نظر می‌گیریم. اگر t و r (که هر دو مختلط هستند) به ترتیب ضریب انعکاس و ضریب عبور باشند، نتیجه می‌شود:

1. Which path experiment



شکل ۶-۳ یک تقسیم‌کننده باریکه کلاسیکی؛ یک میدان کلاسیکی با دامنه E_1 به دو میدان با دامنه‌های E_2 و E_3 تقسیم می‌شود.



شکل ۶-۴ طرح خام و ناصحیح توصیف کوانتومی یک تقسیم‌کننده باریکه

$$E_2 = rE_1 \quad \text{و} \quad E_3 = tE_1. \quad (۶-۱)$$

برای یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ باید داشته باشیم $|r| = |t| = 1/\sqrt{2}$ ، اما برای بررسی کلی، این شرط را در اینجا اعمال نمی‌کنیم. چون تقسیم‌کننده باریکه بدون اتلاف فرض شده است، باید شدت باریکه ورودی با مجموع شدت‌های دو باریکه خروجی برابر باشد.

$$|E_1|^2 = |E_2|^2 + |E_3|^2 \quad (۶-۲)$$

که ایجاب می‌کند:

$$|r|^2 + |t|^2 = 1. \quad (۶-۳)$$

برای بررسی کوانتومی تقسیم‌کننده باریکه ممکن است بتوان دامنه‌های E_i ی میدان‌های مختلط کلاسیکی را با مجموعه عملگرهای نابودی $\hat{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) مطابق شکل ۶-۴ جایگزین کرد. مشابه با مورد کلاسیکی می‌نویسیم:

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 \quad \text{و} \quad \hat{a}_3 = t\hat{a}_1 \quad (۶-۴)$$

لیکن عملگرهای هر میدان باید در روابط جابه‌جایی زیر صدق کنند:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (5-6)$$

اما به سادگی می‌توان دید که برای عملگرهای معادله ۴-۶ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] &= |r|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |r|^2, \\ [\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] &= |t|^2 [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |t|^2, \\ [\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] &= rt^* \neq 0, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (6-6)$$

بنابراین تبدیلات ۴-۶ روابط جابه‌جایی را حفظ نمی‌کنند و بنابراین نمی‌توانند توصیف صحیح کوانتومی یک تقسیم‌کننده باریکه را بدهند. این مشکل را می‌توان به صورت زیر برطرف کرد:

در تصویر کلاسیکی از تقسیم‌کننده باریکه یک «درگاه» بدون استفاده وجود دارد که چون در آن میدان ورودی نیست، اثری روی باریکه‌های خروجی ندارد. لیکن در تصویر مکانیک کوانتومی، این درگاه استفاده نشده شامل یک مد میدان کوانتیده، یعنی حالت خلأست و همان‌طور که بارها دیدیم، افت‌وخیزهای خلأ به اثرات مهم فیزیکی منجر می‌شوند. وضعیت با تقسیم‌کننده باریکه از این قاعده مستثنا نیست. در شکل ۵-۶ تمام مدهای لازم برای یک توصیف کوانتومی صحیح از تقسیم‌کننده باریکه را نشان داده‌ایم که در آن $\hat{a}_0$ معرف عملگر میدان ورودی اشغال‌نشده کلاسیکی است. همچنین، دو مجموعه عبور و انعکاس نشان داده شده‌اند تا امکان عدم تقارن تقسیم‌کننده باریکه را ممکن سازند. حال تبدیلات تقسیم‌کننده باریکه برای عملگرهای میدان را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{a}_2 = r\hat{a}_1 + t'\hat{a}_0, \quad \hat{a}_3 = t\hat{a}_1 + r'\hat{a}_0 \quad (7-6)$$

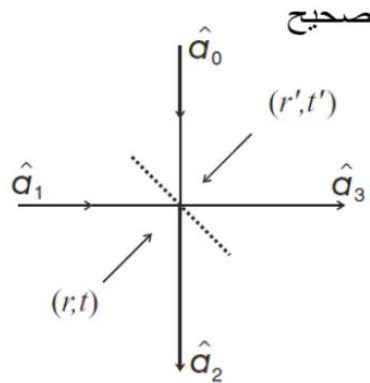
یا به طور فشرده‌ای

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' & r \\ r' & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix}. \quad (8-6)$$

به سادگی، می‌توان دید مادامی که روابط

$$r^*t + r't'^* = 0 \quad \text{و} \quad |r'| = |r|, |t| = |t'| \quad |r|^2 + |t|^2 = 1, \quad r^*t' + r't^* = 0. \quad (9-6)$$

برقرار باشند، روابط جابه‌جایی ۵-۶ برقرار خواهند بود. این روابط را که روابط متقابل نامیده می‌شوند، می‌توان براساس بقای انرژی نیز به دست آورد. حال چند مثال در این باره ارائه می‌دهیم. انتقال‌های فاز باریکه‌های انعکاسی و عبوری به ساختار تقسیم‌کننده باریکه بستگی دارد [۴].



شکل ۵-۶ طرح صحیح یک تقسیم‌کننده باریکه کوانتومی

اگر تقسیم‌کننده باریکه به صورت یک لایه عایق منفرد ساخته شده باشد، فاز باریکه‌های انعکاسی و عبوری به ضریب $\exp(\pm i\pi/2) = \pm i$ با یکدیگر اختلاف خواهند داشت. برای یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰، با فرض اینکه باریکه انعکاسی انتقال فاز $\pi/2$ پیدا کند، رابطه مدهای ورودی و خروجی به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_0 + i\hat{a}_1), \quad \hat{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{a}_0 + \hat{a}_1). \quad (۱۰-۶)$$

چون باید تبدیل مدهای ورودی و خروجی یکانی باشد، معادله ۸-۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} \hat{U} \quad (۱۱-۶)$$

که در آن $\hat{U}$ یک عملگر یکانی است. این تبدیل یک فرمول‌بندی تصویر هاینبرگ از تقسیم‌کننده باریکه ارائه می‌دهد. برای تبدیل معرفی شده توسط معادله ۱۰-۶، عملگر $\hat{U}$ به صورت زیر است که می‌توان با استفاده از لم بکر-هاسدرف آن را نشان داد:

$$\hat{U} = \exp \left[i \frac{\pi}{4} (\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger) \right], \quad (۱۲-۶)$$

از طرف دیگر، می‌توان تصویر شرودینگر را انتخاب و سؤال زیر را مطرح کرد. برای یک حالت ورودی به تقسیم‌کننده باریکه، حالت خروجی چه خواهد بود؟ با توجه به اینکه تمام حالت‌های عدد فوتونی $|n\rangle$ و در نتیجه هر برهم‌نهی از آن‌ها و یا هر مخلوط آماری از آن‌ها را می‌توان با اعمال توان m عملگر خلق روی خلأ به دست آورد، با استفاده از معادلات ۷-۶ و ۸-۶ برای ساختن حالت‌های خروجی، می‌توان از اعمال عملگرهای خلق تبدیل‌یافته روی حالت‌های خلأ مدهای خروجی استفاده کرد. واضح است که یک حالت خلأ ورودی به یک حالت خلأ خروجی تبدیل می‌شود: $|0\rangle_0 |0\rangle_1 \rightarrow |0\rangle_2 |0\rangle_3$.

به‌عنوان یک مثال حالت ورودی، یک فوتون منفرد $|0\rangle_0|1\rangle_1$ را که می‌توان به‌صورت $|0\rangle_0|0\rangle_1\hat{a}_1^\dagger$ نوشت، در نظر بگیرید. برای تقسیم‌کننده‌ای که توسط معادله ۶-۱۰ توصیف می‌شود، داریم $\hat{a}_1^\dagger = (i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger)/\sqrt{2}$. بنابراین با استفاده از $|0\rangle_2|0\rangle_3 \xrightarrow{\text{BS}} |0\rangle_0|0\rangle_1$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} |0\rangle_0|1\rangle_1 &\xrightarrow{\text{BS}} \frac{1}{\sqrt{2}}(i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger)|0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3). \end{aligned} \quad (۱۳-۶)$$

این یک نتیجه مهم است. برطبق آن، وقتی یک فوتون منفرد به یکی از درگاه‌های ورودی بتابد، درحالی‌که درگاه دیگر تنها شامل خلأست، با احتمال مساوی یا عبور می‌کند و یا منعکس می‌شود. البته این دقیقاً همان چیزی است که قبلاً ادعا کردیم و توضیح می‌دهد که چرا وقتی شمارنده‌های فوتونی در خروجی‌های تقسیم‌کننده باریکه قرار گیرند، انتظار هیچ شمارش هم‌زمان نمی‌رود، همان‌طور که در آزمایش گرانگیر تأیید شد [۳]. درواقع چون تقسیم‌کننده باریکه به‌خوبی قابل فهم است، فقدان شمارش هم‌زمان در آزمایش بالا را می‌توان نشانه‌ای از اینکه چشمه واقعاً حالت تک‌فوتونی تولید می‌کند، در نظر گرفت (واضح است که تقسیم‌کننده باریکه در خلق و نابودی فوتون یک دستگاه غیرفعال است. البته ابزارهای فعالی وجود دارند که به‌عنوان مثال، یک فوتون را به دو فوتون تبدیل می‌کنند که در فصل بعدی به آن‌ها خواهیم پرداخت). از طرفی، لازم است یک نکته دیگر درباره حالت خروجی ۶-۱۳ گفته شود. این حالت یک حالت درهم‌تنیده است: نمی‌توان آن را به‌صورت حاصل ضرب ساده حالت‌های مد ۲ و ۳ نوشت. عملگر چگالی (پیوست «ا» را ببینید) برای حالت (خالص) ۶-۱۳ عبارت است از

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{23} &= \frac{1}{2} \{ |1\rangle_2|0\rangle_3 \langle 1|_2 \langle 0|_3 + |0\rangle_2|1\rangle_3 \langle 0|_2 \langle 1|_3 \\ &\quad + i |1\rangle_2|0\rangle_3 \langle 0|_2 \langle 1|_3 - i |0\rangle_2|1\rangle_3 \langle 1|_2 \langle 0|_3 \}. \end{aligned} \quad (۱۴-۶)$$

با قرار دادن آشکارسازها در محل دو باریکه خروجی، «همدوسی» کامل که توسط بردار حالت (۶-۱۳) یا عملگر (۶-۱۴) توصیف می‌شود را اندازه‌گیری می‌کنیم. از طرف دیگر، فرض کنید هیچ اندازه‌گیری‌ای (به‌عنوان مثال، روی مد ۳) انجام نشود. در این صورت، مد ۲ توسط عملگر چگالی کاهش‌یافته‌ای توصیف می‌شود که از گرفتن رد روی حالت‌های اندازه‌گیری نشده به دست می‌آید (پیوست «ا» را ببینید).

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_2 &= \text{Tr}_3 \hat{\rho}_{23} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_3 \langle n | \hat{\rho}_{23} | n \rangle_3 \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle_{22} \langle 0| + |1\rangle_{22} \langle 1|). \end{aligned} \quad (۱۵-۶)$$

این حالت صرفاً یک حالت مخلوط آماری را نشان می‌دهد؛ زیرا هیچ جمله «غیرقطری» همدوسی به شکل $|1\rangle\langle 0|$ یا $|0\rangle\langle 1|$ وجود ندارد. بنابراین با قرار دادن یک آشکارساز در تنها یکی از باریکه‌های خروجی، همان‌طوری که انتظار می‌رود، نتایج صفر یا یک هر کدام با احتمال ۵۰٪ حاصل می‌شود.

قبل از پرداختن به تداخل تک‌فوتون، دو نمونه دیگر از تقسیم شدن باریکه را در نظر می‌گیریم. ابتدا یک حالت همدوس، یک حالت کلاسیک گونه (به جای حالت تک‌فوتونی که یک حالت با ویژگی غیر کلاسیکی بالایی است) را که به یک تقسیم کننده باریکه می‌تابد، در نظر می‌گیریم و همانند قبل فرض می‌کنیم که فقط خلأ در درگاه ورودی دیگر قرار دارد. یعنی حالت اولیه عبارت است از $|0\rangle_0|\alpha\rangle_1 = \hat{D}_1(\alpha)|0\rangle_0|0\rangle_1$ که در آن $\hat{D}_1(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}_1^\dagger - \alpha^*\hat{a}_1)$ عملگر جابه جایی برای مد ۱ است. سپس می‌توان با روش بالا، حالت خروجی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} |0\rangle_0|\alpha\rangle_1 &\xrightarrow{\text{BS}} \exp\left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger) - \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}}(-i\hat{a}_2 + \hat{a}_3)\right] |0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \exp\left[\left(\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right)\hat{a}_2^\dagger - \left(\frac{-i\alpha^*}{\sqrt{2}}\right)\hat{a}_2\right] \times \\ &\quad \exp\left[\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)\hat{a}_3^\dagger - \left(\frac{\alpha^*}{\sqrt{2}}\right)\hat{a}_3\right] |0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 \left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3 \end{aligned} \quad (۱۶-۶)$$

که نشان می‌دهد همان نتیجه‌ای است که برای یک موج نوری کلاسیکی (که شدت ورودی آن به طور مساوی به دو باریکه خروجی تقسیم می‌شود، یعنی نیمی از میانگین فوتون‌های ورودی، $|\alpha|^2/2$ ، در هریک از باریکه‌ها وجود دارد) انتظار داریم. همچنین به طور طبیعی انتقال فاز $i = e^{i\pi/2}$ را برای موج انعکاسی به دست می‌آوریم. بالاخره توجه کنید که خروجی درهم تنیده نیست.

اساساً همه چیز درباره تقسیم شدن باریکه برای یک حالت همدوس کلاسیکی است و از این نظر باید قدری احتیاط کرد. مورد یک تک‌فوتون ورودی به تقسیم کننده باریکه را نمی‌توان از مورد حدی ورودی یک حالت همدوس، یعنی $|\alpha\rangle$ های کوچک به دست آورد. به سادگی، می‌توان نشان داد که نتیجه تک‌فوتونی معادله ۶-۱۳ را نمی‌توان به هیچ طریقی به عنوان مورد حدی معادله ۶-۱۶ به دست آورد. این عمل کاملاً آشکار است و بدون هیچ گونه محاسبه ریاضی می‌توان آن را دید؛ زیرا حالت قبلی درهم تنیده است، در حالی که حالت اخیر نیست. حالت درهم تنیده را نمی‌توان به عنوان حد حالت حاصل ضربی به دست آورد. همان‌طوری که در اوایل این فصل یادآوری کردیم، نکته اساسی این است که تلاش برای اینکه رفتار میدان ضعیف را از نتایج کلاسیک برون‌یابی کنیم، گمراه کننده و کاملاً اشتباه است.

به‌عنوان مثال آخر از تبدیلات عملگری به حوزه صرفاً کوانتومی برمی‌گردیم و وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن تک‌فوتون‌ها به‌طور هم‌زمان به دو درگاه ورودی تقسیم‌کننده باریکه به‌صورت ۵۰:۵۰ تزیق شوند، یعنی حالت ورودی $|0\rangle_0|0\rangle_1 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle_0|0\rangle_1$ است. مشابه با روش قبل، با در نظر گرفتن $\hat{a}_1^\dagger = (i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger)/\sqrt{2}$ و $\hat{a}_0^\dagger = (\hat{a}_2^\dagger + i\hat{a}_3^\dagger)/\sqrt{2}$ داریم:

$$\begin{aligned} |1\rangle_0|1\rangle_1 &\xrightarrow{\text{BS}} \frac{1}{2}(\hat{a}_2^\dagger + i\hat{a}_3^\dagger)(i\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger)|0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \frac{i}{2}(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3^\dagger)|0\rangle_2|0\rangle_3 \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|2\rangle_2|0\rangle_3 + |0\rangle_2|2\rangle_3). \end{aligned} \quad (17-6)$$

ظاهراً دو فوتون همراه با هم ظاهر می‌شوند، به‌طوری‌که آشکارسازهای فوتونی که در سر راه باریکه‌های خروجی قرار دارند، نباید به‌طور هم‌زمان علامت ثبت کنند. اما برخلاف مورد فرود یک تک‌فوتون، مبنای فیزیکی برای به‌دست آوردن غیرهم‌زمان شمارش نتیجه طبیعت ذره‌مانندی فوتون‌ها نیست، بلکه به‌خاطر تداخل (اثر موج‌مانندی) بین دو راه ممکن برای به‌دست آوردن حالت خروجی $|1\rangle_2|1\rangle_3$ است: فرایندی که هر دو فوتون عبور کرده (شکل ۶-۶أ) و فرایندی که هر دو منعکس شده‌اند (شکل ۶-۶ب). توجه کنید که دو فرایند بالا برای حالت خروجی $|1\rangle_2|1\rangle_3$ از یکدیگر قابل تشخیص نیستند. یک راه ساده شهودی برای فهم این نتیجه وجود دارد. با توجه به قاعده فاینمن [۵] برای به‌دست آوردن احتمال یک خروجی که بتواند به چند طریق غیرقابل تشخیص رخ دهد، کافی است دامنه‌های احتمال تمام فرایندها را با هم جمع و سپس مجذور مدول آن را محاسبه کنیم. با فرض اینکه تقسیم‌کننده باریکه ما توسط معادله ۶-۱۰ توصیف شود، فوتون‌های انعکاس‌یافته هر کدام یک انتقال فاز $e^{i\pi/2} = i$ پیدا می‌کنند. دامنه برای عبور هریک از فوتون‌ها برابر $A_T = 1/\sqrt{2}$ و دامنه برای انعکاس هر کدام برابر $A_R = i/\sqrt{2}$ است. دامنه برای اینکه هر دو فوتون عبور کنند، برابر با $A_T \cdot A_T$ و دامنه برای انعکاس هر دو برابر با $A_R \cdot A_R$ است. بنابراین احتمال اینکه فوتون‌ها هر دو در دو باریکه خروجی ظاهر شوند، برابر است با

$$P_{11} = |A_T \cdot A_T + A_R \cdot A_R|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0. \quad (18-6)$$

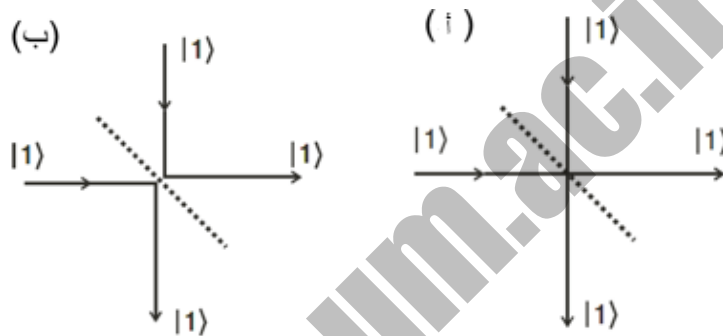
اولین آزمایش برای نشان دادن این اثر توسط هونگ^۱، او^۲ و مندل^۳ [۶] انجام شده است که در فصل ۹ درمورد آن بحث خواهیم کرد.

1. Hong

2. OU

3. Mandel

ممکن است بخواهیم نتیجه معادله ۶-۱۷ را به‌خاطر طبیعت بوزونی فوتون‌ها، نوعی خوشه‌بندی به‌مفهوم چگالش بوز-اینشتین (BEC) تعبیر کنیم. درواقع درمورد فرمیون‌ها، نظیر تداخل سنجی نوترون‌ها، فرمیون‌های خروجی یک تقسیم‌کننده باریکه همواره بنابر اصل طرد پاولی، در باریکه‌های مختلف یافت خواهند شد. البته این رفتار و رفتار فوتون‌ها به خواص آماری ذرات و در نتیجه به طبیعت عملگرهایی که آن‌ها را توصیف می‌کنند، مربوط می‌شود. اما برای فوتون‌ها گمراه‌کننده است که این خوشه‌بندی را مشابه چگالش بوز-اینشتین^۱ در نظر بگیریم. به‌عنوان مثال، اگر n فوتون را به‌طور هم‌زمان به هر درگاه تزریق کنیم، یعنی حالت فرودی $|n\rangle_1 |n\rangle_0$ باشد، حالت خروجی به‌جز به‌ازای $n=1$ $|2n\rangle_3 |0\rangle_2 + e^{i\phi} |0\rangle_2 |2n\rangle_3$ نخواهد بود.



شکل ۶-۶ دو فرایند غیرقابل تشخیص با تک‌فوتون‌های فرودی هم‌زمان: ا. هر دو فوتون عبور می‌کنند. ب. هر دو فوتون منعکس می‌شوند. این دو فرایند به‌طور تخریبی با یکدیگر تداخل می‌کنند.

حال دوباره حالت‌های خلأ و همدوس فرودی به یک تقسیم‌کننده باریکه را که در معادله ۶-۱۶ آمده است، در نظر بگیرید. حالت حاصل ضربی $|\alpha\rangle_1 |0\rangle_0$ را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$|in\rangle = |0\rangle_0 |\alpha\rangle_1 = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_0 |N\rangle_1 \quad (6-19)$$

که در آن به‌وضوح یک برهم‌نهی از حالت‌های حاصل ضربی $|0\rangle_0 |N\rangle_1$ داریم. چون تقسیم‌کننده باریکه تعداد کل فوتون‌ها را ثابت نگه می‌دارد، باید بتوانیم از بسط حالت‌های حاصل ضربی در سطر آخر معادله ۶-۱۶ استفاده و با بخش‌بندی آن به بخش‌هایی با تعداد کل N فوتون، تبدیل متناظر برای تقسیم‌کننده باریکه را برای حالت‌های ورودی $|0\rangle_0 |N\rangle_1$ نتیجه‌گیری کنیم. داریم:

$$|out\rangle = \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_2 \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle_3 = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha/\sqrt{2})^n (\alpha/\sqrt{2})^m}{\sqrt{n!m!}} |n\rangle_2 |m\rangle_3, \quad (6-20)$$

1. Bose-Einstein condensation

و با قرار دادن $m = N - n$ پس از مرتب‌سازی نتیجه می‌گیریم:

$$|\text{out}\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |\psi_N\rangle_{2,3}, \quad (21-6)$$

که در آن

$$|\psi_N\rangle_{2,3} = \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{n=0}^N i^n \left[\frac{N!}{n! (N-n)!} \right]^{1/2} |n\rangle_2 |N-n\rangle_3. \quad (22-6)$$

بدین ترتیب، نتیجه می‌گیریم که تقسیم‌کننده باریکه باعث تبدیل $|\psi_N\rangle_{2,3} \rightarrow |0\rangle_0 |N\rangle_1$ می‌شود. حالت $|\psi_N\rangle_{2,3}$ یک حالت دوجمله‌ای است که در آن N فوتون برطبق توزیع دوجمله‌ای بر روی دو مد توزیع شده‌اند.

یک راه دیگر برای به‌دست آوردن این نتیجه این است که از عملگرهای تصویری استفاده کنیم (پیوست «ب» را ببینید) (تأکید می‌کنیم که تنها ریاضیات عملگرهای تصویری در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است و هیچ‌گونه اندازه‌گیری به تقلیل حالت منجر نشده است). اگر فرض کنیم $\hat{P}_N^{(0,1)} = |0\rangle_0 |N\rangle_1 \langle 0|_1 \langle N|_0$ عملگر تصویر به بخش N فوتونی با مدهای ۰-۱ باشد، عملگر تصویری متناظر با مدهای ۲-۳ عبارت است از

$$\hat{P}_N^{(2,3)} = \sum_{k=0}^N |k\rangle_2 \langle N-k|_3 \langle k|_3 \langle N-k|_2. \quad (23-6)$$

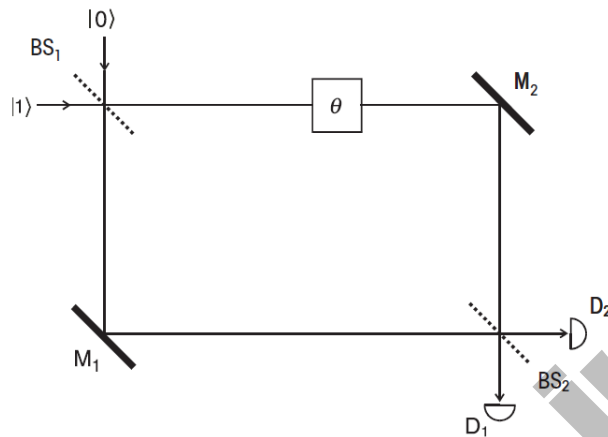
بدیهی است که داریم:

$$|0\rangle_0 |N\rangle_1 = \frac{\hat{P}_N^{(0,1)} |\text{in}\rangle}{\langle \text{in} | \hat{P}_N^{(0,1)} | \text{in} \rangle^{1/2}}, \quad (24-6)$$

و بنابراین

$$|\psi_N\rangle_{2,3} = \frac{\hat{P}_N^{(2,3)} |\text{out}\rangle}{\langle \text{out} | \hat{P}_N^{(2,3)} | \text{out} \rangle^{1/2}}. \quad (25-6)$$

بررسی‌های مشابه به ما این امکان را می‌دهند تا با شروع از $|\text{in}\rangle = |\alpha\rangle_0 |\alpha\rangle_1$ حالت خروجی متناظر با حالت ورودی $|N\rangle_0 |N\rangle_1$ را به‌دست آوریم. اثبات این رابطه به‌عنوان تمرین برعهده خواننده گذاشته می‌شود (مسئله ۸).



شکل ۶-۷ تداخل‌سنج ماخ-زندر با ورودی یک تک‌فوتون. تقسیم‌کننده باریکه‌های BS_1 و BS_2 ی ۵۰:۵۰ هستند، M_1 و M_2 آینه‌ها و مربعی که با θ مشخص شده است، معرف انتقال فاز نسبی بین دو بازوست.

۳-۶ تداخل‌سنجی با تک فوتون

حال به آزمایش تک‌فوتون گرانگیر^۱ و همکاران برمی‌گردیم [۳]. همان‌طور که گفتیم، این افراد از یک چشمه اتمی استفاده کردند تا تک‌فوتون‌هایی را تولید کنند که با فقدان شمارش هم‌زمان فوتون توسط آشکارسازهایی که در درگاه‌های خروجی تقسیم‌کننده باریکه قرار داشتند، تأیید شده بودند. البته یک چنین آزمایشی تنها طبیعت ذره‌ای فوتون را معین می‌کرد و هیچ تداخلی را نشان نمی‌داد. برای به‌دست آوردن اثرات تداخلی با تک‌فوتون‌ها، باید مسیرها به آشکارسازها را درهم بیامیزیم تا به‌خاطر فقدان اطلاعات «کدام مسیر»، تداخل اتفاق بیفتد. یک راه مناسب برای این کار این است که از تداخل‌سنج ماخ-زندر (MZI) استفاده کنیم که از دو تقسیم‌کننده باریکه و یک مجموعه آینه مطابق شکل ۶-۷ تشکیل شده است. تداخل به این‌خاطر اتفاق می‌افتد که آشکارسازهای D_1 و D_2 قادر به تشخیص اینکه فوتون از مسیر ساعت‌گرد و یا پاد ساعت‌گرد رسیده است، نیستند. در مسیر پاد ساعت‌گرد، یک انتقال‌دهنده فاز قرار داده شده است که می‌تواند یک قطعه فیبر نوری باشد، به‌طوری که طول مسیرهای MZI متفاوت و قابل تنظیم باشد. این انتقال فاز را می‌توان توسط عملگر یکانی $\exp(i\theta\hat{n})$ نمایش داد که در آن $\hat{n}$ عملگر تعداد میدان در همان بخش تداخل‌سنج است. زاویه θ در واقع معرف انتقال فاز نسبی بین دو مسیر است.

برای اینکه ببینیم چگونه تداخل تک‌فوتون در MZI رخ می‌دهد، ابتدا با حالت ورودی $|1\rangle|0\rangle$ شروع می‌کنیم که در آن این قرارداد را می‌پذیریم که مطابق شکل ۶-۷، حالت‌هایی که پادساعت‌گرد را طی می‌کنند نسبت به آن‌هایی که ساعت‌گرد حرکت می‌کنند، تقدّم داشته باشند. با فرض اینکه تقسیم‌کننده باریکه‌ها توسط معادله ۶-۱۰ توصیف شده باشد، اولین تقسیم‌کننده باریکه (BS_1) حالت ورودی را به‌صورت زیر تبدیل می‌کند:

1. Grangier

$$|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{\text{BS}_1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle). \quad (۲۶-۶)$$

آینه‌ها به هر جمله یک ضریب $e^{i\pi/2}$ وارد می‌کنند و به یک فاز بی‌اهمیت منجر می‌شوند که از آن صرف‌نظر می‌کنیم. انتقال‌دهنده فاز در مسیر ساعت‌گرد باعث تغییر فاز در اولین مؤلفه می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \xrightarrow{\theta} \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta}|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle). \quad (۲۷-۶)$$

در دومین تقسیم‌کننده باریکه (BS_2) تبدیلات زیر را داریم:

$$\begin{aligned} |0\rangle|1\rangle &\xrightarrow{\text{BS}_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle), \\ |1\rangle|0\rangle &\xrightarrow{\text{BS}_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle + i|0\rangle|1\rangle), \end{aligned} \quad (۲۸-۶)$$

که در آن (به قرارداد راستای انتشار دقت کنید) حالت اول در طرف راست رابطه بالا مربوط به باریکه‌ای است که به سمت آشکارساز D_1 و حالت دوم مربوط به باریکه‌ای است که به سمت آشکارساز D_2 می‌رود. بنابراین تبدیل حالت کل ناشی از تقسیم‌کننده باریکه دوم عبارت است از

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\theta}|0\rangle|1\rangle + i|1\rangle|0\rangle) \xrightarrow{\text{BS}_2} \frac{1}{2}[(e^{i\theta} - 1)|0\rangle|1\rangle + i(e^{i\theta} + 1)|1\rangle|0\rangle]. \quad (۲۹-۶)$$

احتمال اینکه حالت $|0\rangle|1\rangle$ آشکار شود (یعنی علامت D_2 دهد)، برابر است با

$$P_{01} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad (۳۰-۶)$$

و احتمال اینکه حالت $|1\rangle|0\rangle$ آشکار شود (یعنی علامت D_1 دهد)، عبارت است از

$$P_{10} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta). \quad (۳۱-۶)$$

بدیهی است که چون طول مسیر و ازاین‌رو θ تغییر کرده است، این احتمال‌ها رفتار نوسانی دارند که همان فرانژهای تداخلی و نشان‌دهنده تداخل تک‌فوتون هستند. دقیقاً همین فرانژها بود که در آزمایش‌های گرانگر و همکاران [۳] مشاهده شد.

۶-۴ اندازه‌گیری‌های بدون برهم‌کنش

اکنون می‌خواهیم از آنچه تا به حال گفتیم، استفاده کنیم و یکی از مهم‌ترین جنبه‌های مکانیک کوانتومی را نشان دهیم که همانا توانایی آشکارسازی حضور یک شیء بدون پراکندگی یک کوانتا (در اینجا فوتون) از آن است.

عقل متعارف حکم می‌کند که برای اینکه وجود یک شیء را مشخص کنیم، لازم است که حداقل یک فوتون که از آن پراکنده شده است را آشکارسازی کنیم. اما اخیراً الیتزور^۱ و ویدمن^۲ [۷] به‌طور نظری و کویات^۳ و همکاران [۸] به‌طور تجربی نشان دادند که این نوع عقل متعارف کاملاً در اشتباه است.

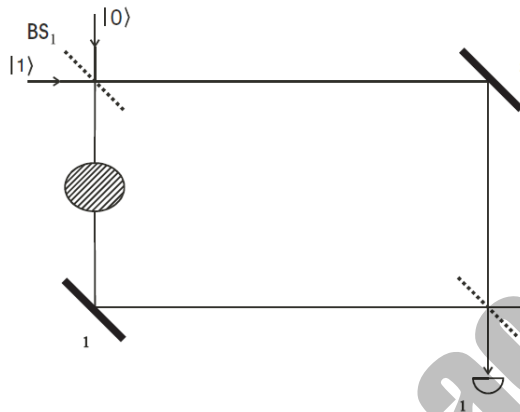
برای دیدن این اثر خلاف عقل متعارف، تداخل سنج ماخ-زندر^۴ (MZI) در شکل ۶-۷ را در نظر بگیرید، ولی این بار طول مسیرهای دو بازو را یکسان در نظر می‌گیریم، یعنی $\theta = 0$ فرض می‌کنیم. تحت این شرایط تنها آشکارساز D_1 علامت می‌دهد. آشکارساز D_2 به‌خاطر تداخل مخرب بین دو مسیر تداخل سنج علامت نمی‌دهد. حال فرض کنید یک شیء در سرراه یکی از بازوهای تداخل سنج ماخ-زندر مطابق شکل ۶-۸ گذاشته شود. حضور این شیء در بازوی پادساعت‌گرد همه چیز را تغییر می‌دهد. حال تصور کنید یک یا چند آشکارساز را در نزدیکی شیء قرار دهیم، به‌طوری که بتوانیم فوتونی را که از آن پراکنده شده است آشکار کنیم. با آشکارسازی این فوتون، دو چیز درمی‌یابیم: اینکه فوتون پس از تقسیم‌کننده باریکه اول مسیر پاد ساعت‌گرد را انتخاب کرده است (یعنی اطلاعات «کدام مسیر» را کسب می‌کنیم) و اینکه یک شیء در مسیر قرار داشته است. اما معلوم می‌شود که حتی لازم نیست برای دریافت حضور یک شیء، فوتون پراکنده شده را آشکار کنیم. فرض کنید هیچ آشکارساز اضافی نزدیک شیئی نباشد و توجه خود را به آشکارسازها در خروجی تداخل سنج ماخ-زندر معطوف کنیم. اگر برای هر بار انجام آزمایش، هیچ کدام از این آشکارسازها علامت ندهند، باز هم مسیر فوتون را می‌دانیم و اینکه باید توسط شیء پراکنده شده باشد. یادآور می‌شویم که بعد از اولین تقسیم‌کننده باریکه احتمال $1/2$ وجود دارد که فوتون در مسیر پادساعت‌گرد باشد و بنابراین با احتمال $1/2$ از شیء پراکنده شده باشد. بنابراین در نیمی از این آزمایش‌ها هیچ کدام از آشکارسازها علامت نمی‌دهند. اما احتمال $1/2$ وجود دارد که فوتون مسیر ساعت‌گرد را طی کند. چون دیگر، مسیر بازی که به تداخل منجر بشود، وجود ندارد، در تقسیم‌کننده باریکه دوم فوتون شانس $50:50$ دارد که به آشکارساز D_1 برسد و یا به آشکارساز D_2 منعکس شود. بنابراین در این موارد که آشکارسازها علامت می‌دهند، نیمی از اوقات D_1 و نیم دیگر D_2 علامت می‌دهند. بنابراین برای کل تداخل سنج، احتمال $1/2$ وجود دارد که هیچ کدام از آشکارسازها علامت ندهند؛ احتمال $1/4$ برای این است که هر کدام از D_1 یا D_2 علامت دهند. توجه کنید که تداخل سنج ماخ-زندر در اصل طوری ساخته شده بود که وقتی هیچ شیء در هیچ مسیری نباشد، تنها D_1 با احتمال 100% علامت بدهد. بنابراین هرگاه D_2 علامت داد، می‌دانیم که باید شیء در یکی از بازوهای تداخل سنج ماخ-زندر حضور داشته باشد. این واقعیت که هرگاه D_2 علامت دهد (درواقع با احتمال 25% علامت می‌دهد)، ممکن است به‌عنوان آشکارسازی یک شیء در یکی از بازوهای تداخل سنج تلقی شود، حتی اگر هیچ فوتونی پراکنده نشده باشد.

این نتیجه نامأنوس در نهایت نشانه‌ای از وجود جنبه نسبتاً عام مکانیک کوانتومی است که ناموضعیت نامیده می‌شود: نوعی اثرات آتی ظاهری، ناشی از برهم‌کنش یا اندازه‌گیری. نمونه‌ای دیگر از اثرات ناموضعیت اثر

1. Elitzur
2. Vaidman

3. Kwiat
4. Mach-Zehnder interferometer (MZI)

یوهم-آهارنوف است که در آن تابع موج یک الکترون به‌خاطر یک شار مغناطیسی محدود که هیچ‌گاه با الکترون برهم‌کنش ندارد، دچار تغییر فاز می‌شود [۹] و نقض نامساوی‌های متعدد بل. نامساوی‌های بل در فصل ۹ بررسی خواهد شد.



شکل ۸-۶ طرح‌واره آزمایش اندازه‌گیری بدون برهم‌کنش؛ یکی از بازوهای تداخل‌سنج ماخ-زندر حاوی یک شیء است که با بیضی هاشورخورده نشان داده شده است.

۵-۶ تداخل‌سنجی با حالت‌های همدوس نور

پس از بررسی تداخل‌سنجی در سطح یک تک‌فوتون که اثرات کوانتومی غالب هستند، حال به بررسی تداخل‌سنجی در نقطه مقابل که در آن فرض می‌کنیم ورودی یک حالت همدوس است، می‌پردازیم. نتیجه اساساً باید یک نتیجه کلاسیکی باشد.

برای انجام این کار، تداخل‌سنج ماخ-زندر در شکل ۶-۷ را در نظر بگیرید که در آن مدی که قبلاً شامل یک تک‌فوتون بوده است، اکنون شامل یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ است. با استفاده از قراردادهای قبلی و استفاده از معادله ۶-۱۶، تقسیم‌کننده باریکه اول تبدیل زیر را انجام می‌دهد:

$$|0\rangle |\alpha\rangle \xrightarrow{BS_1} \left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle. \quad (۳۲-۶)$$

با صرف نظر کردن از فازهای مشترک آینه‌ها، اثر انتقال فاز در بازوی ساعت گرد عبارت است از

$$\left| \frac{i\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \xrightarrow{\theta} \left| \frac{ie^{i\theta}\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle. \quad (۳۳-۶)$$

بالاخره BS_2 تبدیل زیر را انجام می‌دهد:

$$\left| \frac{ie^{i\theta}\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \xrightarrow{BS_2} \left| \frac{i(e^{i\theta}+1)\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle \left| \frac{(e^{i\theta}-1)\alpha}{\sqrt{2}} \right\rangle. \quad (۳۴-۶)$$

در یک اندازه‌گیری انتقال فاز نوعی با تداخل سنج ماخ-زندر، انتقال فاز θ از تفاضل شدت‌های به‌دست آمده از آشکارسازهای D_1 و D_2 تعیین می‌شود. این اختلاف با عملگر اختلاف تعداد دو مد متناسب است. فرض کنید عملگرهای $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ معرف باریکه به سمت آشکارساز D_1 و $(\hat{b}, \hat{b}^\dagger)$ معرف باریکه به سمت آشکارساز D_2 باشد. عملگر اختلاف تعداد را به صورت $\hat{o} = \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}$ تعریف می‌کنیم. از طرف راست معادله ۶-۳۴ داریم $\langle \hat{o} \rangle = |\alpha|^2 \cos \theta$. این اساساً همان نتیجه‌ای است که با استفاده از امواج کلاسیکی نور همدوس به‌دست آوردیم، ولی این تمام ماجرا نیست.

هرگز نباید فراموش کنیم که حالت‌های همدوس هرچند خواص کلاسیک مانند زیادی دارند، ولی اساساً مکانیک کوانتومی هستند و بنابراین همان‌طوری که دیدیم، دارای افت‌وخیزهای کوانتومی هستند. این افت‌وخیزها محدودیت‌هایی روی دقت اندازه‌گیری فاز ایجاد می‌کنند. با استفاده از محاسبه خطای انتشار، عدم قطعیت در اندازه‌گیری‌های فاز به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Delta\theta = \Delta O \left/ \left| \frac{\partial \langle \hat{O} \rangle}{\partial \theta} \right| \right. \quad (۳۵-۶)$$

که در آن $\Delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$ اگر ورودی یک حالت همدوس باشد، عدم قطعیت فاز به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}} |\sin \theta|} \quad (۳۶-۶)$$

که در آن $\bar{n} = |\alpha|^2$ بدیهی است که عدم قطعیت فاز به فاز نسبی θ بستگی دارد و عدم قطعیت فاز بهینه یا مینیمم، برای‌های مضارب فردی از $\pi/2$ برابر $1/\bar{n}$ است. $\Delta\theta_{min}$

لیکن به‌طور بنیادی باید بتوان با استفاده از تداخل سنجی حالت‌های ظاهراً غیر کلاسیکی میدان از این حد که حد استاندارد کوانتومی نامیده می‌شود، تجاوز کرد. درواقع حد بنیادی روی عدم قطعیت فاز که حد هایزنبرگ نامیده می‌شود، برابر است با $\Delta\theta_H = 1/\bar{n}$. رسیدن به این حد یک هدف مهم در تحقیقات اپتیک کوانتومی در دو دهه گذشته بوده است که به‌خصوص در ارتباط با آشکارسازی علائم ضعیف (نظیر علائمی که از امواج گرانشی عبور کرده از زمین تولید می‌شوند) امروزه نیز ادامه دارد. درواقع انتظار می‌رود این علائم آن‌قدر ضعیف باشند که توسط نوفه خلأ آشکارساز پوشانده شوند. آشکارسازهای امواج گرانشی نسل جاری، نظیر آن‌هایی که به پروژه‌های LIGO و VIRGO وابسته هستند که شامل تداخل سنج‌های بزرگ مقیاس هستند، می‌توانند از حالت‌های غیر کلاسیکی برای افزایش حساسیت اندازه‌گیری‌های فاز استفاده کنند. حالت‌های غیر کلاسیکی موضوع فصل بعدی هستند. اصلاح حساسیت با استفاده از حالت‌های درهم‌تنیده در تداخل سنج‌ها در فصل ۱۱ مورد بحث قرار می‌گیرند.

مسائل

- ۱- نشان دهید معادلات تبدیل تقسیم‌کننده باریکه، یعنی معادلات ۶-۱۰، از معادله ۶-۱۱ به دست می‌آید.
- ۲- عملگر $\hat{U}(\theta) = \exp[i\theta\hat{J}_1]$ را که در آن $\hat{J}_1 \equiv (\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_0)/2$ است، در نظر بگیرید. واضح است که به ازای $\theta = \pi/2$ ، معادلات تبدیل تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰، یعنی معادلات ۶-۱۰ و ۶-۱۱ را به دست می‌آوریم. برای مورد کلی تری که تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ نیست، تبدیلات متناظر با عملگرهای مد را به دست آورید. رابطه θ با پارامترهای r, t, r', t' چیست؟
- ۳- یک تقسیم‌کننده باریکه را در نظر بگیرید که طوری ساخته شده است که عملگر آن توسط تبدیل $\hat{U}(\theta) = \exp[i\theta\hat{J}_2]$ داده می‌شود که در آن $\hat{J}_2 \equiv (\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_0)/2$. تبدیل عملگرهای مد برای این تقسیم‌کننده باریکه را در حالت کلی و برای تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ به دست آورید.
- ۴- با تعریف عملگر $\hat{J}_3 \equiv (\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0 - \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1)/2$ نشان دهید عملگرهای $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ در روابط جابه‌جایی تکانه زاویه‌ای $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k$ صدق می‌کنند که در آن ϵ_{ijk} همان تانسور کاملاً پاد متقارن معمول است. به علاوه، نشان دهید عملگر $\hat{J}_0 \equiv (\hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0 + \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1)/2$ با تمام عملگرهای $\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3$ و با عملگر مربع تکانه زاویه‌ای $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = \hat{J}_0(\hat{J}_0 + 1)$ جابه‌جا می‌شود. در مورد وابسته‌سازی تبدیلات تقسیم‌کننده باریکه و دوران در فضای سه‌بعدی فرضی توضیح دهید.
- ۵- فرض کنید ورودی به تقسیم‌کننده باریکه که توسط عملگر یکانی $\hat{U}(\theta) = \exp[i\theta\hat{J}_1]$ توصیف می‌شود، در حالت $|\text{in}\rangle = |0\rangle_0|N\rangle_1$ باشد. نشان دهید حالت خروجی عبارت است از

$$|\text{out}\rangle = [1 + \tan^2(\theta/2)]^{-N/2} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k}^{1/2} [i \tan(\theta/2)]^k |k\rangle_2 |N-k\rangle_3.$$
- احتمال مشترک $P_{n,m}$ برای یافتن n فوتون در مد ۲ و m فوتون در مد ۳ را به دست آورید و نشان دهید عناصر مخالف صفر، یک توزیع دوجمله‌ای تشکیل می‌دهند. آیا حالت خروجی $|\text{out}\rangle$ یک حالت درهم‌تنیده است؟ اگر چنین است، تغییرات درهم‌تنیدگی نسبت به θ چگونه است؟
- ۶- فرض کنید حالت ورودی به یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ نوع $\hat{J}_1$ به صورت $|\text{in}\rangle = |\alpha\rangle_0|\beta\rangle_1$ باشد. حالت خروجی را پیدا کنید. آیا این حالت درهم‌تنیده است؟
- ۷- حالت ورودی $|\text{in}\rangle = |N\rangle_0|N\rangle_1$ به یک تقسیم‌کننده باریکه نوع $\hat{J}_1$ را در نظر بگیرید. بدون انجام تبدیلات، استدلال کنید که هیچ حالت تعداد فردی از فوتون‌ها در هیچ‌یک از مدهای خروجی وجود نخواهد داشت (راهنمایی - تعداد راه‌هایی را که هریک از مجموعه حالت‌های فرد می‌توانند اتفاق بیفتند، در نظر بگیرید و دامنه‌های آن‌ها را با هم جمع کنید). نشان دهید عملگر تصویری وابسته به مدهای ۲ و ۳ برای حالت ورودی بالا که شامل تعداد $2N$ فوتون است برابر است با $\hat{P}_{2N}^{(2,3)} = \sum_{k=0}^N |2k\rangle_2 |2N-2k\rangle_3$.

۸- نشان دهید برای یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ از نوعی که توسط عملگر $\hat{J}_1$ توصیف می‌شود، حالت ورودی $|N >_1 |N >_0 = |\text{in} >$ به حالت خروجی

$$|\text{out}\rangle = \sum_{k=0}^N \left[\binom{2k}{k} \binom{2N-2k}{N-k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N} \right]^{1/2} |2k\rangle_2 |2N-2k\rangle_3.$$

منجر می‌شود. احتمال مشترک $P_{n,m}$ برای یافتن n فوتون در مد ۲ و m فوتون در مد ۳ را به دست آورید. در

این حالت، عناصر غیرصفر توزیعی را تشکیل می‌دهند که به توزیع arcsine موسوم است [۱۰].

۹- فرض کنید در تقسیم‌کننده باریکه مسئله قبل $|\alpha\rangle_1 + |-\alpha\rangle_1 / \sqrt{2}$ باشد که در آن $|\alpha\rangle$ آن قدر بزرگ فرض می‌شود که $\langle -\alpha | \alpha \rangle \approx 0$ باشد. حالت خروجی را به دست آورید و در مورد درهم‌تنیدگی آن بحث کنید.

۱۰- تداخل سنج ماخ-زندر شکل ۶-۷ را در نظر بگیرید که در آن حالت ورودی در تقسیم‌کننده باریکه اول با حالت مسئله قبل یکسان باشد. مقدار چشمداشتی عملگر اختلاف تعداد $\hat{O} = \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}$ را به دست آورید و عدم قطعیت در اندازه‌گیری اختلاف فاز θ برای این حالت ورودی را بررسی کنید. نتیجه به دست آمده با استفاده از حالت همدوس در یکی از مدهای ورودی را مقایسه کنید.

۱۱- در توصیف اندازه‌گیری بدون برهم‌کنش در بخش ۶-۴ فرض کردیم تقسیم‌کننده‌های باریکه ۵۰:۵۰ باشند. وجود یک شیء در یکی از بازوهای آشکارسازها وقتی مشخص می‌شود که آشکارسازی (آشکارسازی که به علت تداخل علامت نمی‌دهد) که شیء در یکی از بازوهایش نیست، علامت دهد. در یک چهارم آزمایش‌ها علامت خواهد داد. حال به این سؤال پاسخ دهید: آیا می‌توان با استفاده از تقسیم‌کننده باریکه‌هایی که ۵۰:۵۰ نیستند، به‌طور مؤثرتر وجود شیء در یکی از بازوها را آشکار کرد (یعنی در تعداد دورهای آزمایش بیشتر)؟

مراجع

- [1]. Taylor, G. I. (1909). *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 15, 114.
- [2]. Dirac, P. A. M. (1958). *The Principles of Quantum Mechanics*, 4th edition (Oxford: Oxford University Press), p. 9.
- [3]. Grangier, P. Roger, G. and Aspect, A. (1986). *Europhys. Lett.*, 1, 173.
- [4]. See Hamilton, M. W. (2002). *Am. J. Phys.*, 68, 186.
- [5]. Feynman, R. P. Leighton, R. B. and Sands, M. (1965). *The Feynman Lectures on Physics* (Reading: Addison-Wesley, 1965), Vol. III, chapter 3.
- [6]. Hong, C. K. Ou, Z. Y. and L. Mandel, L. (1987). *Phys. Rev. Lett.*, 59, 2044.
- [7]. Elitzur, A. C. and Vaidman, L. (1993). *Found. Phys.*, 23, 987. See also, R. H. Dicke. (1981). *Am. J. Phys.*, 49, 925.
- [8]. Kwiat, P. Weinfurter, H. Herzog, T. and Ziehlenger, A. (1995). *Phys. Rev. Lett.*, 74, 4763.
- [9]. Aharanov, Y. and Bohm, D. (1959). *Phys. Rev.*, 115, 484.
- [10]. See Feller, W. (1968). *An Introduction to the Probability Theory and its Applications*, 3rd edition (New York: Wiley), Vol. I, p. 79.

کتاب‌شناسی

مقالات زیر درباره توصیف کوانتومی تقسیم‌کننده‌های باریکه هستند:

- Zeilinger, A. *Am. J. Phys.*, 49 (1981), 882.
- Prasad, S. Scully, M. O. and Martienssen, W. *Opt. Commun.*, 62 (1987), 139.
- Ou, Z. Y. Hong, C. K. and Mandel, L. *Opt. Commun.*, 63 (1987), 118.
- Ou, Z. Y. and Mandel, L. *Am. J. Phys.*, 57 (1989), 66.

هرچند در متن این فصل مورد بحث قرار ندادیم، اما فرمول‌بندی بسیار مفیدی از توصیف تقسیم‌کننده‌های باریکه

برحسب عملگرهای تکانه زاویه‌ای یا به زبان نظریه گروه، گروه یکانی $SU(2)$ وجود دارد. مقالات زیر این

فرمول‌بندی را مورد بحث قرار می‌دهند:

- Yurke, B. McCall, S. L. and Klauder, J. R. *Phys. Rev. A*, 33 (1986), 4033.
- Campos, R. A. and Saleh, B. A. E. *Phys. Rev. A*, 40 (1989), 1371.
- Leonhardt, U. *Phys. Rev. A*, 48 (1993), 3265

press.um.ac.ir



نور غیر کلاسیک

کلمه «کلاسیک» در علوم تنها به یک معنی است: غلط است [۱]

قبلاً تأکید کردیم که تمام حالت‌های نور کوانتومی و بنابراین غیر کلاسیک هستند و بعضی از جنبه‌های کوانتومی آن را از گسسته بودن فوتون‌ها به دست آوردیم. البته در عمل مشاهده جنبه‌های غیر کلاسیکی نور مشکل است (در اینجا اغلب «کوانتومی بودن» و «غیر کلاسیکی بودن» را به یک معنی در نظر خواهیم گرفت). قبلاً بحث کردیم که یقیناً غیر کلاسیکی ترین حالت‌های غیر کلاسیکی نور، حالت تک فوتونی است. ولی همان‌طوری که خواهیم دید، می‌توان حالت‌های غیر کلاسیکی‌ای داشت که شامل تعداد زیادی فوتون باشد. اما لازم است ملاکی برای غیر کلاسیکی بودن داشته باشیم. یادآور می‌شویم که در فصل ۵ یک چنین ملاکی بر حسب توزیع شبه احتمالی موسوم به تابع P ، $P(\alpha)$ را مورد بحث قرار دادیم. حالت‌هایی که برای آن‌ها $P(\alpha)$ در همه جا مثبت باشد یا بیشتر از تابع دلتا تکینه نباشد، حالت‌های کلاسیکی هستند، در حالی که حالت‌هایی که برای آن‌ها $P(\alpha)$ منفی یا تکینه‌تر از تابع دلتا باشد، غیر کلاسیکی‌اند. در واقع، نشان دادیم که $P(\alpha)$ برای یک حالت همدوس یک تابع دلتاست و هیلری [۲] نشان داده است که تمام حالت‌های خالص دیگر میدان، دارای توابع $P(\alpha)$ ای هستند که در بعضی از نواحی فضای فاز منفی و از تابع دلتا تکینه‌ترند. بدیهی است که تعداد انواع حالت‌های غیر کلاسیکی ممکن بسیار زیاد است.

در این فصل بعضی از مهم‌ترین نمونه‌های حالت‌های غیر کلاسیکی را مورد بحث قرار خواهیم داد. ابتدا با حالت‌های فشرده شروع می‌کنیم، یعنی حالت‌های فشرده تریع^۲ و حالت‌های فشرده تعداد (حالت‌های اخیر حالت‌های با آمار زیرپواسون^۳ نامیده می‌شود). سپس بار دیگر به ماهیت غیر کلاسیکی پادگروهی^۴ فوتون، حالت‌های گریه شرو دینگر، حالت‌های هم‌بسته باریکه‌های دو گانه، فشردگی مرتبه بالاتر و بالاخره نور فشرده با باند پهن می‌پردازیم.

1. Hillery
2. Quadrature

3. Sub-Poisson
4. antibunching

۱-۷ فشردگی تربیع

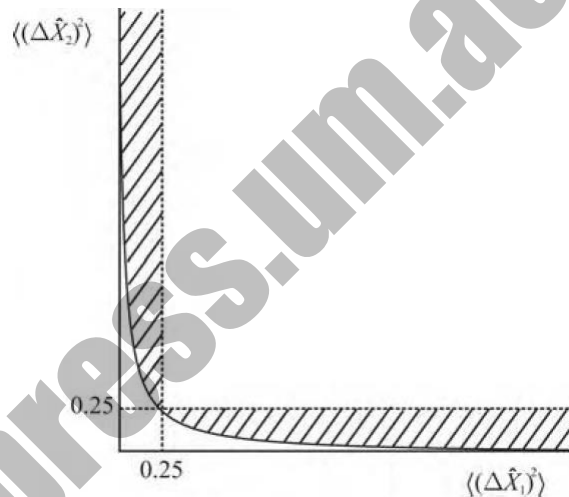
برای دو عملگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ که در رابطه جابه‌جایی $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ صدق می‌کنند

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{C} \rangle|^2 \quad (۱-۷)$$

یک حالت سیستم را فشرده گوئیم اگر یکی از دو رابطه زیر برقرار باشد:

$$\langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle < \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle| \quad \text{یا} \quad \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle < \frac{1}{2} |\langle \hat{C} \rangle| \quad (۲-۷)$$

(با توجه به معادله ۱-۷، هر دو واریانس نمی‌توانند به‌طور هم‌زمان کمتر از $|\langle \hat{C} \rangle|/2$ باشند). حالت‌های فشرده‌ای که برای آن‌ها داشته باشیم $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$ و رابطه ۱-۷ به‌صورت تساوی برقرار باشد، حالت‌های فشرده ایدئال نامیده می‌شوند. این حالت‌ها نمونه‌ای از حالت‌های «هوشمند»^۱ هستند که در فصل ۳ درباره آن‌ها صحبت کردیم.



شکل ۱-۷ یک نمودار نوعی فشردگی تربیع؛ فشردگی برای ناحیه هاشورزده وجود دارد. خط پر یک هذلولی است که از رابطه عدم قطعیت $\langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle = 1/16$ به‌دست می‌آید.

درمورد فشردگی تربیع^۲، $\hat{A} = \hat{X}_1$ و $\hat{B} = \hat{X}_2$ قرار می‌دهیم که در آن‌ها $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ عملگرهای تربیع در معادلات ۵۲-۲ و ۵۳-۲ هستند که در ۵۵-۲ صدق می‌کنند و بنابراین $\hat{C} = 1/2$. از معادله ۵۶-۲ نتیجه می‌شود که هرگاه داشته باشیم [۳]:

$$\langle (\Delta\hat{X}_1)^2 \rangle < \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad \langle (\Delta\hat{X}_2)^2 \rangle < \frac{1}{4} \quad (۳-۷)$$

1. intelligent

2. Quadrature squeezing

فشردگی تربیع وجود دارد. قبلاً نشان دادیم که برای یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ تساوی در ۲-۵۶ برقرار است و واریانس‌های دو تربیع برابرند: $\langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle = \langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle = \frac{1}{4}$. علاوه بر این، نتیجه برای یک حالت همدوس دقیقاً با نتیجه برای حالت خلأ یکسان است (معادله ۲-۵۹ را ببینید). حالت‌هایی که برای آن‌ها یکی از شرایط ۷-۳ برقرار باشد، نسبت به یک حالت همدوس یا حالت خلأ در یکی از تربیع‌ها، «نوفه» کمتری خواهد داشت؛ افت‌وخیزها در تربیع فشرده می‌شوند. البته افت‌وخیزها در تربیع دیگر باید آن را جبران کنند تا رابطه عدم قطعیت نقض نشود. حالت‌های فشرده‌ای وجود دارند که برای آن‌ها رابطه عدم قطعیت به تساوی تبدیل می‌شود، ولی لزوماً در حالت کلی چنین نیست. شکل ۷-۱ را برای نمایش دامنه فشردگی ببینید.

قبل از ارائه مثال‌های مشخصی از حالت‌های فشرده، نشان می‌دهیم چرا حالت‌های فشرده را باید به‌عنوان یک اثر غیر کلاسیک در نظر گرفت. برای این منظور، مقادیر چشمداشتی مربوط را برحسب تابع P بیان می‌کنیم. با استفاده از معادله ۳-۱۰۸ به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle = \frac{1}{4}\left\{1 + \int P(\alpha) \left[((\alpha + \alpha^*) - (\langle\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\rangle))^2 \right] d^2\alpha \right\} \quad (4-7)$$

$$\langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle = \frac{1}{4}\left\{1 + \int P(\alpha) [((\alpha - \alpha^*)/i - (\langle\hat{a}\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\rangle)/i)]^2 d^2\alpha \right\} \quad (5-7)$$

$$\langle\hat{a}^\dagger\rangle = \int P(\alpha) \alpha^* d^2\alpha \quad \langle\hat{a}\rangle = \int P(\alpha) \alpha d^2\alpha \quad (6-7)$$

چون جمله داخل آکولادها همواره مثبت است، بدیهی است که شرط $\langle(\Delta\hat{X}_{1,2})^2\rangle < \frac{1}{4}$ ایجاب می‌کند $P(\alpha)$ حداقل در بعضی از نواحی فضای فاز، نامثبت باشد. گاهی بهتر است یک عملگر تربیع عام را به‌صورت زیر معرفی کنیم:

$$\hat{X}(\vartheta) = \frac{1}{2}(\hat{a}e^{-i\vartheta} + \hat{a}^\dagger e^{i\vartheta}) \quad (7-7)$$

که در آن $\hat{X}(\frac{\pi}{2}) = \hat{X}_2$ و $\hat{X}(0) = \hat{X}_1$ برای مشخص کردن فشردگی، پارامتر

$$s(\vartheta) = \frac{\langle(\Delta\hat{X}(\vartheta))^2\rangle - 1/4}{1/4} = 4\langle(\Delta\hat{X}(\vartheta))^2\rangle - 1 \quad (8-7)$$

را معرفی می‌کنیم. به‌ازای مقادیری از ϑ که برای آن $0 < s(\vartheta) \leq 1$ باشد، فشردگی وجود دارد. همچنین می‌توان واریانس مرتب‌شده نرمال^۱ $\langle(\Delta\hat{X}(\vartheta))^2\rangle$ را وارد کرد، به‌طوری‌که هرگاه $0 < \langle(\Delta\hat{X}(\vartheta))^2\rangle \leq \frac{1}{4}$ برقرار باشد، فشردگی وجود دارد. برحسب واریانس مرتب‌شده نرمال داریم:

1. Normal ordered

$$s(\vartheta) = 4(\Delta\hat{X}(\vartheta))^2 \quad (9-7)$$

اما حالت‌های فشرده چگونه تولید می‌شوند؟ یک راه ریاضیاتی برای تولید حالت فشرده که به فرایند فیزیکی که در زیر بحث خواهیم کرد مربوط می‌شود، این است که از طریق «عملگر فشرده‌گی» که به صورت زیر تعریف می‌شود، آن را تولید کنیم:

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})\right] \quad (10-7)$$

که در آن $\xi = re^{i\theta}$ و پارامتر فشرده‌گی نامیده می‌شود و $0 \leq r < \infty$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است. این عملگر $\hat{S}(\xi)$ یک نوع تعمیم دوفوتونی عملگر جابه‌جایی است که همان‌طور که در فصل ۳ دیدیم، برای تعریف حالت‌های همدوس میدان تک‌فوتونی به کار رفت. بدیهی است که عملگر $\hat{S}(\xi)$ وقتی روی خلأ عمل کند، نوعی حالت همدوس دوفوتونی ایجاد خواهد کرد؛ زیرا با توجه به فرمول بالا فوتون‌ها می‌توانند به صورت زوج توسط این عملگر خلق یا نابود شوند. برای اینکه ببینیم در نتیجه اثر این عملگر چه اتفاقی می‌افتد، حالت

$$|\psi_s\rangle = \hat{S}(\xi)|\psi\rangle \quad (11-7)$$

را در نظر بگیرید که در آن $|\psi\rangle$ یک حالت دلخواه و $|\psi_s\rangle$ حالتی است که بر اثر عملگر $\hat{S}(\xi)$ روی $|\psi\rangle$ تولید می‌شود. برای محاسبه واریانس‌های $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ مقدار چشمداشتی عملگرهای $\hat{a}$ ، $\hat{a}^2$ و غیره لازم است. برای این منظور، از روابط زیر که از لم بکر-هاسدورف^۱ به دست می‌آیند، استفاده می‌کنیم:

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta}\sinh r \quad (12-7)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger\cosh r - \hat{a}e^{i\theta}\sinh r$$

که در آن $\hat{S}^\dagger(-\xi) = \hat{S}(\xi)$ بنابراین داریم:

$$\langle\psi_s|\hat{a}|\psi_s\rangle = \langle\psi|\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)|\psi\rangle \quad (13-7)$$

و

$$\langle\psi_s|\hat{a}^2|\psi_s\rangle = \langle\psi|\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi)|\psi\rangle \quad (14-7)$$

و به همین ترتیب برای مورد خاصی که $|\psi\rangle$ حالت خلأ، $|0\rangle$ باشد، $|\psi_s\rangle$ حالت خلأ فشرده خواهد بود که آن را با $|\xi\rangle$ نشان می‌دهیم:

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle. \quad (15-7)$$

با استفاده از ۱۲-۷ تا ۱۵-۷ برای حالت فشرده خلأ به دست می‌آوریم:

1. Baker-Hausdorf

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sinh r \cosh r \cos \theta] \quad (16-7)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \sinh r \cosh r \cos \theta] \quad (17-7)$$

به ازای $\theta = 0$ روابط بالا به صورت زیر درمی آیند:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (18-7)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r}$$

که به وضوح نشان می دهند فشردگی در تریع $\hat{X}_1$ وجود دارد. به ازای $\theta = \pi$ فشردگی در تریع $\hat{X}_2$ ظاهر خواهد شد. توجه کنید که حاصل ضرب عدم قطعیت ها برابر $1/16$ است و از این رو، برای $\theta = 0$ یا $\pi/2$ حالت های فشردۀ خلأ رابطه عدم قطعیت ۲-۵۶ را به تساوی تبدیل می کنند. لازم نیست حالت های فشردۀ، رابطه عدم قطعیت را به تساوی تبدیل کنند (و معمولاً به تساوی تبدیل نمی کنند).

یک راه ساده برای نمایش تصویری فشردگی وجود دارد. یادآور می شویم که در شکل های ۱-۳ و ۲-۳ نمایش های فضای فاز نوفه وابسته به حالت همدوس (۱-۳) و حالت خلأ (۲-۳) را نشان دادیم که در هر دو مورد افت وخیزهای عملگر تریع برابر بودند، $\Delta \hat{X}_1 = \Delta \hat{X}_2 = 1/2$ نمایش حالت خلأ فشردۀ به ازای $\theta = 0$ که در آن افت وخیزهای $\hat{X}_1$ کاهش یافته، در شکل ۲-۷ داده شده است. برای $\theta = \pi$ شکل ۳-۷ را ببینید. برای موارد $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ فشردگی در امتداد $\hat{X}_1$ یا $\hat{X}_2$ است. برای سایر مقادیر θ عملگرهای تریع دَوَران یافته $\hat{P}_1$ و $\hat{P}_2$ را به صورت

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & \sin \theta/2 \\ -\sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{pmatrix} \quad (19-7)$$

تعریف می کنیم که می توان آن را به صورت

$$\hat{P}_1 + i\hat{P}_2 = (\hat{X}_1 + i\hat{X}_2)e^{-i\theta/2} \quad (20-7)$$

نیز نوشت. برای حالت خلأ فشردۀ معادله ۷-۱۲ می توان نشان داد:

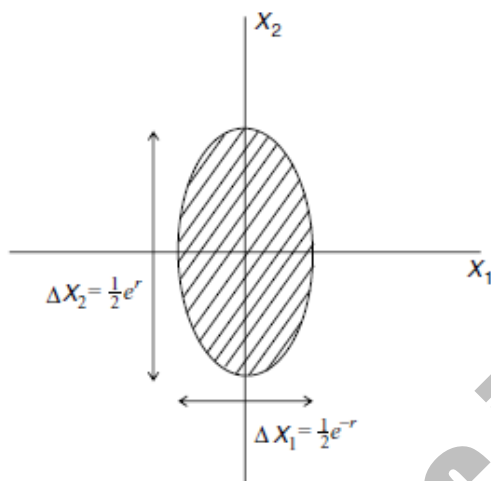
$$\langle (\Delta \hat{P}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (21-7)$$

$$\langle (\Delta \hat{P}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r}$$

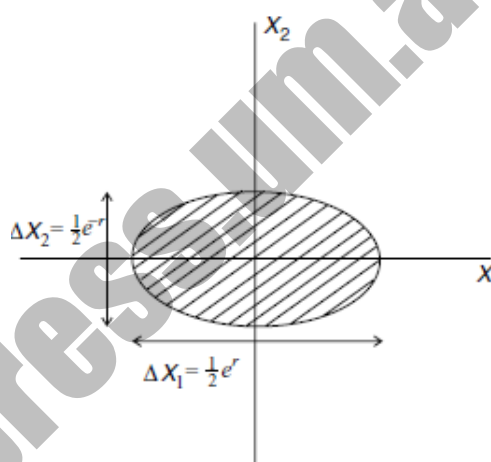
که در شکل ۴-۷ نشان داده شده است. نکته مهم در اینجا این است که لازم نیست فشردگی در امتداد $\hat{X}_1$ یا $\hat{X}_2$ باشد.

یک حالت فشردۀ کلی تر را می توان با اعمال عملگر جابه جایی به ۷-۱۲ به دست آورد.

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle \quad (22-7)$$



شکل ۷-۲ بیضی خطا برای یک حالت خلأ فشرده که در آن فشردگی در راستای تربیع $\hat{X}_1$ است.



شکل ۷-۳ بیضی خطا برای یک حالت خلأ فشرده که در آن فشردگی در راستای تربیع $\hat{X}_2$ است.

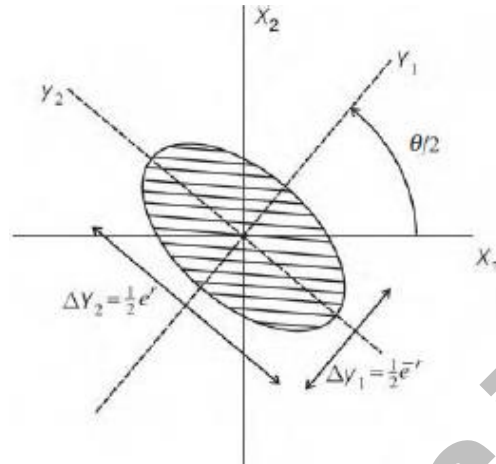
واضح است که به ازای $\xi = 0$ یک حالت همدوس به دست می آوریم. چون عملگر جابه جایی تبدیل

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (23-7)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$$

را ایجاد می کند، اثر حاصل ضرب عملگرهای جابه جایی و فشردگی روی $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ را می توان از معادلات ۱۲-۷ و ۲۳-۷ به دست آورد. مراحل محاسبه را به عنوان تمرین واگذار می کنیم. نتیجه به صورت زیر درمی آید:

$$\langle \hat{a} \rangle = \alpha \quad (24-7)$$



شکل ۷-۴ بیضی خطای دَوَران یافته برای خلأ فشرده؛ فشردگی در راستای $\theta/2$ است.

که مستقل از پارامتر فشردگی r است و داریم:

$$\langle \hat{a}^2 \rangle = \alpha^2 - e^{i\theta} \sinh r \cosh r \quad (25-7)$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \quad (26-7)$$

البته کمیت‌های متناظر برای حالت‌های همدوس به‌ازای $r \rightarrow 0$ و کمیت‌های مربوط به خلأ فشرده در حد $\alpha \rightarrow 0$ به‌دست می‌آیند. به‌علاوه

$$\langle \hat{P}_1 + i\hat{P}_2 \rangle = \alpha e^{-i\theta/2} \quad (27-7)$$

و نتیجه می‌شود که

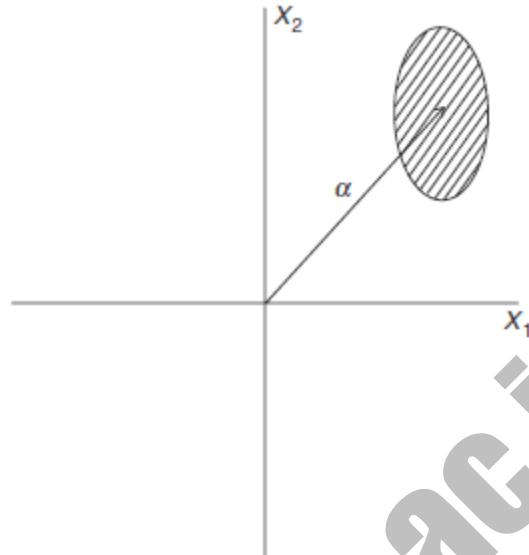
$$\langle (\Delta \hat{P}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (28-7)$$

$$\langle (\Delta \hat{P}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r}$$

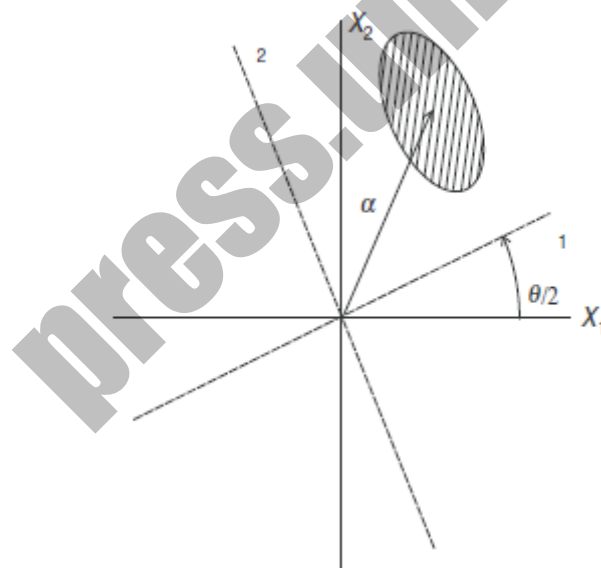
برای مورد $\theta = 0$ ، حالت فشرده در فضای فاز در شکل ۷-۵ نشان داده شده است که در آن «بیضی خطا» اساساً همان بیضی خطای خلأ فشرده است که به‌اندازه α جابه‌جا شده است. البته مطابق شکل ۷-۶، حالت کلی‌تر θ با بیضی خطای جابه‌جا شده و دَوَران یافته یکسان است.

قبل از ادامه این مطلب به میدان الکتریکی یک حالت فشرده می‌پردازیم. عملگر میدان الکتریکی میدان تک‌مدی ۲-۱۵ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{E}(\chi) = \varepsilon_0 \sin(kz) (\hat{a} e^{-i\chi} + \hat{a}^\dagger e^{i\chi}) \quad (29-7)$$



شکل ۵-۷ بیضی خطای حالت خلأ فشرده جابه‌جاشده که در آن فشردگی در امتداد تربیع $\hat{X}_1$ انجام شده است.



شکل ۶-۷ بیضی خطای دوران‌یافته یک حالت خلأ فشرده جابه‌جاشده

که در آن عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ عملگرها در $t = 0$ هستند و $\chi = \omega t$ فاز میدان است. بنابراین $\hat{E}(\chi)$ میدان الکتریکی وابسته به فاز است. معادله ۷-۲۹ را می‌توان برحسب عملگرهای تربیع به صورت زیر نوشت:

$$\hat{E}(\chi) = 2\varepsilon_0 \sin(kz) [\hat{X}_1 \cos(\chi) + \hat{X}_2 \sin(\chi)] \quad (۷-۳۰)$$

از رابطه جابه‌جایی $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$ داریم:

$$[\hat{E}(0), \hat{E}(\chi)] = i\varepsilon_0^2 \sin^2(kz) \sin \chi \quad (۳۱-۷)$$

و بنابراین عملگرهای میدان الکتریکی در فازهای مختلف (زمان‌های مختلف) با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند. از معادله ۷-۲۸ نتیجه می‌شود:

$$\langle (\Delta \hat{E}(0))^2 \rangle \langle (\Delta \hat{E}(\chi))^2 \rangle \geq \frac{1}{4} [\varepsilon_0^2 \sin^2(kz) \sin \chi] \quad (۳۲-۷)$$

برای بسیاری از حالت‌های میدان (به‌عنوان مثال، حالت‌های همدوس و حالت‌های گرمایی) عدم قطعیت میدان مستقل از فاز χ است. ولی اگر عدم قطعیت در میدان به‌ازای $\chi = 0$ طوری باشد که داشته باشیم

$$\Delta E(0) < \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_0 |\sin(kz) \sin \chi| \quad (۳۳-۷)$$

در این صورت، در یک فاز دیگر χ باید داشته باشیم:

$$\Delta E(\chi) > \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_0 |\sin(kz) \sin \chi| \quad (۳۴-۷)$$

از این نظر نور فشرده شامل نوفه‌های وابسته به فاز است که برای بعضی از فازها پایین‌تر از نوفه خلأ و برای بعضی دیگر بالاتر است. فشردگی تربیع از آنجا که نسبت به فاز حساس است، به طبیعت موج‌مانندی نور مربوط می‌شود. در شکل ۷-۷ با استفاده از نمودارهای فازور، توزیع نوفه در میدان الکتریکی برای حالت‌های فشرده نشان داده شده است. مورد حالت همدوس در شکل ۳-۸ نشان داده شده است.

این واقعیت که بخشی از یک موج نوری در یک حالت فشرده از یک میدان در حالت خلأ نوفه کمتری دارد، دارای کاربردهای تکنولوژیکی است، به‌خصوص در آشکارسازی علائم ضعیف. یک نمونه مهم عبارت است از آشکارسازی امواج گرانشی با تداخل‌سنج‌های بزرگ‌مقیاس [۴]، نظیر پروژه‌های لیگو^۱ [۵] و ویرگو^۲ [۶]. یک کاربرد ممکن دیگر در حوزه ارتباطات نوری و پردازش اطلاعات کوانتومی است [۷]. در اینجا به این کاربردها نخواهیم پرداخت.

برای اینکه درک بهتری از حالت‌های فشرده داشته باشیم و در نهایت رابطه آن‌ها را با حالت‌های تعداد فوتون پیدا کنیم، ابتدا با حالت خلأ $|0\rangle$ که در رابطه زیر صدق می‌کند، شروع می‌کنیم.

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (۳۵-۷)$$

با ضرب طرفین از سمت چپ در $\hat{S}(\xi)$ و استفاده از این واقعیت که این عملگر یکانی است، داریم:

$$\hat{S}(\xi) \hat{a} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{S}(\xi) |0\rangle = 0 \quad (۳۶-۷)$$

یا

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)|\xi\rangle = 0 \quad (37-7)$$

چون

$$\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{a}\cosh r + e^{i\theta}\hat{a}^\dagger\sinh r \quad (38-7)$$

می‌توان معادله ۳۷-۷ را به صورت زیر نوشت:

$$(\hat{a}\mu + \hat{a}^\dagger\nu)|\xi\rangle = 0 \quad (39-7)$$

که در آن $\mu = \cosh r$ و $\nu = e^{i\theta}\sinh r$. بنابراین حالت خلأ فشرده یک ویژه حالت عملگر $\hat{a}\mu + \hat{a}^\dagger\nu$ با ویژه مقدار صفر است. برای حالت کلی تر ۲۲-۷ می‌توان نوشت:

$$\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle = 0 \quad (40-7)$$

که با استفاده از

$$\hat{D}(\alpha)\hat{a}\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{a} - \alpha \quad (41-7)$$

و ۳۸-۷ می‌توان آن را به صورت یک معادله ویژه مقداری نوشت:

$$(\hat{a}\mu + \hat{a}^\dagger\nu)|\alpha, \xi\rangle = \gamma|\alpha, \xi\rangle \quad (42-7)$$

که در آن

$$\gamma = \alpha\cosh r + \alpha^*e^{i\theta}\sinh r \quad (43-7)$$

واضح است که به ازای $r = 0$ این رابطه، معادله ویژه مقداری برای حالت هم‌دوس معمولی و به ازای $\alpha = 0$ معادله ویژه مقداری برای حالت خلأ فشرده است. حال با نوشتن

$$\hat{a} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2 = (\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2)e^{i\theta/2} \quad (44-7)$$

و قرار دادن در معادله ۳۹-۷ به دست می‌آوریم:

$$(\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2e^{-2r})|\alpha, \xi\rangle = \beta|\alpha, \xi\rangle \quad (45-7)$$

که در آن

$$\beta = \alpha e^{-r}e^{-i\theta/2} = \langle\hat{Y}_1\rangle + i\langle\hat{Y}_2\rangle e^{-2r} \quad (46-7)$$

معادله ۴۵-۷ دقیقاً شکل یک معادله ویژه مقداری برای ویژه حالتی است که حاصل ضرب عدم قطعیت برای

عملگرهای $\hat{Y}_1$ و $\hat{Y}_2$ با رابطه جابه‌جایی $[\hat{Y}_1, \hat{Y}_2] = i/2$ را به تساوی تبدیل می‌کند.

$$\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{Y}_2)^2 \rangle = \frac{1}{16} \quad (47-7)$$

با مقایسه ۴۵-۷ و ۱۹-۳ و قرار دادن $\hat{A} = \hat{Y}_1$ ، $\hat{B} = \hat{Y}_2$ و $\hat{C} = 1/2$ نتیجه می‌گیریم:

$$\langle (\Delta \hat{Y}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} \quad (48-7)$$

و سپس از ۴۳-۷ داریم:

$$\langle (\Delta \hat{Y}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \quad (49-7)$$

بنابراین حالت $|\alpha, \xi\rangle$ یک حالت «هوشمند»^۱ نسبت به عملگرهای تربیع دوران یافته $\hat{Y}_1$ و $\hat{Y}_2$ است.

معادله ۳۹-۷ برحسب عملگرهای تربیع اولیه $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$(\hat{X}_1 + i\lambda \hat{X}_2)|\alpha, \xi\rangle = \gamma|\alpha, \xi\rangle \quad (50-7)$$

که در آن

$$\gamma = \frac{\alpha}{\mu + \nu} \text{ و } \lambda = \left(\frac{\mu - \nu}{\mu + \nu} \right) \quad (51-7)$$

به ازای $\theta = 0$ ، معادله ۴۶-۷ به صورت

$$(\hat{X}_1 + i\hat{X}_2 e^{-2r})|\alpha, \xi\rangle = \alpha e^{-r}|\alpha, \xi\rangle \quad (52-7)$$

درمی‌آید و نتایج ۱۵-۷ را به دست می‌آوریم. اما وقتی $\theta \neq 0$ باشد، چه اتفاق می‌افتد؟ برای فهم چنین وضعیتی به رابطه جابه‌جایی $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ برمی‌گردیم و خاطرنشان می‌کنیم که کلی‌ترین شکل رابطه عدم قطعیت، نه به صورت ۱-۷، بلکه به صورت زیر است:

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} [\langle \hat{F} \rangle^2 + \langle \hat{C} \rangle^2] \quad (53-7)$$

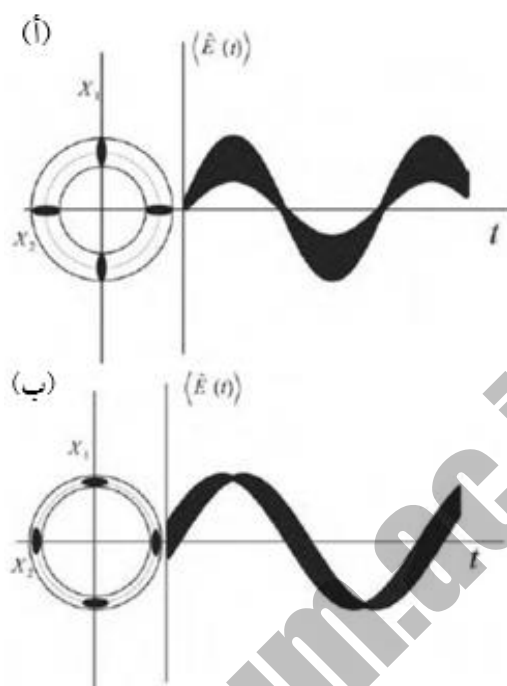
که در آن

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle \quad (54-7)$$

کواریانس است که میزان هم‌بستگی‌های مشاهده‌پذیرهای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را مشخص می‌کند. تساوی در ۵۳-۷ برای حالت $|\psi\rangle$ که در رابطه زیر صدق می‌کند، برقرار است:

$$\langle \hat{A} + i\lambda \hat{B} \rangle |\psi\rangle = (\langle \hat{A} \rangle + i\lambda \langle \hat{B} \rangle) |\psi\rangle \quad (55-7)$$

1. intelligent



شکل ۷-۷ نمودار فازور^۱ که توزیع نوفه برای میدان الکتریکی را برای یک حالت فشرده نشان می‌دهد که ابتدا (ا) در راستای تربیع X_1 و (ب) در راستای X_2 فشرده بوده است.

که در آن λ می‌تواند یک عدد مختلط باشد. از معادله ۷-۵۱ به‌سادگی می‌توان نشان داد:

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle - \lambda^2 \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle = i\lambda \langle \hat{F} \rangle \quad (56-7)$$

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle + \lambda^2 \langle (\Delta \hat{B})^2 \rangle = \lambda \langle \hat{C} \rangle. \quad (57-7)$$

اگر λ حقیقی باشد، در این صورت با توجه به معادله ۷-۵۶ باید داشته باشیم $\langle \hat{F} \rangle = 0$ و بنابراین هیچ هم‌بستگی بین $\hat{A}$ و $\hat{B}$ وجود ندارد. اگر λ یک عدد موهومی محض باشد، با توجه به معادله ۷-۵۷ باید داشته باشیم $\langle \hat{C} \rangle = 0$ اما به‌ازای $\hat{A} = \hat{X}_1$, $\hat{B} = \hat{X}_2$ این امکان وجود ندارد که

$\lambda = (\mu - \nu)/(\mu + \nu)$ موهومی محض باشد. وقتی λ حقیقی باشد، $\theta = 0$ داریم:

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \hat{X}_1 \hat{X}_2 + \hat{X}_2 \hat{X}_1 \rangle - 2\langle \hat{X}_1 \rangle \langle \hat{X}_2 \rangle = 0 \quad (58-7)$$

و هیچ هم‌بستگی بین $\hat{X}_2$ و $\hat{X}_1$ وجود ندارد. اما به‌ازای $\theta \neq 0$ یا $\theta \neq 2\pi$ ، λ مختلط است و به‌سادگی می‌توان نشان داد که در این صورت $\langle \hat{F} \rangle \neq 0$. بنابراین یک حالت فشرده کلی به‌شکل $\langle \hat{F} \rangle \neq 0$ را

1. Phasor

می‌توان با وجود هم‌بستگی بین مشاهدده‌پذیرهای $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ مشخص کرد. در حد $(r \rightarrow 0)$ $\xi \rightarrow 0$ حالت همدوس $|\alpha\rangle$ به دست می‌آید که برای آن هیچ هم‌بستگی بین $\hat{X}_1$ و $\hat{X}_2$ وجود ندارد. بعداً به سایر حالت‌های غیر کلاسیکی که بین تربیع‌ها هم‌بستگی نشان دهند، برخورد خواهیم کرد. تأکید می‌کنیم که حالت فشرده $|\alpha, \xi\rangle$ صریحاً به گونه‌ای ساخته شد که خاصیت فشرده‌گی داشته باشد، اما حالت‌های خالص زیادی از میدان وجود دارند که می‌توانند حداقل برای محدوده‌ای از پارامترهای موردنظر نیز فشرده‌گی از خود نشان دهند. حال برای اینکه آمار فوتونی را بررسی کنیم، حالت‌های فشرده را به حالت‌های عدد فوتون^۱ تجزیه می‌کنیم. ابتدا حالت خلأ فشرده را در نظر می‌گیریم. می‌نویسیم:

$$|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (59-7)$$

که با قرار دادن در ۷-۳۹ معادله بازگشتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$C_{n+1} = -\frac{\nu}{\mu} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/2} C_{n-1} \quad (60-7)$$

توجه کنید که این رابطه تنها حالت‌های فوتونی یک‌درمیان را به هم مرتبط می‌کند. درواقع، دو جواب متمایز وجود دارد: یکی که شامل حالت‌های فوتونی زوج و دیگری شامل حالت‌های فوتونی فرد است. بدیهی است که تنها جواب زوج شامل خلأست و بنابراین تنها این مورد را در نظر می‌گیریم. جواب رابطه بازگشتی عبارت است از

$$C_{2m} = (-1)^m (e^{i\theta} \tanh r)^m \left[\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right]^{1/2} C_0 \quad (61-7)$$

که در آن C_0 از شرط بهنجارش

$$\sum_{m=0}^{\infty} |C_{2m}|^2 = 1 \quad (62-7)$$

یا

$$|C_0|^2 \left(1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\tanh r]^{2m} (2m-1)!!}{(2m)!!} \right) = 1 \quad (63-7)$$

به دست می‌آید. خوشبختانه اتحاد ریاضی زیر وجود دارد:

$$1 + \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \right) = (1-z)^{-1/2} \quad (64-7)$$

1. Photon number

که از آن به سادگی می‌توان $C_0 = \sqrt{\cosh r}$ را به دست آورد. بالاخره با استفاده از اتحادهای

$$(2m)!! = 2^m m! \quad (۶۵-۷)$$

$$(2m-1)!! = \frac{1}{2^m} \frac{(2m)!}{m!} \quad (۶۶-۷)$$

می‌توان ضرائب بسط برای حالت خلأ فشرده را به دست آورد:

$$C_{2m} = (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!} (e^{i\theta} \tanh r)^m}{2^m m! \sqrt{\cosh r}} \quad (۶۷-۷)$$

بنابراین حالت فشرده خلأ عبارت است از

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} e^{im\theta} (\tanh r)^m |2m\rangle \quad (۶۸-۷)$$

احتمال یافتن $2m$ فوتون در میدان برابر است با

$$P_{2m} = |\langle 2m | \xi \rangle|^2 = \frac{(2m)!}{2^{2m} (m!)^2} \frac{(\tanh r)^{2m}}{\cosh r} \quad (۶۹-۷)$$

و احتمال یافتن حالت‌های $2m+1$ فوتونی برابر است با از

$$P_{2m+1} = |\langle 2m+1 | \xi \rangle|^2 = 0 \quad (۷۰-۷)$$

بنابراین توزیع احتمال فوتونی برای یک حالت فشرده خلأ نوسانی است و برای تمام عددهای فوتونی فرد صفر می‌شود. یک توزیع نوعی برای خلأ فشرده در شکل ۷-۸ نشان داده شده است.

توجه کنید که به جز ماهیت نوسانی توزیع، شکل آن شبیه شکل تابش گرمایی است. باید به خاطر داشت که خلأ فشرده یک حالت خالص است، درحالی که حالت گرمایی یک حالت مخلوط است.

حال به دنبال جواب‌های معادله ۷-۴۲ برای مورد کلی تر به ازای $\alpha \neq 0$ هستیم. با توجه به آنچه در مورد $\alpha = 0$ دیدیم، یک جواب به شکل معادله ۷-۵۹ برای آن حدس می‌زنیم.

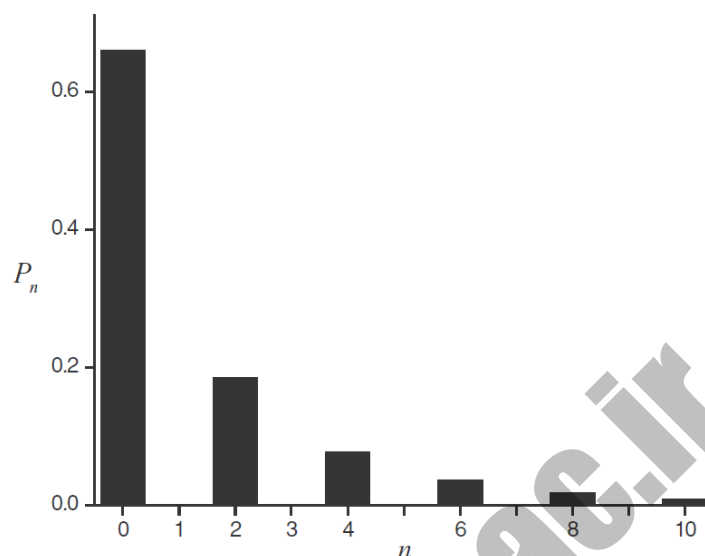
$$C_n = \mathcal{N} (\cosh r)^{-1/2} \left[\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right]^{n/2} f_n(x) \quad (۷۱-۷)$$

که در آن تابع $f_n(x)$ را باید پیدا کنیم و $\mathcal{N}$ ضریب بهنجارش است. رابطه بازگشتی برای $f_n(x)$ عبارت است از

$$(n+1)^{1/2} f_{n+1}(x) - 2\gamma \left(e^{i\theta} \sinh(2r) \right)^{-1/2} f_n(x) + 2n^{1/2} f_{n-1}(x) = 0 \quad (۷۲-۷)$$

که در آن γ توسط ۷-۴۳ داده می‌شود. این رابطه با رابطه بازگشتی برای چندجمله‌ای‌های هرمیت $H_n(x)$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0 \quad (۷۳-۷)$$



شکل ۷-۸ هیستوگرام برای توزیع عدد فوتونی برای حالت خلأ فشرده

یکسان است که در آن

$$f_n(x) = H_n(x)/\sqrt{n!} \quad \text{و} \quad x = \gamma(e^{i\theta} \sinh(2r))^{-1/2} \quad (7-74)$$

بنابراین داریم:

$$C_n = \mathcal{N} [n! \cosh r]^{-1/2} \left[\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right]^{n/2} H_n \left[\gamma (e^{i\theta} \sinh(2r))^{-1/2} \right] \quad (7-75)$$

برای یافتن $\mathcal{N}$ در معادله ۷-۷۵ قرار می‌دهیم $n = 0$ و داریم:

$$C_0 = \mathcal{N} (\cosh r)^{-1/2} \quad (7-76)$$

با توجه به

$$\begin{aligned} C_0 &= \langle 0 | \alpha, \xi \rangle = \langle 0 | \hat{D}(\alpha) \hat{S}(\xi) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{D}^\dagger(-\alpha) \hat{S}(\xi) | 0 \rangle \\ &= \langle -\alpha | \xi \rangle \end{aligned} \quad (7-77)$$

که در آن سطر آخر ضرب داخلی حالت همدوس $|\alpha\rangle$ و حالت خلأ فشرده $|\xi\rangle$ است. این حاصل ضرب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\langle -\alpha | \xi \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} |\alpha|^2\right) \times \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha^*)^{2m} [(2m)!]^{-1/2} C_{2m} \quad (7-78)$$

که در آن C_{2m} توسط ۷-۶۷ داده می‌شود. بنابراین از معادلات ۷-۷۷ و ۷-۷۸ و استفاده از ۷-۶۷ به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{N} = (\cosh r)^{1/2} \langle -\alpha | \xi \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} \alpha^{*2} e^{i\theta} \tanh r \right] \quad (7-79)$$

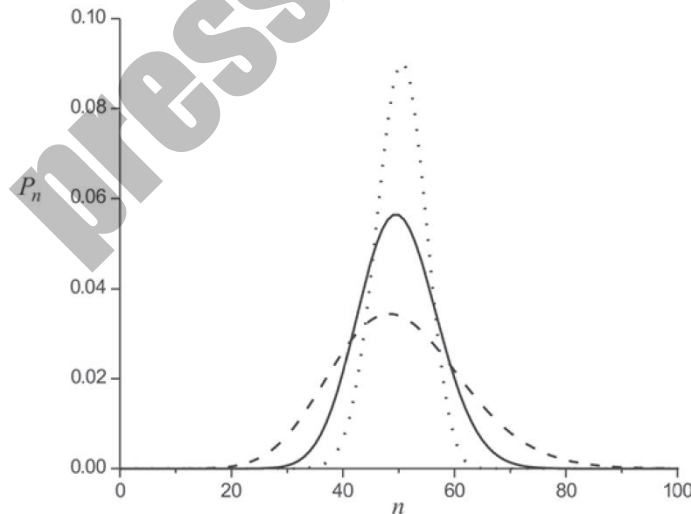
بدین ترتیب، حالت فشرده $|\alpha, \xi\rangle$ به صورت زیر بر حسب حالت‌های عددی تجزیه می‌شود:

$$|\alpha, \xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} \exp \left[-\frac{1}{2} |\alpha|^2 - \frac{1}{2} \alpha^{*2} e^{i\theta} \tanh r \right] \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2} e^{i\theta} \tanh r \right]^{n/2}}{\sqrt{n!}} H_n \left[\gamma \left(e^{i\theta} \sinh(2r) \right)^{-1/2} \right] |n\rangle \quad (7-80)$$

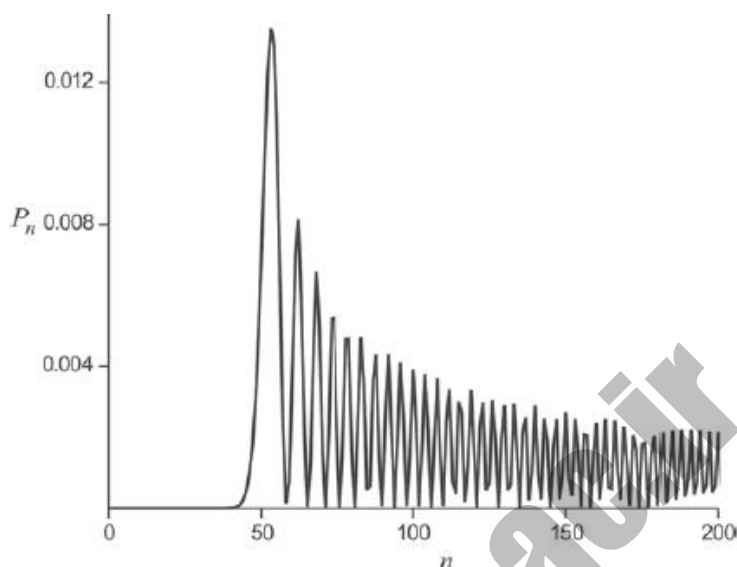
احتمال یافتن n فوتون در میدان برابر است با

$$P_n = |\langle n | \alpha, \xi \rangle|^2 = \frac{\left(\frac{1}{2} \tanh r \right)^n}{n! \cosh r} \exp \left[-|\alpha|^2 - \frac{1}{2} (\alpha^{*2} e^{i\theta} + \alpha^2 e^{-i\theta}) \tanh r \right] \times \left| H_n \left[\gamma \left(e^{i\theta} \sinh(2r) \right)^{-1/2} \right] \right|^2. \quad (7-81)$$

یادآور می‌شویم که میانگین عدد فوتونی برای این حالت توسط ۷-۲۶ داده شده است. اگر $|\alpha|^2 \gg \sinh^2 r$ باشد، گوئیم که قسمت «همدوس» حالت بر قسمت فشرده آن غلبه دارد. اما معادله ۷-۸۱ نشان می‌دهد که توزیع به فاز α بستگی دارد. در شکل ۷-۹ دو توزیع برای دو مقدار $\psi - \theta/2$ را که در آن ψ فاز α ، یعنی $\alpha = |\alpha| e^{i\psi}$ است، همراه با توزیع یک حالت همدوس با عدد فوتونی میانگین $|\alpha|^2$ نشان داده‌ایم.



شکل ۷-۹ توزیع‌های احتمال فوتون (که فقط برای اعداد صحیح معتبر است) برای حالت همدوس $|\alpha|^2 = 50$ (منحنی خط پر) و حالت فشرده به‌ازای $r = 0.5$ با $|\alpha|^2 = 50$ و $\psi - \theta/2 = 0$ (منحنی نقطه‌چین) و $\psi - \theta/2 = \pi/2$ (برای منحنی خط‌چین)



شکل ۷-۱۰ توزیع احتمال تعداد فوتون برای یک حالت فشرده با $\psi - \theta/2 = 0$ و $|\alpha|^2 = 50$ و $r = 4$

توجه کنید که توزیع $\psi - \theta/2 = 0$ از توزیع حالت همدوس باریک‌تر است. این در واقع یک نشانه از شکل دیگر فشردگی است که فشردگی عددی^۱ نامیده می‌شود که در آن توزیع عدد فوتونی، یک توزیع زیرپواسونی است، یعنی باریک‌تر از توزیع پواسون برای یک حالت همدوس. این اثر مانند فشردگی تربیع یک اثر غیر کلاسیکی است. کمی بعد به این موضوع برخواهیم گشت. در موردی که $\psi - \theta/2 = \pi/2$ باشد، توزیع پهن‌تر از توزیع حالت همدوس است و بنابراین ابرپواسونی نامیده می‌شود. این اثر، یک اثر غیر کلاسیکی نیست. موردی که برای آن قسمت فشردگی غالب است، یعنی $\sinh^2 r > |\alpha|^2$ در شکل ۷-۱۰ برای $\psi - \theta/2 = 0$ رسم شده است. بار دیگر، نوسانات با مقیاس نسبتاً بزرگ در توزیع ظاهر می‌شوند. توزیع‌های نوسانی عدد فوتونی توسط اشلائی^۲ و ویلر^۳ [۸] به عنوان نتیجه‌ای از تداخل خطای کانتور^۴ در فضای فاز تعبیر شده‌اند. این ایده جالب را در اینجا ادامه نمی‌دهیم و خواننده را به کتابی که اخیراً توسط اشلائی [۹] چاپ شده است و این نکته و سایر مطالب جالب در اپتیک کوانتومی از نظر فضای فاز را می‌پوشاند، ارجاع می‌دهیم.

قبل از پایان این بخش، چند تابع توزیع شبه احتمال وابسته به حالت‌های فشرده را محاسبه می‌کنیم. البته از قبل می‌دانیم که تابع P برای یک حالت فشرده، حداقل اگر بخواهیم آن را به صورت یک تابع معمولی بنویسیم، مشکل آفرین است. بلکه مشاهده می‌شود که تابع P برای یک حالت فشرده و دیگر حالت‌های غیر کلاسیکی دارای تکینگی بالا و شامل جملاتی مانند مشتق‌های تابع دلتا است. اما توابع Q و ویگنر خوش رفتار هستند. با استفاده از حالت همدوس $\langle \beta |$ ، تابع Q برای حالت فشرده $\langle \alpha, \xi |$ به صورت زیر داده می‌شود:

1. Number squeezing
2. Schleich

3. Wheeler
4. Error contour

$$\begin{aligned}
 Q(\beta) &= \frac{1}{\pi} |\langle \beta | \alpha, \xi \rangle|^2 \\
 &= \frac{1}{\pi \cosh r} \exp\{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \\
 &\quad + (\beta^* \alpha + \beta \alpha^*) / \cosh r \\
 &\quad - \frac{1}{2} [e^{i\theta} (\beta^{*2} - \alpha^{*2}) + e^{-i\theta} (\beta^2 - \alpha^2)] \tanh r\}.
 \end{aligned} \tag{۸۲-۷}$$

در شکل ۷-۱۱، تابع Q را به صورت تابعی از $x = \text{Re}(\beta)$ و $y = \text{Im}(\beta)$ به ازای $\theta = 0$ و $\alpha = 0$ (ا) و (ب) رسم کرده‌ایم. برای این انتخاب θ ، فشردگی در امتداد راستای X_1 است، باریک شدن شکل گاوسی تابع Q در راستای X_1 است و پهن شدن آن در راستای X_2 است. به ازای $\alpha = 0$ مرکز قله تابع Q در $\beta = 0$ قرار دارد که مناسب حالت خلا فشرده است، در حالی که به ازای $\alpha = \sqrt{5}$ قله تنها به $\beta = \sqrt{5}$ منتقل می‌شود. از تابع Q می‌توانیم تابع مشخصه $C_A(\lambda)$ را که به طور پاد نرمال مرتب^۱ شده است، از طریق تبدیل فوریه^{۳-۱۳۲} به دست آوریم. از معادله^{۳-۱۲۹} تابع مشخصه^۱ وگنر $C_W(\lambda)$ و بالاخره از معادله^{۳-۱۳۶} تابع وگنر

$$W(\beta) = \frac{2}{\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2r} - \frac{1}{2} y^2 e^{2r} \right] \tag{۸۳-۷}$$

را که مختص مورد $\theta = 0$ است، به دست می‌آوریم. بار دیگر توابع گاوسی ای داریم که در راستای فشردگی، باریک و در راستای عمود بر آن پهن می‌شوند. توجه کنید که برای حالت فشرده، تابع وگنر نامنفی است. در واقع می‌توان نشان داد که حالت‌های فشرده به شکل $\langle \alpha, \xi \rangle$ ، از جمله مورد خاص حالت‌های همدوس ($\xi = 0$)، تنها حالت‌های خالص کوانتومی هستند که برای آن‌ها توابع وگنر نامنفی است [۱۰].

۲-۷ تولید نور فشرده تریبی

اغلب طرح‌ها برای تولید نور فشرده تریبی بر نوعی فرایند پارامتری بنا شده‌اند که از انواع مختلف ابزار اپتیک غیرخطی استفاده می‌کنند. به طور کلی می‌خواهیم یک هامیلتونی برهم کنش بسازیم که نسبت به عملگرهای خلق و نابودی مُد میدانی که می‌خواهد فشرده شود، از مرتبه دو باشد. دستگاهی در نظر می‌گیریم که تبدیل فروافتی پارامتری تبهگن^۲ نامیده می‌شود. نوعی ماده غیرخطی توسط یک میدان با بسامد ω_p به آن پمپ^۳ می‌شود و فوتون‌هایی از آن میدان به زوج فوتون‌های یکسان که بسامد هر کدام برابر $\omega = \omega_p/2$ است (مد سیگنال)، تبدیل می‌شوند. این فرایند تبدیل فروافتی پارامتری تبهگن نامیده می‌شود. هامیلتونی این فرایند به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \omega_p \hat{b}^\dagger \hat{b} + i \hbar \chi^{(2)} (\hat{a}^2 \hat{b}^\dagger - \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}) \tag{۸۴-۷}$$

1. Antinormally ordered

2. Degenerate parametric down-conversion

3. pumped

که در آن b مد پمپ و a مد سیگنال است. $\chi^{(2)}$ پذیرفتاری خطی مرتبه دوم است (برای اطلاعات بیشتر درباره اپتیک غیر خطی، خواننده را به عنوان مثال، به کتاب بوید^۱ [۱۱] ارجاع می دهیم). حال «تقریب پارامتری» را اعمال می کنیم که در آن فرض می شود میدان پمپ یک میدان کلاسیکی همدوس قوی باشد، به طوری که در مقیاس زمانی مورد نظر تعداد فوتون ها تغییر نکند. فرض می کنیم که میدان در حالت همدوس $(\beta e^{-i\omega_p t})$ باشد و عملگرهای $\hat{b}$ و $\hat{b}^\dagger$ را به ترتیب با $\beta e^{-i\omega_p t}$ و $\beta^* e^{i\omega_p t}$ تقریب بزنیم. با حذف پارامترهای غیر لازم، تقریب پارامتری هامیلتونی ۷-۸۴ به صورت زیر درمی آید:

$$\hat{H}^{(PA)} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + i\hbar (\eta^* \hat{a}^2 e^{i\omega_p t} - \eta \hat{a}^{\dagger 2} e^{-i\omega_p t}), \quad (۸۵-۷)$$

در آن $\eta = \chi^{(2)}\beta$ است. بالاخره با رفتن به تصویر برهم کنش به دست می آوریم:

$$\hat{H}_1(t) = i\hbar [\eta^* \hat{a}^2 e^{i(\omega_p - 2\omega)t} - \eta \hat{a}^{\dagger 2} e^{-i(\omega_p - 2\omega)t}], \quad (۸۶-۷)$$

که عموماً وابسته به زمان است. ولی اگر ω_p را طوری انتخاب کنیم که $\omega_p = 2\omega$ باشد، هامیلتونی برهم کنش مستقل از زمان می شود.

$$\hat{H}_1 = i\hbar (\eta^* \hat{a}^2 - \eta \hat{a}^{\dagger 2}). \quad (۸۷-۷)$$

عملگر تحوّل وابسته به آن عبارت است از

$$\hat{U}_1(t, 0) = \exp(-i\hat{H}_1 t / \hbar) = \exp(\eta^* t \hat{a}^2 - \eta t \hat{a}^{\dagger 2}) \quad (۸۸-۷)$$

که به وضوح به شکل عملگر فشردۀ ۷-۱۰ است، یعنی $\hat{U}_1(t, 0) = \hat{S}(\xi)$ به ازای $\xi = 2\eta t$. یک فرایند غیر خطی دیگر که به نور فشردۀ منجر می شود، وجود دارد: اختلاط چهار موج تبهگن^۲ که در آن دو فوتون پمپ شده به دو فوتون سیگنال با بسامدهای یکسان تبدیل می شوند. هامیلتونی کوانتیده کل این فرایند عبارت است از

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega \hat{b}^\dagger \hat{b} + i\hbar\chi^{(3)}(\hat{a}^2 \hat{b}^{\dagger 2} - \hat{a}^{\dagger 2} \hat{b}^2) \quad (۸۹-۷)$$

که در آن $\chi^{(3)}$ پذیرفتاری غیر خطی مرتبه سوم است. با استدلال مشابه بالا برای مبدل فروافتی پارامتری و فرض اینکه میدان پمپ شده کلاسیک قوی باشد، تقریب پارامتری ۷-۸۷ را به دست می آوریم، ولی در اینجا $\eta = \chi^{(3)}\beta^2$ است.

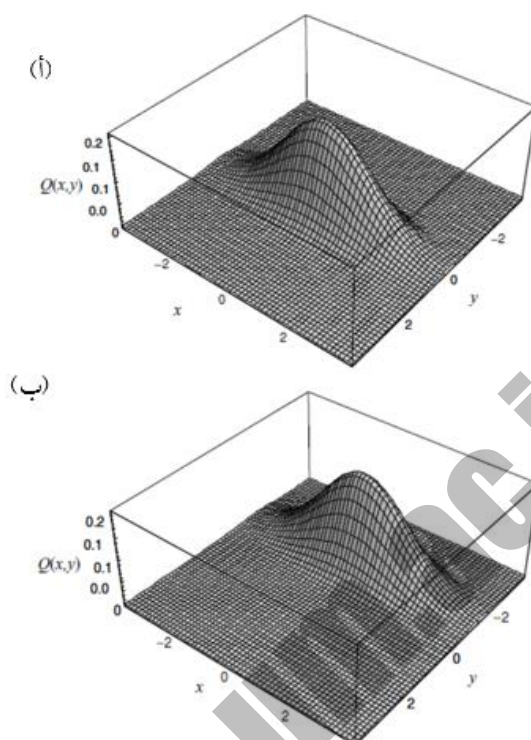
۷-۳ آشکارسازی نور فشردۀ تربیعی^۳

مسئله کافی نیست که تنها نور فشردۀ تولید شود؛ باید بتوانیم آن را آشکارسازی کنیم. چندین طرح برای آشکارسازی پیشنهاد و اجرا شده است.

1. Boyd

2. Degenerate four-wave mixing.

3. quadrature squeezed light



شکل ۷-۱۱ تابع Q برای (ا) حالت خلأ فشرده و (ب) خلأ فشرده جابه‌جا^۱ شده

ایده کلی در پشت تمام این روش‌ها این است که میدان سیگنال که فرض می‌شود فشرده است را با یک میدان همدوس قوی که «نوسانگر موضعی» نامیده می‌شود، مخلوط کنیم. در اینجا تنها یک روش را بررسی می‌کنیم، روشی که به آشکارسازی متوازن همودین^۲ موسوم است.

طرح‌واره این روش در شکل ۷-۱۲ نشان داده شده است. مد a شامل میدانی است که احتمالاً فشرده است. مد b شامل یک میدان کلاسیکی همدوس قوی است که می‌توان آن را یک حالت همدوس با دامنه β در نظر گرفت. تقسیم‌کننده‌های^۳ پرتو، ۵۰:۵۰ فرض می‌شوند (که دلیل نام‌گذاری آشکارسازی متوازن همودین است). فرض می‌کنیم رابطه بین عملگرهای ورودی $(\hat{a}, \hat{b})$ و خروجی $(\hat{c}, \hat{d})$ مشابه رابطه ۶-۱۰ باشد.

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + i\hat{b}) \\ \hat{d} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b} + i\hat{a}).\end{aligned}\tag{۷-۹۰}$$

1. Displaced squeezed vacuum.

2. Balanced homodyne detection

3. splitter

آشکارسازهای واقع در باریکه‌های خروجی، شدت‌های $I_c = \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} \rangle$ و $I_d = \langle \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle$ را اندازه‌گیری می‌کنند و اختلاف شدت‌ها برابر است با

$$\begin{aligned} I_c - I_d &= \langle \hat{n}_{cd} \rangle = \langle \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d} \rangle \\ &= i \langle \hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a} \hat{b}^\dagger \rangle \end{aligned} \quad (91-7)$$

که از ۷-۹۰ برای به‌دست آوردن سطر آخر استفاده کرده و قرار داده‌ایم. $\hat{n}_{cd} = \hat{c}^\dagger \hat{c} - \hat{d}^\dagger \hat{d}$ با فرض اینکه مد b یک حالت همدوس $|\beta e^{-i\omega t}\rangle$ باشد که در آن $\beta = |\beta| e^{-i\psi}$ است، داریم:

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = |\beta| \{ \hat{a} e^{i\omega t} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{-i\omega t} e^{i\theta} \} \quad (92-7)$$

که در آن $\theta = \psi + \pi/2$. با فرض اینکه نور مد a نیز با بسامد ω باشد (در عمل هر دو مد a و b از یک لیزر به‌دست می‌آیند)، می‌توان قرارداد $\hat{a} = \hat{a}_0 e^{-i\omega t}$ بنا بر این

$$\langle \hat{n}_{cd} \rangle = 2|\beta| \langle \hat{X}(\theta) \rangle \quad (93-7)$$

که در آن

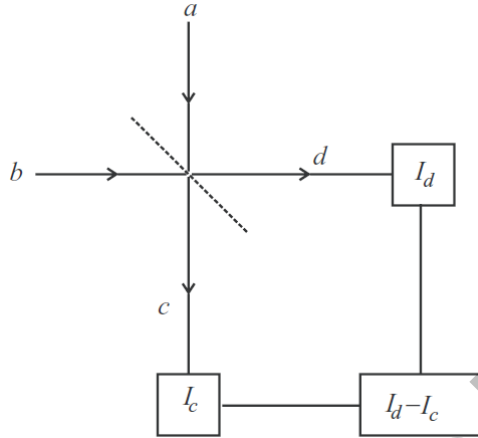
$$\hat{X}(\theta) = \frac{1}{2} \{ \hat{a}_0 e^{-i\theta} + \hat{a}_0^\dagger e^{i\theta} \} \quad (94-7)$$

عملگر تریب میدان تحت زاویه θ است. با تغییر θ که می‌تواند با تغییر فازی نوسانگر موضعی ایجاد شود، می‌توان تریب میدان سیگنال را اندازه‌گیری کرد. البته عموماً θ طوری انتخاب می‌شود که بیشترین مقدار فشردگی تریب به‌دست آید. واریانس عملگر اختلاف عدد فوتون خروجی $\hat{n}_{cd}$ در حد یک نوسانگر موضعی قوی برابر است با

$$\langle (\Delta \hat{n}_{cd})^2 \rangle = 4|\beta|^2 \langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle \quad (95-7)$$

برای شرط فشردگی ورودی $\langle (\Delta \hat{X}(\theta))^2 \rangle < \frac{1}{4}$ داریم $\langle (\Delta \hat{n}_{cd})^2 \rangle < |\beta|^2$. در یک آزمایش واقعی، باریکه سیگنال ابتدا بلو که می‌شود تا سطح نوفه شلیک^۱ به‌دست آید. به‌علاوه، باید ناکارآمدی‌های آشکارسازهای فوتونی را نیز به‌حساب آورد. این مشکل را در اینجا مورد بحث قرار نمی‌دهیم و خواننده می‌تواند به مقالات مورد نظر مراجعه کند.

در اولین تحقیق آزمایشی نور فشرده که توسط اسلاشر^۲ و همکاران [۱۲] انجام گرفت، از برهم‌کنش مخلوط چهار-موج استفاده شد. کاهش نوفه تا پایین‌تر از بیست درصد مجاز سطح نوفه شلیک به‌دست آمد. آزمایش بعدی که توسط «وو»^۳ [۱۳] انجام شد، توانست به کاهش ۶۵ درصد پایین‌تر از سطح نوفه شلیک برسد. در این روش، آن‌ها از یک تقویت‌کننده پارامتری استفاده کردند. حتی به کاهش نوفه بیشتری در سال‌های اخیر دست یافتند [۱۴]



شکل ۷-۱۲ طرح‌وارهٔ روش متوازن همودین برای آشکارسازی فشردگی؛ میدانی که باید آشکار شود، در امتداد $\hat{a}$ وارد می‌شود، درحالی‌که یک میدان همدوس قوی در راستای $\hat{b}$ تزریق می‌گردد. جعبه‌ها واقع در قسمت پایین چپ و بالای راست معرف آشکارسازهای فوتونی هستند که جریان‌های فوتون موردنظر را اندازه‌گیری می‌کنند. جعبهٔ سمت راست پایین یک دستگاه هم‌بستگی است که اختلاف جریان‌های فوتونی را نشان می‌دهد.

۷-۴ حالت‌های فشردۀ دامنه (عددی)

یادآور می‌شویم که در فصل ۲ رابطهٔ جابه‌جایی تعداد-فاز $i[\hat{n}, \hat{\phi}] = 1$ را به‌دست آوردیم که هرچند به‌صورت تکنیکی (بی‌اساس) بود، ولی به رابطهٔ عدم قطعیت تعداد-فاز $\Delta n \Delta \phi \geq 1/2$ منجر شد که برای میانگین‌های بالای تعداد فوتون‌ها معتبر است. برای یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ که برای آن $\Delta n = \bar{n}^{1/2}$ ($\bar{n} = |\alpha|^2$) است، می‌توان نشان داد در صورتی که $\bar{n} \gg 1$ باشد، رابطهٔ $\Delta \phi = 1/(2\bar{n}^{1/2})$ برقرار است (مسئلهٔ ۳-۲ را ببینید) و بنابراین رابطهٔ عدم قطعیت تعداد-فاز به تساوی تبدیل می‌شود. اما می‌توان مشابه با فشردگی تربیع، حالت‌هایی را تصور کرد که از نظر تعداد فشردۀ باشند که در آن صورت $\Delta n < \bar{n}^{1/2}$ یا از نظر فاز فشردۀ باشند که در آن صورت $\Delta \phi < 1/(2\bar{n}^{1/2})$ است. حالت‌هایی که از نظر فاز فشردۀ هستند را می‌توان به‌سختی در زمرهٔ حالت‌های غیر کلاسیکی طبقه‌بندی کرد، بخشی از این نظر که (همان‌طور که در فصل ۲ بحث شد) یک عملگر هرمیتی که فاز را نمایش دهد، وجود ندارد و بخشی به‌خاطر اینکه خیلی روشن نیست از چه حد کلاسیکی باید عبور کرد. علاوه‌بر این افت‌وخیزهای فاز، یک حالت همدوس را می‌توان با افزایش $\bar{n}$ تا حد دلخواه کوچک کرد. اما برای عدد فوتونی موضوع متفاوت است. می‌توان واریانس را به‌صورت زیر نوشت:

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle + (\langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle - \langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle^2) \quad (۹۶-۷)$$

که برحسب تابع P به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle + \int d^2 \alpha P(\alpha) [|\alpha|^2 - \langle \hat{a}^{\dagger} \hat{a} \rangle^2]^2 \quad (۹۷-۷)$$

که در آن

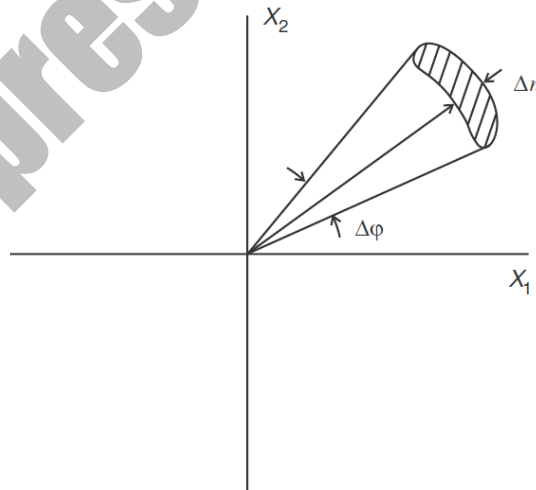
$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha|^2 \quad (98-7)$$

روشن است که شرط $\langle \hat{n} \rangle < \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$ برای فشردگی دامنه (یا تعداد فوتون) ایجاب می‌کند که $P(\alpha)$ در ناحیه‌ای از فضای فاز مقادیر منفی بگیرد. بنابراین فشردگی دامنه غیر کلاسیکی است. قابل ذکر است که بگوییم جمله اول معادله ۷-۹۷ به عنوان مشارکت «ذره‌مانندی» و جمله دوم به عنوان مشارکت «موج‌مانندی» تلقی می‌شود. در واقع برای نور گرمایی که در آن $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{n} \rangle^2$ است یا برای نور همدوس که در آن $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n} \rangle$ است، یک چنین تفکیکی برقرار است. اما برای نور با دامنه فشرده تعبیر جمله دوم به عنوان «موج‌مانندی» قدری مبهم است؛ زیرا این نور نیز خواصی را که انحصاراً ماهیت کوانتومی دارند داراست. برای حالتی که فشردگی دامنه را نشان می‌دهد گفته می‌شود که دارای آمار زیرپواسونی^۱ است، توزیعی که از توزیع مربوط به یک حالت همدوس با همان تعداد میانگین فوتون، باریک‌تر است. حالت‌هایی که توزیع تعداد فوتون‌های آن‌ها پهن‌تر از یک حالت همدوس هستند، آمار ابرپواسون^۲ نامیده می‌شوند.

یک راه ساده برای اینکه طبیعت آمار فوتونی هر حالت را بسنجیم این است که پارامتر Q به صورت

$$Q = \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} \quad (99-7)$$

را محاسبه کنید (این پارامتر را نباید با تابع Q اشتباه کرد). برای حالتی که Q در محدوده $-1 \leq Q < 0$ قرار داشته باشد، آمار زیرپواسونی و اگر $Q > 0$ باشد، آمار ابرپواسونی است. بدیهی است که برای یک حالت همدوس $Q = 0$ است.



شکل ۷-۱۳ نمایش فضای فاز یک حالت عددی فشرده. توجه کنید که این حالت بخصوص فشردۀ تربیع نیز هست.

1. Sub-poissonian

2. Super-poissonian

در شکل ۷-۱۳ نمودار کلی یک حالت فشرده دامنه در فضای فاز را نشان داده‌ایم. با توجه به شکل، چنین حالت‌هایی «حالت‌های هلالی»^۱ نامیده می‌شوند. در حالت حدی، یک حالت عددی، مانند شکل ۳-۲ هلال به صورت یک دایره کامل پخش می‌شود و پارامتر Q به سمت صفر میل می‌کند. برای بعضی از حالت‌های میدان، این امکان وجود دارد که به طور هم‌زمان فشرده‌گی تربیع و دامنه را بروز دهند. بار دیگر حالت‌های $|0\rangle\langle 0| = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که قبلاً بحث کردیم، می‌توان نشان داد:

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \quad (7-100)$$

همچنین می‌توان نشان داد که

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = |\alpha \cosh r - \alpha^* e^{i\theta} \sinh r|^2 + 2 \sinh^2 r \cosh^2 r \quad (7-101)$$

با قرار دادن $\alpha = |\alpha| e^{i\psi}$ و انتخاب $\psi - \theta/2 = \pi/2$ به دست می‌آوریم:

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = |\alpha|^2 e^{2r} + 2 \sinh^2 r \cosh^2 r \quad (7-102)$$

که به وضوح فشرده‌گی دامنه را نشان نمی‌دهد. از طرف دیگر، با $\psi = \theta/2$ به دست می‌آوریم:

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = |\alpha|^2 e^{-2r} + 2 \sinh^2 r \cosh^2 r \quad (7-103)$$

که با انتخاب‌های معین $|\alpha|$ و r می‌تواند فشرده‌گی تعداد را نشان دهد. به عنوان مثال، وقتی $|\alpha|^2$ خیلی بزرگ و r کوچک باشد، به طوری که $\sinh r \approx 0$ باشد، $\langle \hat{n} \rangle \approx |\alpha|^2$ و $\langle \hat{n} \rangle e^{-2r} \approx \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$ است و بنابراین $\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle < \langle \hat{n} \rangle$. ارتباط به فشرده‌گی تربیع را می‌توان با استفاده از معادله ۷-۲۵ به طور کامل بیان کرد و نوشت:

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle \approx 4 \langle \hat{n} \rangle \langle (\Delta \hat{V}_1)^2 \rangle \quad (7-104)$$

از نظر تجربی، شورت^۲ و مندل^۳ [۱۵] اولین کسانی بودند که آمار زیرپواسونی را مشاهده کردند. این مشاهده در آزمایشی بود که روی فلورسانس تشدیدي تک‌اتمی^۴ انجام شد.

۷-۵ پادگروهی فوتونی^۵

در بخش ۵-۴ تابع همدوسی مرتبه دوم $g^{(2)}(\tau)$ در معادله ۵-۹۱ را مورد بحث قرار دادیم که مشخص‌کننده احتمال مشترک برای آشکارسازی یک فوتون و پس از آن با تأخیر زمانی τ یک فوتون دیگر در همان نقطه بود. اگر $g^{(2)}(\tau) = 1$ باشد، در این صورت فوتون‌ها مستقل از یکدیگر به آشکارساز می‌رسند و در واقع باید انتظار داشته باشیم که برای هر حالت میدان در حد $\tau \rightarrow \infty$ ، $g^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$ میل کند؛ چرا که «حافظه» اولین فوتون

1. Crescent state
2. Short

3. Mandel
4. single-atom resonance fluorescence

5. photon antibunching

آشکار شده پس از مدت طولانی پاک می‌شود. برای حالت‌های همدوس $g^{(2)}(\tau) = 1$ است. برای $g^{(2)}(\tau) < g^{(2)}(0)$ احتمال آشکار سازی فوتون دوم پس از تأخیر زمانی τ کاهش می‌یابد و این نشانه خوشه‌ای شدن فوتون‌هاست. برای میدان گرمایی، $g^{(2)}(0) = 2$ است. از طرف دیگر، برای $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ احتمال آشکار سازی فوتون دوم با تأخیر زمانی افزایش می‌یابد. این پدیده پادگروهی شدن فوتون نامیده می‌شود که همان‌طوری که قبلاً در فصل ۵ گفتیم، یک اثر غیر کلاسیک است. اکنون می‌توانیم توضیح دهیم که چرا؟ ابتدا یک میدان تک‌مدی در نظر بگیرید که برای آن (مانند معادله ۵-۹۲)

$$g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^\dagger a^\dagger \hat{a} \hat{a} \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} \quad (105-7)$$

$$= 1 + \frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle^2}$$

به عبارت دیگر، چون $g^{(2)}(\tau)$ برای یک میدان تک‌مدی، مستقل از تأخیر زمانی τ است، نمی‌تواند هیچ پادگروهی^۱ یا خوشه‌ای^۲ شدن فوتون وجود داشته باشد. با وجود این، بر حسب تابع P می‌توان معادله ۷-۱۰۵ را به صورت زیر نوشت:

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\int P(\alpha) [|\alpha|^2 - \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle]^2 d^2\alpha}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} \quad (106-7)$$

که در آن $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle$ در معادله ۷-۹۸ داده شده است. برای یک حالت میدان کلاسیکی که برای آن $P(\alpha) \geq 0$ است، باید داشته باشیم $g^{(2)}(0) \geq 1$. اما برای یک حالت میدان غیر کلاسیکی می‌تواند $g^{(2)}(0) < 1$ باشد که همان‌طوری که قبلاً گفتیم، می‌توان آن را به عنوان نقض کوانتومی نامساوی کوشی تعبیر کرد. ممکن است توجه کرده باشید که شرط $g^{(2)}(0) < 1$ همان شرطی است که پارامتر Q در معادله ۷-۹۹ منفی باشد؛ به عبارت دیگر، شرط آمار زیرپواسونی است. در واقع، Q و $g^{(2)}(0)$ برای یک میدان تک‌مدی به صورت زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$Q = \langle \hat{n} \rangle [g^{(2)}(0) - 1] \quad (107-7)$$

این واقعیت که وقتی $g^{(2)}(0) < 1$ باشد، $Q < 0$ است، به ابهام در ارتباط با رابطه بین آمار زیرپواسونی و پادگروهی شدن فوتون منجر می‌شود. برای یک میدان تک‌مدی $g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0) = \text{constant}$ و بنابراین هیچ پادگروهی شدن فوتون وجود ندارد. خوشه‌ای شدن و پادگروهی شدن تنها برای میدان‌های چندمدی رخ می‌دهد. برای چنین میدان‌هایی که در حالتی با تابع P ، $P(\{\alpha_i\})$ قرار دارند (معرف مجموعه متغیرهای مختلط فضای فاز وابسته به هریک از مدها هستند و مدها توسط اندیس‌های i و j از یکدیگر متمایز می‌شوند)، به سادگی می‌توان نشان داد که

1. antibunching

2. bunching

$$g^{(2)}(0) = 1 + \frac{\int P(\{\alpha_i\}) [\sum_j |\alpha_j|^2 - \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle]^2 d^2\{\alpha_i\}}{(\sum_j \langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle)^2} \quad (۱۰۸-۷)$$

که در آن $d^2\{\alpha_i\} = d^2\alpha_1 d^2\alpha_2 \dots$

$$\langle \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \rangle = \int P(\{\alpha_i\}) |\alpha_j|^2 d^2\{\alpha_i\} \quad (۱۰۹-۷)$$

برای میدان‌های کلاسیکی با $P(\{\alpha_i\}) \geq 0$ داریم $g^{(2)}(0) \geq 1$. وقتی نامساوی کوشی-شوارتز به تابع همدوسی کلاسیکی موردنظر $\gamma^{(2)}(\tau)$ اعمال شود، نشان می‌دهد که برای میدان‌های کلاسیکی همواره باید $g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$ باشد که همان‌طوری که در فصل ۵ نشان دادیم، برای پادگروهی شدن فوتون مجاز نیست. بنابراین شرط پادگروهی شدن، $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ ، مانند شرط $g^{(2)}(0) < 1$ نشان‌دهنده نور غیر کلاسیکی است. با توجه به اینکه در حد $\tau \rightarrow \infty$ ، $g^{(2)}(\tau) \rightarrow 1$ نتیجه می‌شود که شرط $g^{(2)}(0) \leq 1$ دلالت بر پادگروهی شدن فوتون‌ها دارد، به جز (و این یک استثنای مهم است) در مورد میدان تک‌مدی یا وقتی به دلایل دیگر، $g^{(2)}(\tau)$ یک مقدار ثابت باشد. اما عکس این مطلب لزوماً صحیح نیست. شرط پادگروهی شدن، $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ به معنای آمار زیرپواسونی، $g^{(2)}(0) < 1$ نیست. کاملاً برعکس، زو^۱ و مندل^۲ [۱۶] در مقاله اشتباهاتی را که غالباً در مفاهیم آمار زیرپواسونی و پادگروهی شدن فوتون‌ها رخ می‌دهند، مورد بحث قرار داده و در آن یک حالت دومدی (تأخیزی تصنعی) ساخته‌اند که به‌طور هم‌زمان خواص آمار زیرپواسونی و گروهی شدن فوتون‌ها را داراست.

برخلاف فشردگی تریب، آمار زیرپواسونی و پادگروهی شدن فوتون‌ها به فاز بستگی ندارد و بنابراین به ماهیت ذره‌ای نور مربوط است.

پادگروهی شدن فوتون‌ها در فلورسانس تشدید^۳ حاصل از یک اتم دوترازی که توسط یک میدان لیزری تشدید می‌شود، پیش‌بینی شده بود [۱۷]. بحث کامل فلورسانس تشدید از حوصله این کتاب خارج است، ولی تعبیر نتایج مربوط به تابع همدوسی مرتبه دوم را می‌توان به‌سادگی بیان کرد. اگر بسامد رابی میدان راه‌انداز^۴ Ω و آهنگ گسیل خودبه‌خودی را γ بنامیم، تابع هم‌بستگی مرتبه دوم پایا $g^{(2)}(\tau)$ به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$g^{(2)}(\tau) = [1 - \exp(-\gamma\tau/2)]^2 \Omega \ll \gamma \quad (۱۱۰-۷)$$

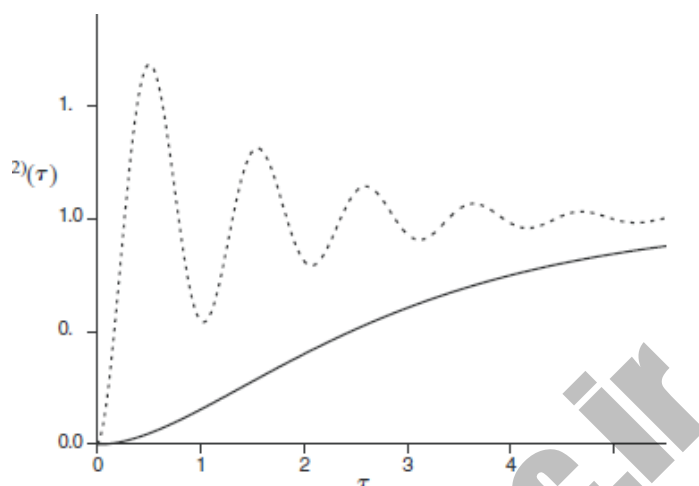
یا

$$g^{(2)}(\tau) = 1 - \exp(-3\gamma\tau/4) \cos(\Omega\tau) \Omega \gg \gamma \quad (۱۱۱-۷)$$

این توابع که در هر دو حد $g^{(2)}(0) = 0$ است، در شکل ۷-۱۴ نشان داده شده‌اند.

1. Zou
2. Mandel

3. Resonance fluorescence
4. Driving field



شکل ۷-۱۴ تابع همدوسی مرتبه دوم برای فلورسانس تشدیدی برای مورد $\Omega \gg \gamma$ (خطوط نقطه چین) و $\Omega \ll \gamma$ (خط پر)

رفتار نشان داده شده در شکل را می توان به صورت زیر تعبیر کرد. می دانیم که $g^{(2)}(\tau)$ اساساً احتمال مشترک برای آشکارسازی یک فوتون در زمان $t = 0$ و یک فوتون دیگر در زمان $t = \tau$ است. اما چشمه فوتون ها یک تک اتم است که در یک میدان همدوس قرار دارد. یک فوتون فلورسنت آشکار شده در $t = 0$ نتیجه حاصل از «پرش» الکترون از حالت برانگیخته به حالت پایه است. اما برای الکترونی که در حالت پایه قرار دارد، هیچ امکانی برای گسیل فوتونی دیگر در زمان تأخیری $\tau = 0$ وجود ندارد (احتمال صفر است). بنابراین قبل از اینکه میدان لیزر الکترون را با یک احتمال متناهی به حالت برانگیخته برگرداند، یک «زمان ازدست رفته» وجود دارد که پس از آن زمان، اتم بتواند یک فوتون دیگر گسیل کند. در واقع تابع هم بستگی $g^{(2)}(\tau)$ متناسب است با احتمال اینکه اتمی که ابتدا در حالت پایه قرار داشته است، در زمان τ به حالت برانگیخته برود.

آزمایش هایی که توسط مندل و همکارانش [۱۸] انجام شد، این پیش بینی ها را تأیید کرد. این آزمایش ها شامل یک باریکه از اتم های سدیم با شدت پایین بود که به طور عمود توسط یک لیزر رزین های پایدار که به شکل تشدید با یک گذار فوق زمان^۱ هم کوک شده است، مورد تابش قرار می گرفت (گذار $3P_{3/2}, F = 3, M_F = 2$ به $3S_{1/2}, F = 2, M_F = 2$). شدت باریکه آنقدر پایین بود که در هر لحظه تنها یک اتم، ناحیه مشاهده (ناحیه ای که عمود بر باریکه های اتم لیزر قرار دارد) را اشغال می کرد.

۷-۶ حالت های گربه شرودینگر

به عنوان آخرین نمونه از یک نوع مهم از حالت های میدان تک مدی که دارای خواص غیر کلاسیکی قوی هستند، دسته ای از حالت ها را در نظر می گیریم که از برهم نهی دو حالت همدوس با دامنه های مساوی تشکیل

1. hypertime

شده‌اند که فاصله آن‌ها در فضای فاز 180° است، یعنی حالت‌هایی به صورت

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(|\alpha\rangle + e^{i\Phi}|\alpha\rangle) \quad (112-7)$$

که در آن $\mathcal{N}$ ضریب بهنجارش است که برابر است با

$$\mathcal{N} = [2 + 2\exp(-2\alpha^2 \cos\Phi)]^{1/2} \quad (113-7)$$

α را حقیقی در نظر گرفته‌ایم. وقتی $|\alpha|$ بزرگ باشد، حالت‌های $|\alpha\rangle$ و $|\alpha\rangle$ به طور ماکروسکوپی از یکدیگر قابل تشخیص‌اند و برهم‌نهی‌های آن‌ها به صورت ۱۱۲-۷، حالت‌های گره‌شرو دینگر نامیده می‌شوند. یادآور می‌شویم که سرانجام گره‌شرو دینگر [۱۹] عبارت بود از یک برهم‌نهی از حالت‌های قابل تشخیص ماکروسکوپی که بنابر آن گره می‌تواند مرده یا زنده باشد. باید تأکید کنیم که هدف شرو دینگر این نبود که نشان دهد چگونه مکانیک کوانتومی می‌تواند به زندگی روزانه کلاسیکی وارد شود. بلکه می‌خواست تعبیر کهنه‌ای مکانیک کوانتومی را نقد کند، تعبیری که او و بسیاری دیگر از جمله اینشتین تصور می‌کردند نامعقول است. با وجود این، در سال‌های اخیر با پیشرفت تکنولوژی امکان ساخت برهم‌نهی از حالت‌های کوانتومی که به نوعی از نظر ماکروسکوپی از یکدیگر قابل تشخیص باشند، میسر شده است. انگیزه اصلی چنین فعالیت‌هایی پاسخ به این سؤال است که مرز بین جهان کلاسیکی و کوانتومی کجاست؟ برهم‌نهی حالت‌هایی از نوع ۱۱۲-۷ هرگز در زندگی روزمره ماکروسکوپی دیده نمی‌شود. چرا؟ بخشی از پاسخ عبارت است از: هیچ سیستم کوانتومی، مخصوصاً نوع ماکروسکوپی آن، واقعاً یک سیستم منزوی نیست و با بقیه جهان، «محیط»، برهم‌کنش دارد. محیط شامل تعداد بی‌شماری درجه آزادی است که هرچند مشاهده نمی‌شود، ولی به نوعی محیط سیستم را می‌بیند و به صورت اتلافی با آن برهم‌کنش دارد. البته واقعاً جهان به طور کامل کوانتومی است و وقتی قسمت کوچکی از آن با بقیه قسمت‌ها برهم‌کنش کند، دو زیرسیستم درهم‌تنیده می‌شوند. همان‌طوری که در پیوست «ا» نشان داده شده است، با گرفتن رد^۱ از متغیرهای قسمت مشاهده‌نشده، یک سیستم درهم‌تنیده، سیستم مورد نظر را در یک حالت مخلوط قرار می‌دهد و این ایده اصلی در اینجا است. اگر به نحوی یک برهم‌نهی از حالت‌های همدوس مانند ۱۱۲-۷ بسازیم، به خاطر برهم‌کنش با محیط، سریعاً به یک مخلوط آماری از نوع زیر، «واهمدوس^۲» می‌شود:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta|) \quad (114-7)$$

که در آن $\beta = \alpha e^{-\gamma t/2}$ و γ به آهنگ اتلاف انرژی مربوط می‌شود. به علاوه هرچه مؤلفه‌های حالت برهم‌نهی اولیه بیشتر ماکروسکوپی باشند، یعنی هرچه $|\alpha|$ بزرگ‌تر باشد، واهمدوسی سریع‌تر اتفاق می‌افتد. در فصل ۸ بیشتر به این موضوع خواهیم پرداخت. در اینجا بیشتر به خواص حالت‌های گره ۱۱۲-۷ با تأکید خاص روی

1. trace

2. decoherence

خواصی که غیر کلاسیک هستند، می‌پردازیم. این خواص از این نظر اهمیت دارند که باید بین برهم‌نهی حالت‌ها و مخلوط‌های آماری، تفاوت قائل شد. مخلوط آماری دارای خواصی است که صرفاً کلاسیکی است. بسته به انتخابی که در اینجا برای فاز نسبی Φ می‌کنیم، سه نوع مهم از حالت‌های گریه وجود دارد. به ازای $\Phi = 0$ حالت‌های همدوس زوج به دست می‌آوریم:

$$|\psi_e\rangle = \mathcal{N}_e(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (115-7)$$

به ازای $\Phi = \pi$ حالت‌های همدوس فرد حاصل می‌شوند:

$$|\psi_0\rangle = \mathcal{N}_0(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle) \quad (116-7)$$

که در آن

$$\mathcal{N}_e = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + \exp(-2\alpha^2)]^{-1/2}, \mathcal{N}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 - \exp(-2\alpha^2)]^{-1/2} \quad (117-7)$$

ضرائب بهنجارش حالت‌های بالا هستند. این حالت‌ها ابتدا توسط دادونوف^۱ و همکاران [۲۰] معرفی شدند. به ازای $\Phi = \pi/2$ ، حالت‌های یورک - استولر^۲ [۲۱] را داریم:

$$|\psi_{ys}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha\rangle + i|-\alpha\rangle) \quad (118-7)$$

این سه حالت، ویژه حالت‌های مربع عملگر نابودی با ویژه مقدار α^2 هستند.

$$\hat{a}^2|\psi\rangle = \alpha^2|\psi\rangle \quad (119-7)$$

باید بتوانیم بین حالت‌های گریه ۱۱۵-۷ تا ۱۱۹-۷ که برهم‌نهی‌های همدوس $|\alpha\rangle$ و $|-\alpha\rangle$ هستند و مخلوط آماری زیر تفاوت قائل شویم:

$$\hat{\rho}_{\text{mixture}} = \frac{1}{2}(|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|) \quad (120-7)$$

یعنی از آنجا که عملگر چگالی متناظر با یک حالت گریه، مثلاً حالت همدوس زوج عبارت است از

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_e &= |\psi_e\rangle\langle\psi_e| \\ &= |\mathcal{N}_e|^2 (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha| + |-\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle-\alpha|) \end{aligned} \quad (121-7)$$

باید بتوانیم اثرات جملات «همدوسی» $|\alpha\rangle\langle-\alpha|$ و $|-\alpha\rangle\langle\alpha|$ را که در مخلوط آماری ۱۲۰-۷ وجود ندارد، آشکار کنیم. حال به آمار فوتونی می‌پردازیم. برای $|\psi_e\rangle$ داریم:

$$P_n = \begin{cases} \frac{2\exp(-\alpha^2)}{1 + \exp(-\alpha^2)} \frac{\alpha^{2n}}{n!} & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases} \quad (122-7)$$

و برای حالت همدوس فرد

$$P_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2\exp(-\alpha^2)}{1 + \exp(-\alpha^2)} & \text{فرد } n \end{cases} \quad (۱۲۳-۷)$$

برای حالت یورک-استولر، P_n یک توزیع پواسون است که با توزیع مربوط به یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ و مخلوط آماری ۷-۱۲۰ یکسان است، یعنی $P_n = \langle n | \hat{\rho}_{mixture} | n \rangle$ حداقل برای حالت‌های همدوس زوج و فرد، توزیع‌های نوسانی عدد فوتونی با توزیع‌های مربوط به مخلوط‌های آماری تفاوت دارد. به‌سادگی می‌توان دید فقدان حالت‌های عددی فرد در $|\psi_e\rangle$ یا حالت‌های عددی زوج در $|\psi_0\rangle$ نتیجه تداخل کوانتومی است. پارامتر Q برای حالت‌های همدوس زوج عبارت است از

$$Q = \frac{4\alpha^2 \exp(-\alpha^2)}{1 + \exp(-4\alpha^2)} > 0 \quad (۱۲۴-۷)$$

که آمار ابرپواسون را به‌ازای تمام مقادیر α نشان می‌دهد و برای حالت‌های همدوس فرد

$$Q = -\frac{4\alpha^2 \exp(-\alpha^2)}{1 + \exp(-4\alpha^2)} < 0 \quad (۱۲۵-۷)$$

که نشان‌دهنده آمار زیرپواسون، بازهم به‌ازای همه مقادیر α است. وقتی α بزرگ باشد، برای حالت‌های همدوس زوج و فرد، $Q \rightarrow 0$. برای حالت‌های یورک-استولر، به‌ازای تمام‌ها، $Q = 0$ است. حال به فشردگی تربیع برمی‌گردیم. برای حالت همدوس زوج داریم:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{1 + \exp(-2\alpha^2)} \quad (۱۲۶-۷)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2 \exp(-2\alpha^2)}{1 + \exp(-2\alpha^2)} \quad (۱۲۷-۷)$$

بنابراین وقتی α خیلی بزرگ نباشد، افت و خیزها در تربیع $\hat{X}_2$ کاهش می‌یابند. برای حالت‌های همدوس فرد داریم:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2}{1 - \exp(-2\alpha^2)} \quad (۱۲۸-۷)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 \exp(-2\alpha^2)}{1 - \exp(-2\alpha^2)} \quad (۱۲۹-۷)$$

که هیچ فشردگی‌ای نشان نمی‌دهد (به ارتباط با فشردگی تربیع و آمار زیرپواسون توجه کنید). برای حالت یورک-استولر به‌دست می‌آوریم:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \alpha^2 \quad (۱۳۰-۷)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} - \alpha^2 \exp(-4\alpha^2) \quad (۱۳۱-۷)$$

بنابراین فشردگی در $\hat{X}_2$ ظاهر می‌شود. بالاخره برای مخلوط آماری (۷-۱۲۰) به دست می‌آوریم

$$\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} + \alpha^2 \quad (۱۳۲-۷)$$

$$\langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (۱۳۳-۷)$$

که همان‌طوری که انتظار می‌رفت، هیچ فشردگی نشان نمی‌دهد.

یک راه دیگر برای اینکه تفاوت بین برهم‌نهی‌های همدوس و مخلوط آماری را ببینیم این است که توزیع فاز را بررسی کنیم. با استفاده از حالت‌های فاز $\theta > 0$ که در فصل ۲ معرفی شد، برای حالت ۷-۱۱۲ در حدهای بزرگ، توزیع فاز زیر را به دست می‌آوریم (α حقیقی فرض می‌شود):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{|\psi\rangle}(\theta) \approx & \left(\frac{2\bar{n}}{\pi}\right)^{1/2} |\mathcal{N}|^2 \{ \exp[-2\bar{n}\theta^2] \\ & + \exp[-2\bar{n}(\theta - \pi)^2] \\ & + 2\cos(\bar{n}\pi - \Phi) \exp[-\bar{n}\theta^2 - \bar{n}(\theta - \pi)^2] \} \end{aligned} \quad (۱۳۴-۷)$$

که در آن $\bar{n} = |\alpha|^2$ است. برای عملگر چگالی ۷-۱۲۰ داریم:

$$\mathcal{P}_\rho(\theta) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{n}}{\pi}\right)^{1/2} \{ \exp[-\bar{n}\theta^2] + \exp[-\bar{n}(\theta - \pi)^2] \} \quad (۱۳۵-۷)$$

هر دو توزیع، همان‌طوری که انتظار می‌رفت، در $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ دارای قله هستند، ولی تنها توزیع اول دارای یک جمله تداخلی است. متأسفانه جمله تداخلی بسیار کوچک است؛ توابع گاوسی در جمله حاصل ضرب هم‌پوشانی کمی دارد.

اما در مورد توزیع‌های شبه‌احتمالی، تابع P تکینگی بالایی دارد، چون شامل تعداد بی‌نهایت مشتق‌های مرتبه بالاتر تابع دلتاست. تابع Q که همواره مثبت است، علامت واضحی برای غیر کلاسیکی بودن ندارد، اما تابع ویگنر، وقتی مقادیر منفی می‌گیرد، نشانه غیر کلاسیکی بودن را از خود نشان می‌دهد. با استفاده از نتایج فصل ۳، تابع ویگنر برای یک مخلوط آماری برابر است با

$$\begin{aligned} W_M(x, y) = & \frac{1}{\pi} \{ \exp[-2(x - \alpha)^2 - 2y^2] \\ & + \exp[-2(x + \alpha)^2 - 2y^2] \} \end{aligned} \quad (۱۳۶-۷)$$

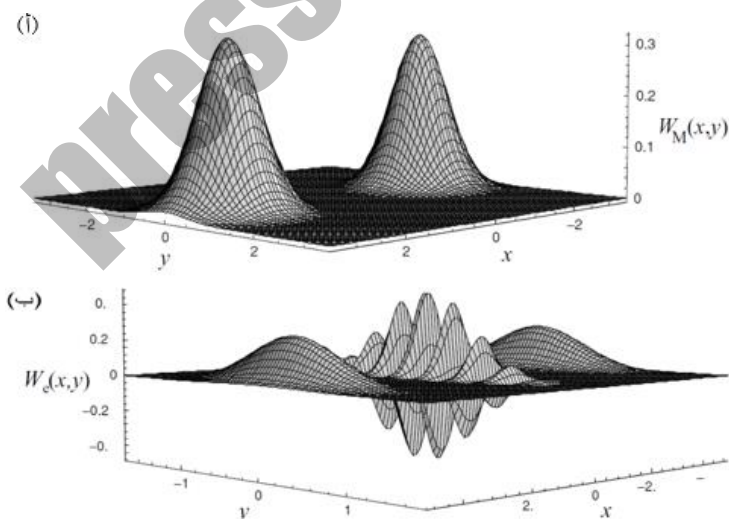
که همواره مثبت است و همان‌طوری که در شکل ۷-۱۵ (أ) نشان داده شده است، شامل دو قله گاوسی به مرکزهای $x = \pm\alpha$ است. اما تابع گاوسی برای حالت همدوس زوج برابر است با

$$W_e(x, y) = \frac{1}{\pi[1 + \exp(-2\alpha^2)]} \{ \exp[-2(x - \alpha)^2 - 2y^2] + \exp[-2(x + \alpha)^2 - 2y^2] + 2\exp[-2x^2 - 2y^2]\cos(4y\alpha) \} \quad (۷-۱۳۷)$$

که جمله آخر از تداخل بین دو حالت $|\alpha\rangle$ و $|\alpha\rangle$ حاصل شده است و باعث می‌شود تابع ویگنر نوسانات بالایی داشته باشد که به فرآیندهای تداخلی منجر می‌گردد و همان‌طوری که در شکل ۷-۱۵ (ب) نشان داده شده است، مقادیر منفی اختیار می‌کند. منفی بودن این تابع باعث می‌شود که نتوان در این مورد تابع ویگنر را به‌عنوان یک توزیع احتمال تعبیر کرد.

برای اینکه مطلب را کامل کنیم، توابع ویگنر را برای حالت همدوس فرد و حالت یورک-استولر می‌نویسیم.

$$W_o(x, y) = \frac{1}{\pi[1 + \exp(-2\alpha^2)]} \{ \exp[-2(x - \alpha)^2 - 2y^2] + \exp[-2(x + \alpha)^2 - 2y^2] - 2\exp[-2x^2 - 2y^2]\cos(4y\alpha) \} \quad (۷-۱۳۸)$$



شکل ۷-۱۵ تابع ویگنر برای (أ) مخلوط آماری حالت‌های همدوس و (ب) حالت همدوس زوج، هر دو به‌ازای $\alpha = \sqrt{5}$. روشن است که اولی همواره مثبت و دومی در بعضی از نواحی فضای فاز مقادیر منفی می‌گیرد و به‌شدت نوسانی است (نشان‌دهنده فرآیندهای تداخلی است).

$$W_{ys}(x, y) = \frac{1}{\pi} \{ \exp[-2(x - \alpha)^2 - 2y^2] + \exp[-2(x + \alpha)^2 - 2y^2] - 2 \exp[-2x^2 - 2y^2] \sin(4y\alpha) \} \quad (139-7)$$

این توابع با توابع مربوط به حالت همدوس زوج، ویژگی‌های مشابهی دارند. اصولاً چگونه می‌توان (با کنار گذاشتن مسئله همدوسی) حالت‌های گریه شرودینگر، معادلات ۷-۱۱۵ تا ۷-۱۱۸ را تولید کرد؟ قبلاً توضیح دادیم چگونه حالت‌های فشرده را می‌توان توسط فرایندهای پارامتری تولید کرد. این حالت‌ها با تحویل یکانی که توسط عملگر فشرده‌گی تحقق می‌یابد، تولید می‌شوند. اگر حالت اولیه یک حالت خلأ باشد، حالت خلأ فشرده تحویل می‌یابد، یعنی حالتی که تنها از حالت‌هایی با تعداد زوج فوتون تشکیل شده است. برای حالت همدوس زوج معادله ۷-۱۱۵ نیز تنها حالت‌های عددی زوج اشغال شده‌اند. اما این بار به نظر می‌رسد نتوان راهی برای تولید این حالت‌ها از خلأ یا هر حالت دیگری با تحویل یکانی ساخت. همین مطلب برای حالت همدوس فرد صادق است. به زودی، با معرفی تقلیل حالت به روش تصویری^۱، یک روش غیر یکانی برای تولید چنین حالت‌هایی تشریح خواهیم کرد. اما حالت یورک-استولر را می‌توان از تحویل یکانی یک حالت همدوس در نوع معینی از ماده غیر خطی، یک ماده کر^۲ مانند [۲۱] تولید کرد. این برهم کنش، یک «خود برهم کنشگر» است، یعنی بدون میدان محرک پارامتری و توسط هامیلتونی برهم کنش زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{H}_I = \hbar K (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 = \hbar K \hat{n}^2 \quad (140-7)$$

که در آن K با پذیرفتاری غیر خطی مرتبه سوم⁽³⁾ متناسب است. حالت همدوس اولیه به حالت زیر تحویل پیدا می‌کند:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH_I t/\hbar} |\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-iKn^2 t} |n\rangle \quad (141-7)$$

چون n^2 یک عدد صحیح است، $|\psi(t)\rangle$ یک حالت تناوبی با دوره تناوب $T = 2\pi/K$ خواهد بود. اگر $t = \pi/K$ باشد، داریم $e^{-iKn^2 t} = e^{-i\pi n^2} = (-1)^n$ و از این رو، $|\psi(\pi/K)\rangle = |-\alpha\rangle$. اما به ازای $t = \pi/2K$ داریم:

$$e^{-iKn^2 t} = e^{-i\pi n^2/2} = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ i & \text{فرد } n \end{cases} \quad (142-7)$$

بنابراین

$$|\psi(\pi/2K)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} (|\alpha\rangle + i|\alpha\rangle) \quad (۱۴۳-۷)$$

که به‌جز در یک ضریب فاز کلی بی‌اهمیت، همان حالت یورک-استولر معادله ۱۱۸-۷ است. شکل واقعی‌تر برهم‌کنش کر توسط هامیلتونی زیر داده می‌شود [۲۲]:

$$\hat{H}_I = \hbar K \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 = \hbar K (\hat{n}^2 - \hat{n}) \quad (۱۴۴-۷)$$

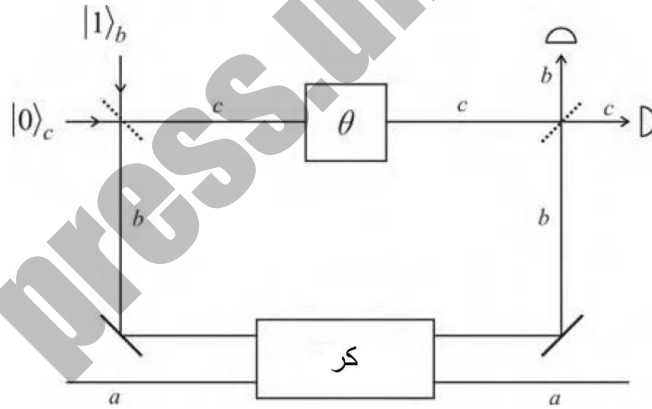
اثر آن روی یک حالت همدوس به‌صورت زیر است:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iKt(\hat{n}^2 - \hat{n})} |\alpha\rangle = e^{-iKt\hat{n}^2} |\alpha e^{iKt}\rangle \quad (۱۴۵-۷)$$

به‌ازای $t = \pi/2K$ داریم:

$$|\psi(\pi/2K)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} (|\beta\rangle + i|\beta\rangle) \quad (۱۴۶-۷)$$

که در آن $\beta = i\alpha$ که به همان شکل ۱۴۳-۷ است، یعنی به‌جز همان ضریب فاز بی‌اهمیت، یک حالت یورک-استولر است. اثر جمله خطی نسبت به $\hat{n}$ صرفاً باعث ایجاد یک دَوَران دامنه حالت همدوس می‌شود.



شکل ۱۶-۷ طرح‌واره‌ای از آزمایش پیشنهادشده برای تولید حالت‌های گره‌شده شرویدینگر؛ یک تک‌فوتون به اولین تقسیم‌کننده پرتو تداخل‌سنج تزریق می‌شود و یک مد خارجی که از طریق برهم‌کنش کر-صلیب به مد داخلی پیوند می‌خورد، ابتدا در یک حالت همدوس است. تقلیل حالت به روش تصویری^۱ با آشکارسازی فوتون در هریک از آشکارسازها رخ می‌دهد.

اکنون به یک روش غیریکانی برای تولید حالت‌های گره‌شده زوج و فرد و همچنین حالت‌های یورک-استولر برای یک میدان اپتیکی که ابتدا در یک حالت همدوس قرار دارد، آن‌طوری که ابتدا توسط گری مورد بحث قرار گرفت [۲۳]، می‌پردازیم. ایده اصلی در پشت این روش اندازه‌گیری تصویری است که در آن می‌توان

1. Projective state

در مورد یک حالت درهم تنیده، یکی از زیرسیستم‌های حالت درهم تنیده را از طریق اندازه‌گیری زیرسیستم دیگر به یک حالت خالص تصویر کرد (پیوست «ب» را ببینید).

در شکل ۷-۱۶ طرح مربوط به آزمایش را آورده‌ایم. اساس این آزمایش عبارت است از یک تداخل سنج ماخ-زندر^۱ که مدهای آن را با b و c نشان داده‌ایم که از طریق یک محیط غیرخطی به یک مد خارجی a پیوند دارد و برهم کنش کر-صلیب را که با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود، محقق می‌کند:

$$\hat{H}_{CK} = \hbar K \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \quad (۱۴۷-۷)$$

که در آن K با پذیرفتاری غیرخطی مرتبه سه $\chi^{(3)}$ متناسب است. عمل محیط در تداخل سنج توسط عملگر یکانی زیر داده می‌شود:

$$\hat{U}_{CK} = \exp(-itK\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b}) \quad (۱۴۸-۷)$$

که در آن t زمان برهم کنش $t = l/v$ و l طول محیط و v سرعت نور در آن محیط است. در باریکه بالای تداخل سنج، یک انتقال فاز θ به وجود می‌آید که توسط عملگر زیر ایجاد می‌شود:

$$\hat{U}_{PS}(\theta) = \exp(i\theta \hat{c}^\dagger \hat{c}) \quad (۱۴۹-۷)$$

انتقال فاز θ را باید تنظیم کرد. تقسیم‌کننده‌های پرتو BS_1 و BS_2 از نوع توصیف شده در معادله ۶-۱۰ هستند. D_1 و D_2 آشکارسازهایی هستند که در باریکه‌های خروجی b و c قرار داده شده‌اند. فرض می‌کنیم که یک حالت همدوس $|\alpha\rangle$ در مد a وجود دارد و یک تک فوتون مطابق شکل ۷-۱۶ به BS_1 تزریق شده است. یعنی حالت ورودی در BS_1 عبارت است از $|10\rangle_{bc} = |0\rangle_b |1\rangle_c$. بلافاصله پس از BS_1 حالت زیر را داریم:

$$|\text{out}\rangle_{BS_1} = |\alpha\rangle_a \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_{bc} + i|01\rangle_{bc}). \quad (۱۵۰-۷)$$

عمل انتقال دهنده فاز و محیط کر-صلیب حالت زیر را می‌دهد:

$$|Kt, \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e^{-iKt}\alpha\rangle_a |10\rangle_{bc} + i e^{i\theta} |\alpha\rangle_a |01\rangle_{bc}) \quad (۱۵۱-۷)$$

که در آن از نماد $|0\rangle_b |1\rangle_c = |01\rangle_{bc}$ استفاده کرده‌ایم. حالت همدوس دوران یافته در جمله اول نتیجه حضور تک فوتون در مد b است. در جمله دوم، فوتون در مد c قرار دارد و بنابراین انتقال فاز θ پیدا می‌کند. حال فرض می‌کنیم $Kt = \pi$. بنابراین داریم:

$$|\pi, \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-\alpha\rangle_a |10\rangle_{bc} + i e^{i\theta} |\alpha\rangle_a |01\rangle_{bc}) \quad (۱۵۲-۷)$$

سپس، مانند معادله ۶-۲۱، BS_2 باعث تبدیلات زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 |10\rangle_{bc} &\xrightarrow{BS_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle_{bc} + i|01\rangle_{bc}) \\
 |01\rangle_{bc} &\xrightarrow{BS_2} \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{bc} + i|10\rangle_{bc})
 \end{aligned}
 \quad (153-7)$$

بنابراین بلافاصله پس از BS_2 حالت زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 |out\rangle_{BS_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|- \alpha\rangle_a (|10\rangle_{bc} + i|01\rangle_{bc}) + ie^{i\theta}|\alpha\rangle_a (|01\rangle_{bc} + i|10\rangle_{bc})] \\
 &= \frac{1}{2}[(-\alpha\rangle_a - e^{i\theta}|\alpha\rangle_a)|10\rangle_{bc} + i(-\alpha\rangle_a + e^{i\theta}|\alpha\rangle_a)|01\rangle_{bc}]
 \end{aligned}
 \quad (154-7)$$

حال انتقال فاز $\theta = \pi$ را انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$|out\rangle_{BS_2} = \frac{1}{2}[(|\alpha\rangle_a + |-\alpha\rangle_a)|10\rangle_{bc} - i(|\alpha\rangle_a - |-\alpha\rangle_a)|01\rangle_{bc}] \quad (155-7)$$

حال اگر آشکارساز D_1 علامت دهد، نشانه این است که یک فوتون از تقسیم‌کننده پرتو در مد b خارج شده و مد a به حالت همدوس زوج $|\alpha\rangle_a + |-\alpha\rangle_a$ تصویر شده است که پس از بهنجارش به شکل معادله ۷-۱۱۵ درمی‌آید. اما اگر آشکارساز D_2 علامت دهد، نشانه این است که یک فوتون از تقسیم‌کننده در مد c خارج شده و بنابراین مد a به حالت همدوس فرد $|\alpha\rangle_a - |-\alpha\rangle_a$ تصویر شده است که پس از بهنجارش به شکل معادله ۷-۱۱۶ درمی‌آید. تقلیل حالت ناپیوسته و بنابراین غیریکانی است، فرایندی که می‌توان از آن به‌عنوان یک روش برای تولید انواع مختلف حالت‌های کوانتومی در سیستم‌های درهم‌تنیده استفاده کرد. توجه کنید که اگر تقلیل حالت را قبل از تقسیم‌کننده پرتو دوم انجام داده بودیم، یعنی وقتی سیستم در حالت ۷-۱۵۲ است، نمی‌توانستیم به حالت‌های همدوس زوج و فرد تصویر کنیم. تقسیم‌کننده پرتو عملاً ابزاری ایجاد می‌کند که اطلاعات در مسیر را درهم بیامیزد و در نتیجه تداخل لازم برای تولید درهم‌تنیدی در اندازه‌گیری را فراهم کند. برعکس، اندازه‌گیری حالت ۷-۱۵۲ اطلاعات درباره مسیر را می‌دهد و در نتیجه تداخلی اتفاق نمی‌افتد. توجه کنید که اگر $\theta = \pi/2$ انتخاب کرده بودیم، اندازه‌گیری‌های تصویری حالت‌های $|\alpha\rangle \pm i|-\alpha\rangle$ را می‌داد که اساساً حالت‌های یورک-استولر هستند. در فصل ۱۰ مسائل مشابهی برای تولید حالت‌های گربه در قالب کاواک QED را تشریح خواهیم کرد.

۷-۷ حالت‌های خلأ فشرده دوامدی

تاکنون در این فصل حالت‌های غیر کلاسیکی یک میدان تک‌مدی را بررسی کردیم. اما برای میدان‌های چندمدی، مادامی که حالت‌های میدان صرفاً حاصل ضرب حالت‌های هریک از مدها نباشند، دورنمای حتی بهتری برای اثرات غیر کلاسیکی به همراه خواهند داشت. به عبارت دیگر، اگر حالت‌های میدان چندمدی درهم‌تنیده داشته باشیم، عموماً می‌توانیم انتظار اثرات غیر کلاسیکی قوی‌تر با غنای بیشتر از آنچه برای یک میدان

تک‌مدی ممکن است، داشته باشیم. در این بخش یک مثال ساده، ولی خیلی مهم حالت خلأ فشرده دو‌مدی را بررسی می‌کنیم.

ابتدا، مشابه با عملگر فشرده تک‌مدی معادله ۷-۱۰، عملگر فشرده دو‌مدی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$\hat{S}_2(\xi) = \exp(\xi^* \hat{a} \hat{b} - \xi \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger) \quad (156-7)$$

که در آن مانند قبل $\xi = re^{i\theta}$ و $\hat{a}$ و $\hat{b}$ عملگرهای دوماه هستند. البته رابطه جابه‌جایی $[\hat{a}, \hat{b}^\dagger] = 0$ و غیره برقرار است. توجه کنید که $\hat{S}_2(\xi)$ به حاصل ضرب عملگرهای فشرده تک‌مدی مانند ۷-۱۰ برای هر مد تجزیه نمی‌شود. حال، حالت خلأ فشرده دو‌مدی را با اثر $\hat{S}_2(\xi)$ روی خلأ دو‌مدی $|0,0\rangle_{ab} = |0\rangle_a |0\rangle_b$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\xi\rangle_2 &= \hat{S}_2(\xi) |0,0\rangle \\ &= \exp(\xi^* \hat{a} \hat{b} - \xi \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger) |0,0\rangle \end{aligned} \quad (157-7)$$

چون $\hat{S}_2$ به صورت حاصل ضرب دو عملگر فشرده تک‌مدی تجزیه نشده است، حالت خلأ فشرده دو‌مدی حاصل ضرب دو حالت فشرده تک‌مدی نیست، بلکه همان‌طوری که نشان می‌دهیم، یک حالت درهم‌تنیده با هم‌بستگی‌های قوی بین دو مد است. توجه کنید که عملگر فشرده دو‌مدی شامل جملاتی است که مد فوتون‌ها را به صورت زوج، خلق یا نابود می‌کند.

معلوم می‌شود که به خاطر هم‌بستگی‌های بین دو مد، فشردگی افت‌وخیزها در تک‌تک مدها وجود ندارد، بلکه در برهم‌نهی دو مد مشاهده می‌شود. عملگرهای برهم‌نهی تربیع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \frac{1}{2^{3/2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger + \hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ \hat{X}_2 &= \frac{1}{2^{3/2}i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger + \hat{b} - \hat{b}^\dagger) \end{aligned} \quad (158-7)$$

این عملگرها در همان روابط جابه‌جایی عملگرهای تک‌مدی، $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$ ، صدق می‌کنند و از این رو اگر شرایط معادله ۷-۳ برقرار باشد، فشردگی در برهم‌نهی تربیع‌ها وجود دارد. اینکه چنین فشردگی‌ای غیر کلاسیکی است را می‌توان با نوشتن مشابه دو‌مدی معادلات ۷-۴ و ۷-۵ با استفاده از تابع P دو‌مدی، $P(\alpha, \beta)$ ، نشان داد. برای اینکه فشردگی وجود داشته باشد، باید $P(\alpha, \beta)$ نامثبت یا در ناحیه‌ای از فضای فاز تکیه باشد. از جزئیات در اینجا صرف نظر می‌کنیم.

برای بررسی خواص فشردگی این حالت، ابتدا از لم بکر-هاسدورف استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \hat{S}_2^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}_2(\xi) &= \hat{a} \cosh r - e^{i\theta} \hat{b}^\dagger \sinh r \\ \hat{S}_2^\dagger(\xi) \hat{b} \hat{S}_2(\xi) &= \hat{b} \cosh r - e^{i\theta} \hat{a}^\dagger \sinh r \end{aligned} \quad (159-7)$$

با استفاده از این نتایج می‌توان نشان داد که برای حالت خلأ دوفوتونی داریم:

$$\langle \hat{X}_1 \rangle = 0 = \langle \hat{X}_2 \rangle \quad (۱۶۰-۷)$$

و

$$\langle (\hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r - 2 \sin r \cosh r \cos \theta] \quad (۱۶۱-۷)$$

$$\langle (\hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} [\cosh^2 r + \sinh^2 r + 2 \sin r \cosh r \cos \theta]$$

به ازای $\theta = 0$ داریم:

$$\langle (\hat{X}_1)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{-2r} \langle (\hat{X}_2)^2 \rangle = \frac{1}{4} e^{2r} \quad (۱۶۲-۷)$$

نتایج حاصل در ۱۶۲-۷ از نظر ریاضی با مورد حالت خلأ فشرده تک‌مدی یکسان است، ولی در اینجا تعبیر بر حسب برهم‌نهی دو مد است.

حال می‌خواهیم حالت $|\xi\rangle_2$ را به صورت حاصل ضرب حالت‌های عددی دومدی، $|n, m\rangle$ ، $|n\rangle_a \otimes |m\rangle_b \equiv |n, m\rangle$ تجزیه کنیم. مشابه روش قبل، با رابطه زیر شروع می‌کنیم:

$$\hat{a}|0,0\rangle = 0 \quad (۱۶۳-۷)$$

با استفاده از

$$\hat{S}_2(\xi) \hat{a} \hat{S}_2^\dagger(\xi) = \hat{a} \cosh r + e^{i\theta} \hat{b}^\dagger \sinh r \quad (۱۶۴-۷)$$

داریم:

$$\begin{aligned} \hat{S}_2(\xi) \hat{a} \hat{S}_2^\dagger(\xi) \hat{S}_2(\xi) |0,0\rangle \\ = (\mu \hat{a} + \nu \hat{b}^\dagger) |\xi\rangle_2 = 0 \end{aligned} \quad (۱۶۵-۷)$$

که در آن $\mu = \cosh r$ و $\nu = e^{i\theta} \sinh r$ با بسط $|\xi\rangle_2$ به صورت

$$|\xi\rangle_2 = \sum_{n,m} C_{n,m} |n, m\rangle \quad (۱۶۶-۷)$$

مسئله ویژه‌مقداری به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{n,m} C_{n,m} [\mu \sqrt{n} |n-1, m\rangle + \nu \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle] = 0 \quad (۱۶۷-۷)$$

از میان تمام جواب‌های ممکن تنها جوابی را می‌خواهیم که شامل حالت خلأ دومدی $|0,0\rangle$ باشد. این جواب به شکل زیر است:

$$C_{n,m} = C_{0,0} \left(-\frac{\nu}{\mu}\right)^n \delta_{n,m} = C_{0,0} (-1)^n e^{in\theta} \tanh^n r \delta_{n,m} \quad (۱۶۸-۷)$$

که در آن C_{00} از شرط بهنجارش به دست می آید که برابر است با $C_{00} = (\cosh r)^{-1}$. بنابراین حالت های خلأ فشرده دومی بر حسب حالت های عددی عبارت اند از

$$|\xi\rangle_2 = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{in\theta} (\tanh r)^n |n, m\rangle \quad (169-7)$$

علاوه بر این واقعیت آشکار که این حالت ها درهم تنیده هستند، شاید مهم ترین جنبه آن ها این است که به طور آشکاری هم بستگی های قوی بین دو مد وجود دارد: تنها زوج حالت های $|n, n\rangle$ در برهم نهی ۷-۱۶۹ وجود دارد. این نکته یکی از دلایلی است که چرا این حالت ها را «باریکه های دوقلو» می نامند. یک راه دیگر برای بیان این حقیقت این است که حالت $|\xi\rangle_2$ ویژه حالت عملگر اختلاف عددی $\hat{n}_a - \hat{n}_b$ با ویژه مقدار صفر نیز هست:

$$(\hat{n}_a - \hat{n}_b)|\xi\rangle_2 = 0 \quad (170-7)$$

که در آن $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ و $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$. به خاطر هم بستگی ها و تقارن بین دو مد، میانگین عدد فوتونی در دو مد با هم برابر است و می توان به سادگی نشان داد که

$$\langle \hat{n}_a \rangle = \langle \hat{n}_b \rangle = \sinh^2 r \quad (171-7)$$

که همان عبارت برای خلأ فشرده تک مدی [معادله ۷-۲۶ با $\alpha = 0$] است. واریانس های عملگرهای عددی عبارت اند از

$$\langle (\Delta \hat{n}_a)^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{n}_b)^2 \rangle = \sinh^2 r \cosh^2 r = \frac{1}{4} \sinh^2(2r) \quad (172-7)$$

بدیهی است که $\langle \hat{n}_i \rangle > \langle (\Delta \hat{n}_i) \rangle$ و $i = a, b$ در نتیجه هر دو مد دارای آمار فوتونی ابرپواسونی هستند. برای اینکه هم بستگی کوانتومی بین دو مد را به طور کمی بیان کنیم، باید عملگرهایی را که روی هر دو سیستم عمل می کنند، بررسی کنیم. در اینجا عملگرهای ترکیبی عدد فوتونی $\hat{n}_a \pm \hat{n}_b$ را در نظر می گیریم و واریانس های مربوط را بررسی می کنیم.

$$\langle [\Delta(\hat{n}_a \pm \hat{n}_b)]^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{n}_a)^2 \rangle + \langle (\Delta \hat{n}_b)^2 \rangle \pm 2 \text{cov}(\hat{n}_a, \hat{n}_b) \langle [\Delta(\hat{n}_a \pm \hat{n}_b)]^2 \rangle \quad (173-7)$$

که در آن کواریانس عدد های فوتونی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{cov}(\hat{n}_a, \hat{n}_b) \equiv \langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle - \langle \hat{n}_a \rangle \langle \hat{n}_b \rangle \quad (174-7)$$

برای حالت هایی که هیچ گونه هم بستگی بین مدی ندارند، مقدار چشمداشتی حاصل ضرب عملگرهای عدد فوتونی به صورت $\langle \hat{n}_a \hat{n}_b \rangle = \langle \hat{n}_a \rangle \langle \hat{n}_b \rangle$ هستند و کواریانس برابر صفر خواهد بود. اما برای حالت های خلأ فشرده دومی، با توجه به معادله ۷-۱۷۰ می دانیم که واریانس عملگر اختلاف عددی $\hat{n}_a - \hat{n}_b$ باید صفر باشد.

$$\langle [\Delta(\hat{n}_a - \hat{n}_b)]^2 \rangle = 0 \quad (175-7)$$

از معادلات ۱۷۲-۷ و ۱۷۳-۷ نتیجه می‌شود:

$$\text{cov}(\hat{n}_a, \hat{n}_b) = \frac{1}{4} \sinh^2(2r) \quad (۱۷۶-۷)$$

بنابراین ضریب هم‌بستگی خطی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(\hat{n}_a, \hat{n}_b) = \frac{\text{cov}(\hat{n}_a, \hat{n}_b)}{\langle (\Delta \hat{n}_a)^2 \rangle^{1/2} \langle (\Delta \hat{n}_b)^2 \rangle^{1/2}} \quad (۱۷۷-۷)$$

با توجه به معادلات ۱۷۲-۷ و ۱۷۶-۷ مقدار زیر را می‌گیرد:

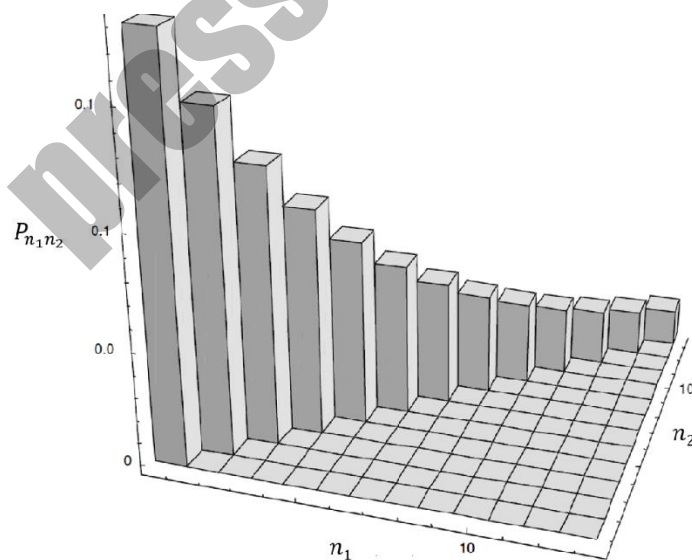
$$J(\hat{n}_a, \hat{n}_b) = 1 \quad (۱۷۸-۷)$$

که ماکزیمم مقداری است که نشان‌دهنده هم‌بستگی‌های قوی بین مدی است.

از معادله ۱۶۹-۷ می‌توان احتمال مشترک برای یافتن n_1 فوتون در مد a و n_2 فوتون در مد b ، $P_{n_1 n_2}$ را به دست آورد:

$$\begin{aligned} P_{n_1 n_2} &= |\langle n_1, n_2 | \xi \rangle|^2 \\ &= (\cosh r)^{-2} (\tanh r)^{2n} \delta_{n_1, n} \delta_{n_2, n} \end{aligned} \quad (۱۷۹-۷)$$

اگر $P_{n_1 n_2}$ را نسبت به n_1 و n_2 مطابق شکل ۱۷-۷، رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که احتمال مشترک، یک تابع یک‌نواهی کاهشی در امتداد قطر $n_1 = n_2$ است.



شکل ۱۷-۷ نسبت به n_1 و n_2 برای دو حالت خلأ فشرده دومی به ازای $r = 2$

برای اینکه خواص تک تک مدهای منفرد را بررسی کنیم، عملگر چگالی برای حالت $|\xi\rangle_2$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\hat{\rho}_{ab} = |\xi\rangle_2 \langle \xi| \quad (۷-۱۸۰)$$

عملگرهای چگالی کاهش یافته برای هریک از مدها به سادگی به دست می آید (به پیوست «ا» مراجعه کنید).

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_a &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\cosh r)^2} (\tanh r)^{2n} |n\rangle_a \langle n| \\ \hat{\rho}_b &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\cosh r)^2} (\tanh r)^{2n} |n\rangle_b \langle n| \end{aligned} \quad (۷-۱۸۱)$$

در هر دو مورد احتمال یافتن n فوتون در مد a یا b برابر است با

$$P_n^{(i)} = \langle n | \hat{\rho}_i | n \rangle_i = \frac{(\tanh r)^{2n}}{(\cosh r)^2} \quad (i = a, b) \quad (۷-۱۸۲)$$

از معادله ۷-۱۷۱ می توان نوشت:

$$P_n^{(i)} = \frac{\langle \hat{n}_i \rangle^n}{(1 + \langle \hat{n}_i \rangle^{n+1})} \quad (۷-۱۸۳)$$

که یک توزیع گرمایی با میانگین عدد فوتون $\sinh^2 r = \langle \hat{n}_i \rangle$ است. به عبارت دیگر، میدان تابشی در یکی از مدها که از نادیده گرفتن مد دیگر از خلا فشرده دو مودی حاصل می شود (یعنی روی آن اندازه گیری انجام نشود)، با تابش حاصل از یک چشمه گرمایی غیر قابل تشخیص است [۲۴]. دمای مؤثر این «چشمه» را می توان با جایگزین کردن $\bar{n}$ با $\langle \hat{n}_i \rangle$ از معادله ۲-۱۴۱ به دست آورد.

$$T_{eff} = \frac{\hbar \omega_i}{2k_B \ln(\coth r)} \quad (۷-۱۸۴)$$

که در آن ω_i بسامد مد است.

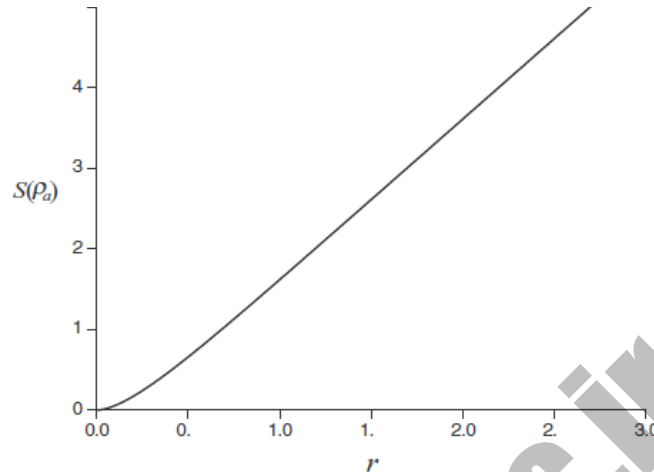
حتماً توجه می کنید که بسط ۷-۱۶۹ از قبل به صورت یک تجزیه اشemit^۱ است که در اینجا شامل بی نهایت جمله است. به علاوه، عملگرهای چگالی کاهش یافته هر دو مد را که با یکدیگر یکسان باشند، قبلاً داشتیم. بنابراین می توان با استفاده از نتایج پیوست «ا» آنتروپی فون نویمان^۲ را که سنجی برای درجه درهم تنیدگی است، به دست آوریم.

$$S(\hat{\rho}_a) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\tanh^{2n} r}{\cosh^{2n} r} \right] \ln \left[\frac{\tanh^{2n} r}{\cosh^{2n} r} \right] = S(\hat{\rho}_b) \quad (۷-۱۸۵)$$

در شکل ۷-۱۸ آنتروپی فون نویمان را نسبت به پارامتر فشرده گی r رسم کرده ایم. به وضوح، درجه درهم تنیدگی با افزایش r افزایش می یابد.

1. Schmidt

2. von Neumann



شکل ۷-۱۸ نمودار آنتروپی فون نویمن، $S(\rho_a)$ ، نسبت به پارامتر فشردگی r

این حالت خلأ فشرده دومدی را مانند حالت خلأ فشرده تک مدی، می توان توسط یک محیط غیر خطی رانده شده پارامتری به دست آورد. شکل هامیلتونی برای این مورد که تمام مدهای آن کوانتیده باشند، عبارت است از

$$\hat{H} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar\omega_p \hat{c}^\dagger \hat{c} + i\hbar\chi^{(2)}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \hat{c}) \quad (7-186)$$

که در آن مد c میدان پمپ را شامل شده است. در اینجا نیز فرض می کنیم این میدان پمپ یک حالت همدوس $|\gamma e^{-i\omega_p t}\rangle$ قوی و مداوم است؛ در این صورت، تقریب پارامتری معادله ۷-۱۸۶ به صورت زیر است:

$$\hat{H}^{(PA)} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + i\hbar(\eta^* e^{i\omega_p t} \hat{a}\hat{b} - \eta e^{-i\omega_p t} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger) \quad (7-187)$$

که در آن $\eta = \chi^{(2)}\gamma$. با رفتن به تصویر برهم کنش، هامیلتونی وابسته به زمان زیر را به دست می آوریم:

$$\hat{H}_I = i\hbar[\eta^* e^{i(\omega_p - \omega_a - \omega_b)t} \hat{a}\hat{b} - \eta e^{-i(\omega_p - \omega_a - \omega_b)t} \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger] \quad (7-188)$$

وقتی بسامد میدان پمپ شده طوری تنظیم شود که $\omega_p = \omega_a + \omega_b$ باشد، هامیلتونی برهم کنش مستقل از زمان زیر را به دست می آوریم:

$$\hat{H}_I = i\hbar[\eta^* \hat{a}\hat{b} - \eta \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger] \quad (7-189)$$

این هامیلتونی فرایند فروافتی پارامتری غیر تبه‌گن^۱ را توصیف می کند که طی آن یک فوتون میدان پمپ شده به دو فوتون تبدیل می شود که یکی در مد a و دیگری در مد b است. بدیهی است که عملگر تحوّل وابسته به آن

1. Nondegenerate parametric down-conversion

عبارت است از

$$\hat{U}_I(t, 0) = \exp[-i\hat{H}_I t/\hbar] = \hat{S}_2(\xi) \quad (۷-۱۹۰)$$

که در آن $\xi = \eta t$.

حالت‌های تولیدشده توسط فرایند فروافتی (حالت‌های خلأ فشرده دوّمُدی) درهم تنیده هستند و از این رو، خیلی مورد بحث قرار گرفته و حتی برای تست‌های بنیادی مکانیک کوانتومی که به بعضی از جنبه‌های آن در فصل ۹ اشاره خواهیم کرد، استفاده شده‌اند. این حالت‌ها در ارتباط با کاربردهای متعددی از فرایندهای اطلاعات کوانتومی، به خصوص در ارتباط با دوربری کوانتومی نیز بررسی شده‌اند [۲۵]

۷-۸ فشرده‌گی مرتبه‌های بالاتر

تاکنون به هیچ وجه همه ملاک‌های ممکن را که با آن بتوان یک حالت را غیر کلاسیکی دانست، ارائه نداده‌ایم. ممکن است حالت‌هایی داشته باشیم که فشرده‌گی تربیع از خود بروز دهند، ولی فشرده‌گی عددی نداشته باشند و برعکس. حتی ممکن است حالت‌های غیر کلاسیکی داشته باشیم که نه فشرده‌گی تربیع و نه فشرده‌گی عددی باشند. در اینجا می‌خواهیم یک نوع فشرده‌گی مرتبه بالاتر را معرفی کنیم، به خصوص آنچه توسط هونگ و مندل [۲۶] معرفی شد. سایر انواع به عنوان تمرین در مسائل آخر فصل آورده شده‌اند. فشرده‌گی مرتبه بالای هونگ-مندل، همان فشرده‌گی گشتاورهای مرتبه بالاتر عملگر تربیع است. با قرار دادن

$$\hat{X}(\vartheta) = \frac{1}{2}(\hat{a}e^{-i\vartheta} + \hat{a}^\dagger e^{i\vartheta}) \quad (۷-۱۹۱)$$

به عنوان تربیع عملگر عام، یک میدان را فشرده تا مرتبه N گوئیم چنانچه به ازای یک زاویه ϑ داشته باشیم $\langle (\Delta\hat{X})^N \rangle < \langle (\Delta\hat{X})^N \rangle_{coh}$ که طرف راست نامساوی برای یک حالت همدوس محاسبه شده است. این تعریف، تعمیم شرطی است که برای فشرده‌گی تربیع مرتبه دوم، $\langle (\Delta\hat{X})^2 \rangle_{coh} = \frac{1}{4}$ ، داشتیم. اما با وجودی که شرط اخیر را می‌توان به صورت $\langle (\Delta\hat{X})^2 \rangle < 0$ نوشت، ولی نمی‌توان $\langle (\Delta\hat{X})^N \rangle < 0$ را به عنوان شرط برای فشرده‌گی مرتبه N ام نوشت. رابطه بین گشتاورهای $\langle (\Delta\hat{X})^N \rangle$ و گشتاورهای مرتب شده نرمال $\langle (\Delta\hat{X})^N \rangle$ برای مورد $N > 2$ بسیار پیچیده تر است. برای به دست آوردن این رابطه از قضیه بیکر-هاسلدورف-کمپل استفاده می‌کنیم. برای دو عملگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ که ممکن است جابه‌جاپذیر نباشند، یعنی $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ ، ولی $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0 = [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]$ باشد، داریم:

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = \exp\left(-\frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}]\right) e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} \quad (۷-۱۹۲)$$

با این فرمول می‌توان نشان داد:

$$\exp(y\Delta\hat{X}) =: \exp(y\Delta\hat{X}): \exp(y^2/8) \quad (۷-۱۹۳)$$

که در آن γ یک پارامتر عددی است. با گرفتن مقدار چشمداشتی از طرفین رابطه بالا و بسط تیلور، با مساوی قرار دادن توان‌های یکسان γ در طرفین معادله داریم:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{X})^N \rangle &= \langle : (\Delta \hat{X})^N : \rangle + \frac{N^{(2)}}{1!} \left(\frac{1}{8} \right) \langle : (\Delta \hat{X})^{N-2} : \rangle \\ &+ \frac{N^{(4)}}{2!} \left(\frac{1}{8} \right)^2 \langle : (\Delta \hat{X})^{N-4} : \rangle + \dots \\ &\dots + \begin{cases} (N-1)!! \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}N - \frac{3}{2}}, & N \text{ even,} \\ \frac{N!}{3!2^{\frac{1}{2}N - \frac{3}{2}}} \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}N - \frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}N - \frac{3}{2} \right)!} \langle : (\Delta \hat{X})^3 : \rangle, & N \text{ odd,} \end{cases} \end{aligned} \quad (194-7)$$

که در آن $N^{(r)} = N(N-1)\dots(N-r+1)$. برای یک حالت هم‌دوس تمام گشتاورهای مرتب‌شده نرمال صفر می‌شوند: $\langle : (\Delta \hat{X})^N : \rangle = 0$. بنابراین در مورد N های فرد، $l = 0, 1, 2, \dots, N = 2l + 1$ به‌دست می‌آوریم $\langle (\Delta \hat{X})^{2l+1} \rangle_{\text{coh}} = 0$. چون گشتاورها نمی‌توانند منفی باشند، هیچ فشردگی مرتبه بالا در گشتاورهای فرد عملگر تربیع وجود ندارد. از طرف دیگر، برای N های زوج، $N=2l$ داریم:

$$\langle (\Delta \hat{X})^{2l} \rangle_{\text{coh}} = (2l-1)!! \left(\frac{1}{4} \right)^l \quad (195-7)$$

بنابراین می‌توان گفت حالت میدان تا مرتبه $2l$ فشرده است هرگاه داشته باشیم:

$$\langle (\Delta \hat{X})^{2l} \rangle_{\text{coh}} < (2l-1)!! \left(\frac{1}{4} \right)^l \quad (196-7)$$

فشردگی تا مرتبه دوم وجود دارد اگر

$$\langle : (\Delta \hat{X})^2 : \rangle < 0 \quad (197-7)$$

باشد و تا مرتبه چهارم اگر

$$\langle : (\Delta \hat{X})^4 : \rangle + \frac{3}{2} \langle : (\Delta \hat{X})^2 : \rangle < 0 \quad (198-7)$$

و همین‌طور تا مرتبه ششم فشرده است اگر

$$\langle : (\Delta \hat{X})^6 : \rangle + \frac{15}{4} \langle : (\Delta \hat{X})^4 : \rangle + \frac{45}{16} \langle : (\Delta \hat{X})^2 : \rangle < 0 \quad (199-7)$$

و مانند آن. این امکان وجود دارد که حتی وقتی $\langle : (\Delta \hat{X})^N : \rangle$ بالاتر از $N = 2$ به‌خاطر غلبه جمله مرتبه دوم سری $\langle : (\Delta \hat{X})^2 : \rangle$ منفی نباشد، معادله ۱۹۶-۷ برقرار بماند: در چنین موردی تنها فشردگی مرتبه دوم ذاتی وجود دارد.

به عنوان تعمیم پارامتر معرفی شده در معادله ۷-۸، برای مشخص کردن یک فشردگی مرتبه دوم، فشردگی مرتبه N را می توان با پارامتر زیر مشخص کرد:

$$s_N(\theta) = \frac{\langle (\Delta \hat{X})^N \rangle - (N-1)!! (0.25)^{N/2}}{(N-1)!! (0.25)^{N/2}} \quad (۷-۲۰۰)$$

مثال های مشخصی از حالت هایی که دارای فشردگی مرتبه بالا هستند، در بخش مسائل آمده اند.

۷-۹ نور فشردۀ پهن باند^۱

در بحث نور غیر کلاسیک، تا اینجا خود را به میدان تک مدی یا یک میدان دومتدی با بسامدهای کاملاً جدا از یکدیگر محدود کردیم. البته این وضعیت ها بسیار ایدئال هستند که به طور تجربی نمی توان به سادگی آنها را محقق کرد. در یک روش واقع بینانه، حضور سایر مدهای بسامدی که نزدیک به بسامد مورد نظر یا آنهایی که در پهنای نواری که آشکارسازها نسبت به آن حساس هستند، باید در نظر گرفته شود. برای اینکه درکی از آنچه اتفاق می افتد پیدا کنیم، نور فشردۀ پهن باند را به اختصار توضیح می دهیم.

برای اینکه تاحد ممکن روشن تر شود، فرض می کنیم تمام مدها دارای قطبش یکسان باشند و در نتیجه میدان ها را اسکالر در نظر می گیریم. به علاوه، فرض می کنیم یک بسامد مانند ω_0 بسامد میانی در یک میدان شبه تک رنگ قرار داشته باشد. قسمت بسامد مثبت میدان از معادله ۲-۱۲۵ توسط عملگر نابودی جمعی زیر داده می شود:

$$\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{[\mathbf{k}]} l(\omega_k) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \quad (۷-۲۰۱)$$

که در آن $l(\omega_k) = i(\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2}$ و $[\mathbf{k}]$ معرف مجموعه مدهای موج تخت مورد نظر است. البته عملگر نابودی جمعی عبارت است از $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [\hat{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^\dagger$. این عملگرها در رابطه جابه جایی با زمان یکسان زیر صدق می کنند:

$$[\hat{E}^{(+)}(t), \hat{E}^{(-)}(t)] = \sum_{[\mathbf{k}]} |l(\omega_k)|^2 \equiv C \quad (۷-۲۰۲)$$

که برای سادگی بردار، مکان را وارد نکرده ایم. اکنون می توان دو عملگر تربیع جمعی به صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned} \hat{X}_1^{(c)}(t) &= \frac{1}{2} [\hat{E}^{(+)}(t) + \hat{E}^{(-)}(t)] \\ \hat{X}_2^{(c)}(t) &= \frac{1}{2i} [\hat{E}^{(+)}(t) - \hat{E}^{(-)}(t)] \end{aligned} \quad (۷-۲۰۳)$$

1. broadband

که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$[\hat{X}_1^{(c)}, \hat{X}_2^{(c)}] = \frac{i}{2}C \quad (204-7)$$

و از آن نتیجه می‌شود:

$$\langle (\Delta \hat{X}_1^{(c)})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2^{(c)})^2 \rangle \geq \frac{1}{16}|C|^2 \quad (205-7)$$

در این صورت، فشردگی پهن‌بند وقتی وجود دارد که داشته باشیم:

$$\langle (\Delta \hat{X}_i^{(c)})^2 \rangle < \frac{1}{4}|C| \quad i = 1 \text{ و } 2 \quad (206-7)$$

شکل‌های دیگری برای فشردگی مرتبه بالا برای میدان‌های تک‌مدی و دومدی پیشنهاد شده‌اند که به بعضی از آن‌ها در مسائل آخر فصل اشاره شده است.

مسائل

- ۱- تحول زمانی بسته موج‌های وابسته به حالت خلأ فشرده و حالت فشرده کلی‌تر را بررسی کنید. نمودار این بسته موج‌ها را در زمان‌های مختلف نشان دهید (در واقع، باید توزیع احتمال روی پتانسیل نوسانگر هماهنگ را در نظر بگیرید). نشان دهید حالت خلأ فشرده یک «تپنده» است، یعنی مرکز آن ساکن و پهنای آن با دو برابر بسامد پتانسیل هماهنگ ساده نوسان می‌کند.
- ۲- مراحل به دست آوردن خلأ فشرده تابع ویگنر، (معادله ۷-۸۳)، را به دست آورید.
- ۳- تابع ویگنر برای خلأ فشرده جابه‌جاشده را به دست آورید.
- ۴- یک حالت فشرده عام در معادله ۷-۲۲ را به عنوان یک حالت خلأ فشرده جابه‌جاشده تعریف کردیم، یعنی حالتی که براثر عملگر $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)$ روی حالت خلأ تولید می‌شود. حال، حالتی را در نظر بگیرید که از اثر $\hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)$ روی خلأ، حالت همدوس فشرده، تولید می‌شود. مسئله ویژه مقدار مورد نظر را پیدا و آن را از طریق رابطه بازگشتی حل کنید. خواص این حالت، به عنوان مثال آمار فوتونی و فشردگی تربیع و عددی را بررسی کنید. ارتباط این حالت با خلأ فشرده جابه‌جاشده چگونه است؟
- ۵- اثر یک عملگر نابودی روی یک حالت همدوس تأثیری در آن ندارد، یعنی $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. حال، اثر عملگر خلق روی حالت همدوس، $\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle$ ، چگونه است؟ حالت بهنجار شده را به دست آورید و خواص آن را توضیح دهید. آیا این حالت یک حالت غیر کلاسیک است؟
- ۶- این سؤال را که آیا فشردگی (در تربیع یا تعداد) در دینامیک مدل جینز-کامینگز رخ می‌دهد (به صورت عددی) بررسی کنید. فرض کنید اتم همواره ابتدا در حالت برانگیخته و میدان ابتدا در یک حالت همدوس قرار داشته باشد. اثرات افزایش میانگین عدد فوتونی از $\bar{n} = 5$ به $\bar{n} = 100$ را بررسی کنید.

۷- دینامیک مدل جینز- کامینگز را وقتی حالت اولیه همدوس میدان را با حالت فشرده ۷-۸۰ جایگزین کنیم، بررسی کنید. موارد حدی را که در آن‌ها $r \rightarrow 0$ (حالت همدوس) و $\alpha \rightarrow 0$ است [حالت خلأ فشرده ۶۸-۷] بررسی کنید.

- ۸- برهم کنش کِر را که توسط معادله ۷-۴۴ توصیف می‌شود، در نظر بگیرید.
 ا. معادله هاینبرگ برای عملگر نابودی را به دست آورید و آن را حل کنید.
 ب. نشان دهید برای حالت اولیه همدوس، آمار شمارش فوتونی همواره پواسونی باقی می‌ماند.
 ج. وقوع فشرده‌گی تربیع را بررسی کنید. می‌دانیم که برای زمان‌های $t = \pi/2k$ ، شرط تولید حالت‌های یورک- استولر این است که همان‌طوری که معادله ۷-۱۳۱ نشان می‌دهد، فشرده‌گی در $\hat{K}_2$ وجود داشته باشد. در مورد زمان‌های کوتاه‌تر دیگر چه می‌توان گفت؟ هر دو تربیع را بررسی کنید.
 ۹- حالت‌های برهم‌نهی $|\alpha\rangle > \pm|\alpha^*\rangle$ را که حالت‌های «حقیقی» و «موهومی» نامیده می‌شوند، در نظر بگیرید. این حالت‌ها را بهنجار و حالت‌های فشرده‌ی تعداد و تربیع را بررسی کنید. تابع ویگنر را برای این حالت‌ها به دست آورید.
 ۱۰- عملگرهای زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{K}_1 = \frac{1}{2}(\hat{a}^{+2} + \hat{a}^2), \quad \hat{K}_2 = \frac{1}{2i}(\hat{a}^{+2} - \hat{a}^2), \quad \hat{K}_3 = \frac{1}{2}(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2})$$

- دو عملگر اول به‌عنوان تربیع‌های مجذور میدان نامیده می‌شوند [۲۷].
 ا. نشان دهید این عملگرها تحت جابه‌جایی، یک مجموعه بسته تشکیل می‌دهند، یعنی جابه‌جاگر دو عملگر، عملگر سوم را به دست می‌دهد.
 ب. حاصل ضرب عدم قطعیت‌های عملگرهای $\hat{K}_1$ و $\hat{K}_2$ را به دست آورید.
 ج. با استفاده از حالت‌های همدوس $|\alpha\rangle$ آیا این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود؟
 د. با در نظر گرفتن فشرده‌گی مجذور میدان‌ها به‌عنوان یک فشرده‌گی مرتبه بالاتر، آیا این یک اثر غیر کلاسیکی است؟
 ه. اگر این یک اثر غیر کلاسیکی است، آیا حالت‌های گره‌ی شرودینگر و یورک- استولر زوج یا فرد با این مفهوم فشرده هستند؟

- ۱۱- این عبارت را که تمام گشتاورهای مرتب‌شده نرمال عملگر تربیع برابر صفرند، توجیه کنید. یعنی اینکه برای $\hat{X}$ هایی که توسط معادله ۷-۱۹۱ داده می‌شوند، $\langle (\Delta \hat{X})^N \rangle = 0$ است.
 ۱۲- رابطه ۷-۱۹۴ را به دست آورید.

- از تابع P تحقیق کنید که تعریف هونگ- مندل از فشرده‌گی مرتبه بالا، یک اثر غیر کلاسیکی است.
 ۱۴- شرایط فشرده‌گی مرتبه بالا در یک میدان پهن‌بند را به دست آورید.
 ۱۵- زوج حالت‌های همدوس $|\eta, q\rangle$ را که ویژه‌حالت‌های هم‌زمان دو عملگر نابودی $\hat{a}\hat{b}$ با ویژه‌مقدار

η (یک عدد مختلط) هستند و عملگر اختلاف عددی $\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}$ با ویژه‌مقدارهای $q = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ را در نظر بگیرید. با فرض $q \geq 0$ مسئله ویژه‌مقداری را حل کنید. سپس خواص این حالت‌ها، به‌خصوص توزیع احتمال فوتونی مشترک، هم‌بستگی‌های بین مدی و فشردگی دو‌مدی را بررسی کنید.

۱۶- نامساوی $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle^2 \geq \langle \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \rangle \langle \hat{b}^{\dagger 2} \hat{b}^2 \rangle$ را در نظر بگیرید. این نامساوی نوعی نامساوی کوشی-شوارتز است [۲۸]. برای یک حاصل ضرب از حالت‌های همدوس به‌سادگی می‌توان نشان داد که تساوی برقرار است. نقض این نامساوی نشان‌دهنده یک هم‌بستگی غیر کلاسیکی قوی است. آیا حالت‌های خلأ فشرده دو‌مدی، این نامساوی را نقض می‌کنند؟ زوج حالت‌های همدوس مسئله ۱۵ چگونه است؟

۱۷- آنتروپی فون‌نویمن را برای زوج حالت‌های همدوس به‌دست آورید. درجه درهم‌تنیدگی با ویژه‌مقدار η و پارامتر q چگونه است؟

۱۸- تداخل سنج ماخ-زندر فصل ۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید یک مد ورودی در حالت همدوس و مد دیگر در یک حالت خلأ فشرده باشد. نشان دهید افت و خیزهای فاز در خروجی، حد استاندارد کوانتومی $(\Delta\varphi_{SQL} = 1/\sqrt{n})$ را به $\Delta\varphi = e^{-r}/\sqrt{n}$ کاهش می‌دهد.

۱۹- در مسئله قبل به‌جای حالت خلأ فشرده، حالت‌های زوج یا فرد همدوس را در نظر بگیرید. آیا این حالت‌ها روی کاهش نوفه در خروجی تداخل سنج تأثیری دارند؟

۲۰- هامیلتونی زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{H} = \hbar\omega_p \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar\omega_c \hat{c}^\dagger \hat{c} + i\hbar\chi^{(2)}(\hat{a}\hat{b}\hat{c}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{c})$$

که مشابه معادله ۷-۱۸۶ است که در آن مد a را به‌عنوان پمپ انتخاب کرده‌ایم. در این وضعیت محیط غیرخطی باعث تبدیل بسامد می‌شود.

ا. با تقریب پارامتری نشان دهید، با شرط $\omega_p = \omega_b - \omega_c$ ، هامیلتونی برهم‌کنش به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\hat{H}_I = -i\hbar[\eta\hat{b}^\dagger\hat{c} - \eta^*\hat{b}\hat{c}^\dagger]$$

ب. با استفاده از عملگر تحوّل

$$\hat{U}_{fc}(t) = \exp(-i\hat{H}_I t/\hbar) = \exp[t(\eta\hat{b}^\dagger\hat{c} - \eta^*\hat{b}\hat{c}^\dagger)]$$

عبارت‌هایی برای $\hat{c}$ و $\hat{b}$ در $t > 0$ به‌دست آورید.

ج. واضح است که با این برهم‌کنش، یک حالت خلأ، یعنی $|0\rangle_c |0\rangle_b$ ، حالت خلأ باقی می‌ماند. حالت $|N\rangle_c |0\rangle_b$ چه تغییری می‌کند؟

راهنمایی- از رابطه $\hat{b} |N\rangle_c |0\rangle_b = 0$ شروع کنید و همان‌طوری که برای تبدیل فروافتی تبهگن انجام شد، یک مسئله ویژه‌مقداری به‌دست آورید. نشان دهید توزیع عدد فوتونی مشترک یک توزیع دوجمله‌ای N فوتون با دو مد است. آیا این یک حالت درهم‌تنیده است؟ آیا هم‌بستگی بین مدی این حالت وجود دارد؟

د. حالت اولیه $|\alpha\rangle_c |\alpha\rangle_b$ را در نظر بگیرید. آیا هم‌بستگی بین مُدی برای این حالت در $t > 0$ وجود دارد؟

مقالات اولیه درباره فشردگی در سیستم‌های اپتیکی عبارت‌اند از:

مراجع

- [1] Oppenheimer, J. R. (1991). as paraphrased by Frieden, B. R. *Probability, Statistical Optics, and Data Testing* (Berlin: Springer), p. 363.
- [2] Hillery, M. (1985). *Phys. Lett. A*, 111, 409
- مقالات اولیه درباره فشردگی در سیستم‌های اپتیکی عبارت‌اند از:
- [3] Early papers on squeezing in optical systems are: Mollow, B. R. and Glauber, R. J. (1967). *Phys. Rev.*, 160, 1076; *Phys. Rev.*, 160 (1967), 1097; Stoler, D. *Phys. Rev. D*, 1 (1970), 3217; Lu, E. C. Y. (1971). *Lett. Nuovo Cimento*, 2, 1241; Yuen, H. P. (1976). *Phys. Rev. A*, 13, 2226.
- [4] Hello, P. (1998). in *Progress in Optics XXXVIII*, Wolf, E. (editor), (Amsterdam: Elsevier), p. 85.
- [5] Caron, B. (1997). *et al.*, *Class. Quantum. Grav.*, 14, 1461.
- [6] See Yamamoto, Y. and Haus, H. A. (1986). *Rev. Mod. Phys.*, 58, 1001, and references therein.
- [7] Slusher, R. E. and Yurke, B. (1990). *IEEE J. Lightwave Tech.*, 8, 466. See also Jacobino, E. Fabre, C. and Leuchs, G. (1989). *Physics World*, 2 (Feb), 31.
- [8] Schleich, W. and Wheeler, J. A. (1987). *Nature*, 326, 574; *J. Opt. Soc. Am. B*, 4 (1987), 1715.
- [9] W. Schleich. (2001). *Quantum Optics in Phase Space* (Berlin: Wiley-VCH); see chapters 7 and 8.
- [10] Hudson, R. L. (1974). *Rep. Math. Phys.*, 6, 249.
- [11] Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear Optics*, 2nd edition (New York: Academic Press).
- [12] Slusher, R. E. W. Hollberg, L. Yurke, B. Mertz, J. C. and Valley, J. F. (1985). *Phys. Rev. Lett.*, 55, 2409.
- [13] Wu, L.-A. Kimble, H. J. Hall J. L. and Wu, H. (1987). *Phys. Rev. Lett.*, 57, 2520.
- [14] G. Breitenbach, G. Mueller, T. Pereira, S. F. Poizat, J.-Ph Schiller, S. and Mlynek, J. (1995). *J. Opt. Soc. Am. B*, 12, 2304.
- [15] Short, R. and Mandel, L. (1983). *Phys. Rev. Lett.*, 51, 384.
- [16] Zou, X. T. and Mandel, L. (1990). *Phys. Rev. A*, 41, 475.
- [17] Carmichael, H. J. and Walls, D. F. (1976). *J. Phys.*, 9B, L43; Cohen-Tannoudji, C. in *Frontiers in Laser Spectroscopy*, edited by Balian, R. Haroche, S. and Liberman, S. (Amsterdam: North Holland, 1977); H. J. Kimble and L. Mandel, *Phys. Rev. A*, 13 (1976), 2123.
- [18] Kimble, H. J. Dagenais, M. and Mandel, L. (1977). *Phys. Rev. Lett.*, 39, 691.
- [۱۹] ترجمه مقاله‌های شرودینگر درباره گره شرودینگر تحت عنوان «پارادکس گره» را که ابتدا در ۱۹۳۵ در مجله *Naturwissenschaften* چاپ شد، در مراجع زیر می‌توان یافت:
- [19] *Quantum Theory of Measurement*. (1983). edited by Wheeler, J. A. and Zurek, W. H. (Princeton: Princeton University Press), pp. 152–167.
- [20] Dodonov, V. V. . Malkin, I. A and Man'ko, V. I. (1974). *Physica*, 72, 597. See also Bužek V., Vidiella-Barranco, A. and Knight, P. L. *Phys. Rev. A*, 45 (1992), 6570; Gerry, C. C., *J. Mod. Opt.*, 40, 1053.
- [21] Yurke, B. and D. Stoler, D. (1986). *Phys. Rev. Lett.*, 57, 13.
- [22] N. Imoto, N. Haus, H. A. and Yamamoto, Y. (1985). *Phys. Rev. A*, 32, 2287; Kitagawa, M. and Yamamoto, Y. *Phys. Rev. A*, 34 (1986), 397.4.
- [23] Gerry, C. C. (1999). *Phys. Rev. A*, 59, 4095.
- [24] Barnett, S. M. and Knight, P. L. (1985). *J. Opt. Soc. Am. B*, 2, 467; B. Yurke, B. and Potasek, M. (1987). *Phys. Rev. A*, 36, 3464 Barnett, ; S. M. and Knight, P. L. (1988). *Phys. Rev. A*, 38, 1657.
- [25] See, for example, Cochrane, P. T. Milburn, G. J. and Munro, W. J. (2000). *Phys. Rev. A*, 62, 307.
- [26] Hong, C. K. and Mandel, L. (1985). *Phys. Rev. Lett.*, 54, 323; *Phys. Rev. A*, 32 (1985), 974.

- [27] Hillery, M. (1987). *Phys. Rev. A*, 36, 3796.
 [28] Loudon, R. (1980). *Rep. Prog. Phys.*, 43, 58.

کتاب‌شناسی

در زیر مجموعه‌ای از مقالات مروری اولیه و اخیر در مورد نور غیر کلاسیکی را ببینید:

- Walls, D. F. Evidence for the quantum nature of light, *Nature*, 280 (1979), 451.
- Walls, D. F. Squeezed states of light, *Nature*, 306 (1983), 141.
- Mandel, L. Non-classical states of the electromagnetic field, *Physica Scripta*, T12 (1985), 34.
- R. W. Henry, R. W. and Glotzer, S. C. A squeezed-state primer, *Am. J. Phys.*, 56 (1988), 318.
- Gong, J. J. and Aravind, P. K. Expansion coefficients of a squeezed coherent state in a number state basis, *Am. J. Phys.*, 58 (1990), 1003.
- Teich, M. C. and B. E. A. Saleh, B. E. A. Tutorial: Squeezed states of light, *Quantum Opt.*, 1 (1989), 153.
- Knight, P. L. Quantum fluctuations in optical systems, lectures in *Les Houches, Session LXIII, 1995, Quantum Fluctuations*, edited by Reynaud, S. Giacobini, E. and Zinn-Justin, J. (Amsterdam: Elsevier, 1997).
- Bužek, V. and Knight, P. L. Quantum interference, superposition states of light, and nonclassical effects, in *Progress in Optics XXXIV*, edited by E. Wolf (Amsterdam: Elsevier, 1995), p. 1.
- Davidovich, L. Sub-Poissonian processes in quantum optics, *Rev. Mod. Phys.*, 68 (1996), 127.
- Klyshko, D. N. The nonclassical light, *Physics-Uspeki*, 39 (1996), 573.
- Gerry, C. C. and Knight, P. L. Quantum superpositions and Schrödinger cat states in quantum optics, *Am. J. Phys.*, 65 (1997), 964.

کتاب زیر که اخیراً چاپ شده است شامل مروری بر جنبه‌های زیادی از حالت‌های غیر کلاسیکی نور، از جمله ارتباط آن‌ها (حداقل برای بعضی حالت‌ها) با گروه‌های لی ساده $SU(2)$ و $SU(1,1)$ است:

- Dodonov, V. V. and Man'ko, V. I. (editors), *Theory of Nonclassical States of Light* (London: Taylor and Francis, 2003).

کتاب زیر به بحث پیرامون تکنیک‌های آزمایشگاهی اپتیک، از جمله تولید نور فشرده اختصاص یافته است:

- Bachor, H.-A. *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Weinheim: Wiley-VCH, 1998).

کاربرد نور فشرده به تداخل‌سنجی در مرجع زیر مورد بحث قرار گرفته است:

- Caves, C. M. Quantum-mechanical noise in an interferometer, *Phys. Rev. D*, 23 (1981), 1693

یک کاربرد اخیر دیگر از نور غیر کلاسیکی در زمینه تصویر برداری کوانتومس است. برای این منظور، مقاله زیر را ببینید:

- Kolobov, M. I. The spatial behavior of nonclassical light, *Rev. Mod. Phys.*, 71 (1999), 539.



برهم کنش های ائتلافی و واهمدوسی

۸-۱ مقدمه

تا اینجا سیستم های بسته که شامل یک تکمد کوانتیده از میدان بودند و با اتم ها برهم کنش داشتند را بررسی کردیم که نمونه ای از آن مدل جینز- کامینگز بود که در فصل ۴ دیدیم. همان طوری که در این مدل دیدیم، دینامیک گذار همدوس و برگشت پذیر است: اتم و مد میدان بدون ائتلاف با یکدیگر انرژی مبادله می کنند. با افزودن مدهای بیشتر برای برهم کنش با اتم، دینامیک همدوسی پیچیده تر می شود؛ زیرا حالت های مربوط اتم- میدان نسبت به یکدیگر هم فاز و خارج از فاز می شوند و پدیده زنش را به وجود می آورند که در نتیجه تعیین احتمال، اشغال حالت کل را مشکل تر می کند. با گذشت زمان، این زنش ها از هم فازی خارج می شوند که به کاهش احتمال اشغال حالت اولیه منجر می گردد. اما پس از مدتی، ویژه فرکانس های زنش مجدداً هم فاز می شوند، به طوری که یادآور احیای جینز- کامینگز که قبلاً مورد بحث قرار گرفت، می شوند و این به احیای جزئی احتمال اولیه منجر می گردد. مقیاس زمانی برای این احیای جزئی به تعداد مدهای میدان الکترومغناطیسی دخیل بستگی دارد و با افزایش این مدها تا یک سطح مناسب برای سیستم باز در فضای آزاد این احیا ناپدید می شود و قانون واپاشی نمایی به عنوان یک تقریب عالی برای آن برقرار می گردد [۱]

قبلاً منشأ گسیل خود به خودی و ضریب A ی اینشتین را با استفاده از نظریه اختلال در فصل ۴ مورد بحث قرار دادیم. برای بسیاری از موارد، آنچه لازم است انجام دهیم تا مسئله واپاشی را در دینامیک اتم های برانگیخته همدوس منظور کنیم این است که یک جمله ائتلافی به جمعیت حالت های بالاتر اضافه کنیم، جمله ای که منعکس کننده افزایش جمعیت حالت های پایین تری باشد که اتم می تواند به آن ها واپاشی کند و امکان یک واپاشی مناسب برای همدوسی ها (یا گشتاورهای دوقطبی) را فراهم آورد. معادلات حاصل، معادلات بلاخ

اپتیکی^۱ نامیده می‌شوند [۲]. این دینامیک اغلب با این قرارداد^۲ که عبارت است از افزودن یک قسمت موهومی به انرژی حالت برانگیخته که معرف طول عمر آن حالت است، تقریب زده می‌شود. در مدل‌های دقیق‌تر، برای بررسی واپاشی گسیل خودبه‌خودی، باید کوانتش خلأ فضای آزاد را که اتم با آن برهم‌کنش دارد، در نظر بگیریم. می‌توان از تصویر شرودینگر چندمدی برای حل این مسئله استفاده کرد که شامل معادلات حرکت جفت‌شده برای اتمی است که ابتدا در حالت برانگیخته است و هیچ فوتونی وجود ندارد و تعداد بی‌نهایت حالت در آن یک حالت برانگیخته در میدان و اتم در حالت پایه‌اش قرار دارد. این معادلات را نمی‌توان به‌طور تحلیلی حل کرد، ولی وقتی پیوند بین اتم و میدان آن‌قدر ضعیف باشد که در محدوده زمان همدوسی تابش موردنظر، تغییرات کوچکی در احتمالات برانگیختگی تولید شود (در واقع این زمان برای خلأ بسیار کوچک است)، قانون واپاشی نمایی به‌دست می‌آید. این اساس نظریه استاندارد گسیل خودبه‌خودی وایسکوف و ویگنر است؛ اگر به‌جای آن از روش ماتریس چگالی استفاده کنیم، این روش، تقریب بورن-مارکوف نامیده می‌شود. تفصیل این مدل‌ها از حوصله این کتاب خارج است و جزئیات آن‌ها را می‌توانید در مراجع آمده در کتاب‌شناسی ببینید.

۸-۲ تحقق‌های منفرد یا آنسامبل‌ها

معمولاً مکانیک کوانتومی به‌عنوان یک نظریه آنسامبلی معرفی شده است، اما ابداع یون‌های در تله‌افزاده که به‌عنوان مثال، امکان انجام عملیات روی تک‌ذرات را فراهم می‌آورد، مشاهده پرش‌های کوانتومی^۳ را امکان‌پذیر می‌کند؛ چیزی که مستقیماً در آنسامبل‌ها دیده نمی‌شود و به این مسائل مفهومی منجر می‌گردد که چگونه تحقق منفرد این سیستم‌ها را توصیف کنیم [۳]. معمولاً از معادلات بلاخ یا معادلات آهنگک ایششتین^۴ برای توصیف تحول زمانی آنسامبل‌هایی از اتم‌ها یا یون‌ها که تحت تأثیر نور قرار دارند، استفاده می‌شود. اخیراً روش‌هایی با استفاده از تحول زمانی شرطی^۵ توسعه یافته‌اند که به‌عنوان مثال وقتی هیچ فوتونی گسیل نشود، برای توصیف تحقق تجربی این سیستم‌های کوانتومی به کار می‌رود. در این روش‌ها به‌جای توصیف سیستم توسط ماتریس‌های چگالی، از توابع موج استفاده می‌شود. این روش شرطی «مسیر کوانتومی» [۴] هم یک توصیف آنسامبلی است، اما برای یک زیر آنسامبل^۶ که می‌دانیم چه موقع فوتون‌ها صادر شده‌اند. پرش‌هایی که در این توصیف رخ می‌دهد را می‌توان به‌عنوان نتیجه‌ای از افزایش اطلاعات ما از سیستمی که توسط تابع موج (یا عملگر چگالی) نمایش داده شده است، در نظر گرفت. در فرمول‌بندی‌ای که ارائه می‌دهیم، معمولاً فرض می‌شود چند اندازه‌گیری تحلیلی سریع و متوالی روی سیستم انجام می‌گیرد؛ به‌عنوان مثال، روی میدان تابشی گسیل‌شده. نتیجه این آزمایش‌ها این خواهد بود که یا یک فوتون در محیط اطراف یافت شود یا هیچ فوتونی دیده نشود. تغییر ناگهانی در اطلاعات ما درباره میدان تابشی (به‌عنوان مثال، از طریق فوتونی که از

1. Optical Bloch
2. ansatz

3. Quantum jump
4. Einstein rate equation

5. Conditional time
6. subensemble

سیستم به محیط صادر شده است) به تغییر ناگهانی تابع موج منجر می‌شود. اما این تنها مشاهده فوتون نیست که به افزایش اطلاعات منجر می‌گردد؛ عدم مشاهده فوتون (یعنی نتیجه صفر) نیز چنین است. بینش‌های جدیدی درباره دینامیک اتمی و فرایندهای اتلافی به دست آمده و روش‌های نظری توانمندی توسعه یافته‌اند. علاوه بر این بینش‌های جدید در مفاهیم فیزیکی، این روش‌ها امکان شبیه‌سازی مسائل پیچیده را ممکن ساخته‌اند، به عنوان مثال، در خنک‌کنندگی لیزری^۱ که به هیچ وجه با روش معادله اصلی^۲ قابل انجام نبود.

مکانیک کوانتومی یک نظریه آماری است که با استفاده از عملگرهای چگالی، پیش‌بینی‌های احتمالی درباره رفتار آنسامبل‌ها (یک مجموعه ایدئال نامحدود از سیستم‌های کوانتومی یکسان) را فراهم می‌آورد. این توصیف برای ۶۰ سال اولیه مکانیک کوانتومی کفایت می‌کرد؛ زیرا عموماً چنین تصویری می‌شد که مشاهده و انجام عملیات روی تک سیستم‌های کوانتومی غیرممکن است. به عنوان مثال، شروودینگر در ۱۹۵۲ چنین نوشت [۵]:

... ما هرگز نمی‌توانیم تنها با یک الکترون یا اتم یا مولکول (کوچک) آزمایش انجام دهیم. در آزمایش‌های تخیلی گاهی چنین فرض می‌کنیم که به نتایج مضحکی منجر می‌شود... همان طوری که نمی‌توان گفت در باغ وحش، موجود افسانه‌ای نیمه آدم نیمه ماهی^۳ پرورش می‌دهیم؛ تجربه با ذرات منفرد هم ممکن نیست.

این دیدگاه (نسبتاً افراطی) توسط دمِلت^۴ با ارائه یک ایده جالب توجه که ابتدا در ۱۹۷۵ [۶] علنی کرد، به چالش کشیده شد. وی مسئله اسپکتروسکوپی با دقت بالا را که وقتی بخواهیم فرکانس گذار یک گذار اپتیکی را با بیشترین دقت ممکن اندازه‌گیری کنیم، مطرح ساخت (که این کار)، به عنوان مثال، با مشاهده تشدید فلورسانس^۵ حاصل از آن گذار به عنوان بخشی از (مثلاً) یک استاندارد فرکانس اپتیکی (انجام می‌شود). اما دقت چنین اندازه‌گیری‌ای اساساً توسط پهنای طیفی گذار مشاهده شده محدود می‌شود. این پهنای طیفی توسط گسیل خودبه‌خودی از تراز بالاتر انجام می‌شود که به عمر محدود تراز بالاتر منجر می‌گردد. در این صورت، محاسبات فوریه، پهنای فوتون‌های صادر شده را از مرتبه $1/\tau$ می‌دهند. از این رو، برای به دست آوردن مقدار دقیق فرکانس گذار، لازم است یک گذار شبه پایدار^۶ را برانگیخته کنیم که در محدوده زمان اندازه‌گیری تنها چند فوتون گسیل کند. از طرف دیگر، مسئله آشکارسازی این چند فوتون مطرح می‌شود؛ زیرا عملاً مشاهده مستقیم آن‌ها غیرممکن است. بدین ترتیب، با یک مسئله غامض مواجه می‌شویم. طرح پیشنهادی دمِلت راه‌حلی برای این مشکل ارائه می‌کند، به شرط اینکه بتوانیم با اتم‌ها یا یون‌های منفرد کار کنیم که با ابداع تله‌های تک‌یونی امکان‌پذیر شده است [۷]. ایده دمِلت را در شکل ساده شده معادله آهنگ آن نشان می‌دهیم. این ایده به شرح زیر است: وی پیشنهاد کرد به جای مشاهده مستقیم فوتون‌های گسیل شده از یک سیستم شبه پایدار دوترازی، از طرح تشکیل دو گانه اپتیکی، مشابه آنچه در شکل ۸-۱ نشان داده شده است، استفاده کنیم.

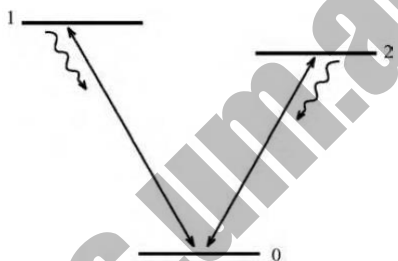
یک لیزر گذار شبه پایدار ۲ $\leftrightarrow$ ۰ را ایجاد می‌کند، در حالی که لیزر قوی دوم گذار ۱ $\leftrightarrow$ ۰ را ایجاد می‌کند؛ طول عمر تراز بالاتر ۱، به عنوان مثال، ۱۰ ns و طول عمر تراز ۲ از مرتبه ۱ s است. اگر حالت اولیه سیستم، حالت

1. Laser cooling
2. Master equation

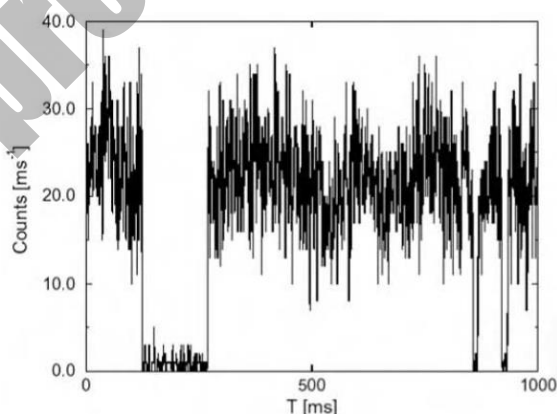
3. ichthyosauria
4. Dehmelt

5. Resonance fluorescence
6. metastable

پایین تر $\bullet$ باشد، لیزر قوی‌تر سیستم را به تراز ۱ که به سرعت واپاشی می‌کند، برانگیخته می‌کند که پس از آن با گسیل یک فوتون پس از زمانی که معمولاً بسیار کوتاه است (از مرتبه طول عمر تراز ۱) با گسیل یک فوتون به حالت اولیه برمی‌گردد. این فرایند آن قدر تکرار می‌شود تا در یک زمان تصادفی لیزر گذار ضعیف باعث برانگیخته کردن سیستم به حالت شبه پایدار ۲ شود که برای مدت طولانی در آن می‌ماند تا اینکه یا با گسیل خودبه‌خودی یا با گسیل القایی ناشی از لیزر، با گذار $2 \leftrightarrow 0$ به حالت پایه برگردد. در مدت زمانی که الکترون در حالت شبه پایدار ۲ می‌ماند، هیچ فوتونی در گذار قوی به وجود نمی‌آید و تنها وقتی الکترون به حالت ۰ برگردد، فلورسانس گذار قوی شروع می‌گردد. بنابراین از قطع و وصل شدن فلورسانس تشدیدی در گذار قوی (که به آسانی قابل مشاهده است) می‌توان گذارهای فوق‌العاده نادر $2 \leftrightarrow 0$ را نتیجه گرفت. بنابراین روشی داریم که پرش‌های کوانتومی نادر (گذار) شبه پایدار $2 \leftrightarrow 0$ را با مشاهده فلورسانس حاصل از گذار قوی $1 \leftrightarrow 0$ ثبت کنیم. یک آزمایش نوعی سیگنال فلورسانس در شکل ۸-۲ نشان داده شده است [۸] که در آن شدت فلورسانس $I(t)$ رسم شده است.



شکل ۸-۲ سیستم V: دو تراز بالاتر ۱ و ۲ به‌طور مشترک به حالت پایه $\bullet$ پیوند دارند. فرکانس‌های گذار آن‌ها اختلاف زیادی دارد، به‌طوری‌که هریک از دو لیزر سیستم را به یکی از گذارها پیوند می‌دهد. فرض می‌شود گذار $1 \leftrightarrow 0$ قوی و گذار $2 \leftrightarrow 0$ ضعیف باشد.



شکل ۸-۲ سیگنال فلورسانس تشدیدی ثبت‌شده از پرش‌های کوانتومی یون Mg که با لیزر برانگیخته شده است [۸]. در فواصل تناوب‌های آهنگ شمارش بالای فوتون، تناوب‌هایی از شمارش با آهنگ قابل‌اغماض وجود دارد (به‌استثنای یک آهنگ شمارش غیرقابل‌اجتناب تاریک).

این طرح تنها وقتی قابل اعمال است که تنها یک سیستم کوانتومی منفرد را مشاهده کنیم؛ زیرا اگر تعداد زیادی از سیستم‌ها را هم‌زمان مشاهده کنیم، طبیعت تصادفی گذارهای بین ۰ و ۱ ایجاب می‌کند که بعضی از سیستم‌ها بتوانند فوتون‌های گذار قوی صادر کنند، درحالی‌که بقیه چون در آن لحظه در حالت شبه‌پایدارشان هستند، نخواهند توانست؛ در این صورت، از مجموعه بزرگی از یون‌ها که به‌طور هم‌زمان مشاهده می‌شوند، یک شدت کم‌ویش ثابتی از فوتون‌ها که در گذار قوی قرار دارند، تابش می‌شود. محاسبه خواص یک سیستم منفرد، نظیر توزیع طول زمان تناوب فلورسانس قوی به تلاش‌هایی نیاز داشت که درنهایت به توسعه روش پرش کوانتومی منجر شد. پیشنهاد دملت علاوه بر جذابیت مفاهیم نظری سیستم‌های کوانتومی منفرد، کاربردهای عملی مهمی دارد. یک مثال پراستناد عبارت است از تحقق یک استاندارد جدید زمان با استفاده از یک اتم منفرد در تله‌افتاده. ایده کلیدی در اینجا این است که از شدت لحظه‌ای یا آمار فوتونی تابش گسیل‌شده در گذار قوی (آمار دوره‌های تناوب روشن و تاریک) برای موازنه با فرکانس لیزر در گذار ضعیف استفاده کنیم. این امر ممکن است؛ زیرا آمار فوتونی تابش قوی به واکوکی لیزر در گذار ضعیف بستگی دارد. بنابراین هر تغییر در آمار تناوب‌های روشن و تاریک نشان‌دهنده این است که فرکانس لیزر ضعیف جابه‌جا شده است و باید تنظیم شود. اما برای لیزرهایی که تابش پیوسته دارند، این انتقال فرکانس به شدت لیزر در گذار قوی نیز بستگی خواهد داشت [۹]. از این رو، در عمل الگوهای پالسی برای استانداردهای فرکانس ترجیح داده می‌شوند [۱۰]. به‌خاطر عدم توانایی تجربه‌گران در نگهداری، انجام عملیات و مشاهده سیستم‌های کوانتومی منفرد (یون‌ها) در زمان پیشنهاد دملت، مفاهیم عملی و نظری این پیشنهاد بلافاصله بررسی نشدند. تقریباً ده سال طول کشید تا این شرایط تغییر کند. در آن زمان، کوک^۱ و کیمبل^۲ مقاله‌ای چاپ کردند [۱۱] که در آن اولین تلاش برای بررسی نظری این وضعیت توصیف‌شده در بالا ارائه شده بود. انگیزه آن‌ها به‌خاطر این واقعیت بود که در آن زمان امکان نگهداری یون‌های منفرد در تله یونی وجود داشت. کوک و کیمبل در شکل ساده‌شده معادلات آهنگ، با این معادلات برای یک سیستم ۳-ترازی تحت تابش ناهمدوس مطابق شکل ۸-۱ شروع کردند، با این فرض که گذار قوی ۱ ↔ ۰ به حالت اشباع برسد (منظور از اشباع این است که جمعیت حالت‌های ۰ و ۱ به‌قدری تحت تأثیر میدان تابشی القایی قرار دارد که با افزایش شدت، هیچ افزایشی در احتمال گذار ایجاد نمی‌شود). در نتیجه معادلات آهنگ را با وارد کردن احتمال‌های P_+ برای اینکه سیستم در حالت شبه‌پایدار و P_- برای احتمال اینکه در حالت فلورسانس قوی گذار ۱ ↔ ۰ باشد، ساده‌سازی کردند. این ساده‌سازی این امکان را فراهم می‌کند که فلورسانس تشدید را به یک فرایند تلگرافی تصادفی دوحالتی تبدیل کنیم. جمعیت اتمی یا در تراز ۰ و ۱ قرار دارد و بنابراین یون به‌طور قوی تابش می‌کند (روشن) یا جمعیت در تراز شبه‌پایدار ۲ است و هیچ‌گونه فلورسانسی مشاهده نمی‌شود (تاریک). آن‌ها سپس توزیع‌های مربوط به طول تناوب‌های روشن و

1. Cook

2. Kimble

تاریک را محاسبه کردند و نتیجه گرفتند که این توزیع‌ها پواسونی است. البته تجزیه و تحلیلی که در اینجا به طور خیلی خلاصه ارائه دادیم، از جهات مختلف ساده‌سازی شده است. مسلماً مهم‌ترین نکته‌ای که کوک و کیمبل فرض کردند، این بود که تابش را ناهمدوس در نظر گرفتند و در نتیجه مدل معادله آهنگ را مورد استفاده قرار دادند. در یک آزمایش واقعی، تابش همدوس لیزر مورد استفاده قرار می‌گیرد. مشکلات حاصل از برانگیختگی همدوسی بالاخره به توسعه روش پرش کوانتومی منجر شد. با وجود این مسائل، کوک و کیمبل نشان دادند که مشاهده مستقیم پرش‌های کوانتومی در فلورسانس یون‌های منفرد امکان‌پذیر است، پیش‌بینی‌ای که کمی بعد در چند آزمایش تأیید شد [۱۲]. در ادامه تلاش فیزیک‌دان‌های زیادی باعث توسعه روش پرش کوانتومی گردید [۱۳].

۸-۳ تحقق انفرادی^۱

روش پرش کوانتومی یک توصیف ساده از فرایندهای واپاشی را فراهم می‌کند که پیچیدگی‌های روش‌های رسمی را ندارد. روش انتخاب‌شده در شبیه‌سازی‌های پرش کوانتومی که نوعی روش مونت کارلو است را می‌توان به صورتی که برای مورد ساده‌ای که در آن فوتون‌ها در یک میدان کاواک تک‌مدی قرار دارند و فوتون‌های میدان جذب دیواره‌های کاواک که در دمای $T = 0\text{ K}$ قرار دارند، خلاصه کرد [۳، ۱۴]. وقتی در ادامه از «گسیل» صحبت می‌کنیم، منظور گسیل از میدان، کاهش فوتون از میدان است و گسیل به‌طور ریاضی با عمل یک عملگر نابودی روی میدان نمایش داده می‌شود. آهنگی که فوتون‌ها از میدان کم می‌شوند (آهنگ گسیل) را با γ نشان می‌دهیم. فرایند پرش به شرح زیر است:

۱- احتمال ΔP برای گسیل یک فوتون در بازه زمانی δt را تعیین کنید. این مقدار مطابق رابطه زیر به آهنگ واپاشی و عدد اشغال فوتون بستگی دارد.

$$\Delta P = \gamma \langle \Psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi \rangle \delta t, \quad (1-8)$$

که در آن $|\Psi\rangle$ عضوی از آنسامبل است.

۲- یک عدد تصادفی r بین صفر و یک انتخاب کنید. آن را با ΔP مقایسه و روی گسیل به شرح زیر تصمیم‌گیری کنید.

۳- اگر $r < \Delta P$ باشد، گسیل انجام می‌شود. بنابراین سیستم به حالت بهنجار زیر پرش می‌کند.

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi_{\text{emit}}\rangle = \frac{\hat{a} |\Psi\rangle}{\langle \Psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \Psi \rangle^{1/2}}, \quad (2-8)$$

که عملگر نابودی عامل کاهش یک فوتون میدان کاواک است که توسط دیواره‌های بیرونی کاواک صادر می‌شود.

۴- یا اگر $r > \Delta P$ باشد، هیچ گسیلی اتفاق نمی‌افتد. بنابراین سیستم به صورت زیر تحول پیدا می‌کند:

1. individual realizations

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle \rightarrow |\Psi_{\text{no emit}}\rangle &= \frac{e^{-i\delta t \hat{H}_{\text{eff}}} |\Psi\rangle}{\left[\langle \Psi | e^{i\delta t \hat{H}_{\text{eff}}} e^{-i\delta t \hat{H}_{\text{eff}}} | \Psi \rangle \right]^{1/2}} \\
 &= \frac{e^{-i\delta t \hat{H}_{\text{eff}}} |\Psi\rangle}{[\langle \Psi | e^{-\delta t \hat{a}^\dagger \hat{a}} | \Psi \rangle]^{1/2}} \\
 &\approx \frac{\{1 - (i/\hbar)\hat{H}\delta t - (\gamma/2)\delta t \hat{a}^\dagger \hat{a}\} |\Psi\rangle}{(1 - \Delta P)^{1/2}}
 \end{aligned} \quad (۳-۸)$$

که تا مرتبه δt معتبر است. هامیلتونی $\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H} - i\hbar(\gamma/2)\hat{a}^\dagger \hat{a}$ غیرهرمیتی است که تحوّل غیریکانی را توصیف می‌کند و جمله دوم معرف کاهش انرژی میدان کاواک است. برای بحث بیشتر از تحوّل بدون پرش به مرجع [۸] مراجعه کنید.

۵- کل این فرایند را تکرار کنید تا یک مسیر منفرد یا تاریخچه‌ای که تحوّل شرطی یک عضو از آنسامبل سیستم واپاشی‌کننده را توصیف می‌کند، به‌دست آورید، مشروط بر آنکه وقایع در زمان‌های $t_1, t_2, \dots$ را ثبت کرده باشید.

۶- مشاهده‌پذیرها را روی تعداد زیادی از این مسیرها میانگین‌گیری کنید تا توصیفی از اینکه آنسامبل به‌طور میانگین چگونه رفتار می‌کند، به‌دست آید، درحالی‌که کلیه تاریخچه‌های ممکن را در نظر گرفته‌اید. برای اینکه مطمئن شوید موارد بالا صحیح هستند، توجه کنید که تاریخچه یک مسیر به‌خصوص در زمان Δt که آن‌قدر کوچک است که حداکثر یک پرش را امکان‌پذیر می‌کند، به دو مسیر تجزیه می‌شود: یا پرش ثبت شده است یا خیر.

$$|\Psi\rangle \rightarrow \begin{cases} |\Psi_{\text{emit}}\rangle & \Delta P, \quad \text{با احتمال} \\ |\Psi_{\text{no emit}}\rangle & 1 - \Delta P. \quad \text{با احتمال} \end{cases} \quad (۴-۸)$$

دراین صورت، برحسب عملگر چگالی وابسته به حالت خالص $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ ، تحوّل در مدت‌زمان کوتاه δt که در آن $|\Psi(t)\rangle \equiv |\Psi(t + \delta t)\rangle$ و $|\Psi(\delta t)\rangle \equiv |\Psi\rangle$ است، مجموع دو خروجی ممکن است.

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle\langle\Psi| &\rightarrow |\Psi(\delta t)\rangle\langle\Psi(\delta t)| \\
 &= \Delta P |\Psi_{\text{emit}}\rangle\langle\Psi_{\text{emit}}| + (1 - \Delta P) |\Psi_{\text{no emit}}\rangle\langle\Psi_{\text{no emit}}| \\
 &= \gamma \delta t \hat{a} |\Psi\rangle\langle\Psi| \hat{a}^\dagger \\
 &\quad + \{1 - (i/\hbar)\hat{H}\delta t - (\gamma/2)\delta t \hat{a}^\dagger \hat{a}\} |\Psi\rangle\langle\Psi| \\
 &\quad \times \{1 + (i/\hbar)\hat{H}\delta t - (\gamma/2)\delta t \hat{a}^\dagger \hat{a}\} \\
 &\approx |\Psi\rangle\langle\Psi| - \frac{i}{\hbar} \delta t [\hat{H}, |\Psi\rangle\langle\Psi|] \\
 &\quad + \frac{\gamma}{2} \delta t \{2\hat{a} |\Psi\rangle\langle\Psi| \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} |\Psi\rangle\langle\Psi| - |\Psi\rangle\langle\Psi| \hat{a}^\dagger \hat{a}\}.
 \end{aligned} \quad (۵-۸)$$

با میانگین‌گیری روی تمام اعضای آنسامبل، برای این تحول زمانی کوچک به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{\rho}(t + \delta t) = \hat{\rho}(t) - \frac{i}{\hbar} \delta t [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} \delta t \{2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\}, \quad (6-8)$$

که در آن $\hat{\rho}(t)$ عملگر چگالی آنسامبل است. این رابطه مشابه تقریب اوایلر برای حل معادله دیفرانسیل معمولی است. درواقع، در حد $\delta t \rightarrow 0$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول برای عملگر چگالی به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} \{2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\}. \quad (7-8)$$

این معادله، معادله اصلی نامیده می‌شود و دقیقاً همان شکلی را دارد که با استفاده از روش‌های پیچیده‌تر برای این مسئله میرایی میدان در دمای صفر ($T = 0 \text{ K}$) به‌دست آمده است.

قبل از ادامه مطلب به مفاهیم پرش‌های کوانتومی در چند حالت کوانتومی میدان می‌پردازیم. فرض می‌کنیم به‌جز اتلاف، هیچ‌گونه برهم‌کنش دیگری رخ ندهد. بنابراین داریم $\hat{H} = 0$. فرض کنید میدان کاواک در یک حالت همدوس $|\Psi\rangle$ آماده‌سازی شده باشد. وقتی پرش کوانتومی اتفاق می‌افتد، یک فوتون توسط میدان گسیل می‌شود؛ دراین‌صورت، چون حالت همدوس یک ویژه‌حالت عملگر نابودی است، $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ، میدان تغییر نمی‌کند و بنابراین حالت همدوس، یک حالت همدوس باقی می‌ماند؛ دراین‌صورت، تحول بدون پرش برای δt کوچک به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{e^{-(\gamma/2)\delta t \hat{a}^\dagger \hat{a}} |\alpha\rangle}{\langle \alpha | e^{-\gamma \delta t \hat{a}^\dagger \hat{a}} | \alpha \rangle} = |\alpha e^{-\gamma \delta t/2}\rangle \quad (8-8)$$

بنابراین به‌نظر می‌رسد که حالت همدوس، حالتی که می‌دانیم یک حالت بسیار کلاسیکی است، باوجود برهم‌کنش اتلافی و اینکه دامنه حالت به‌طور نمایی کاهش می‌یابد، همدوس باقی می‌ماند. ازطرف دیگر، فرض کنید میدان کاواک در یک حالت، به‌عنوان مثال حالت گره زوج،

$$|\psi_e\rangle = \mathcal{N}_e(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle), \quad (9-8)$$

آماده‌سازی شده باشد. وقوع یک پرش کوانتومی دارای اثر زیر است:

$$\hat{a}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) = \alpha(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle).$$

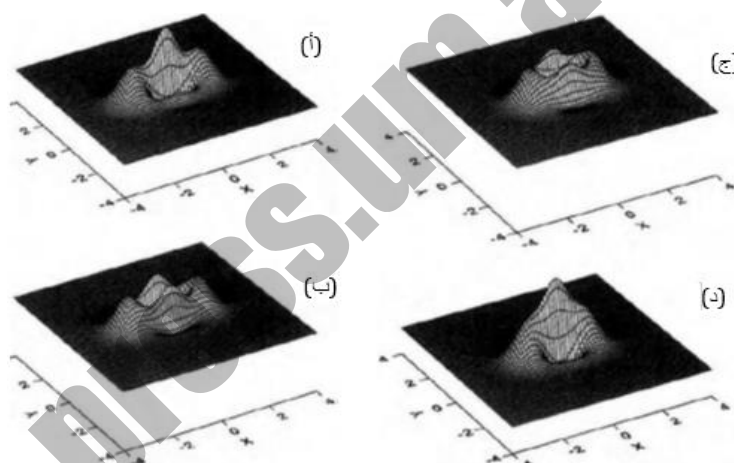
گسیل یک فوتون توسط میدان کاواک، حالت گره زوج را به حالت گره فرد تبدیل می‌کند.

$$|\psi_o\rangle = \mathcal{N}_o(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle). \quad (10-8)$$

گذار ناگهانی حالت گره زوج به حالت گره فرد را گذار «پرش گره» می‌نامند. برای این گذار بدون پرش، حالت میدان به‌صورت زیر واپاشی می‌کند:

$$\exp(-\gamma \delta t \hat{a}^\dagger \hat{a}/2)(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle) = (|\alpha e^{-\gamma \delta t/2}\rangle \pm |-\alpha e^{-\gamma \delta t/2}\rangle), \quad (11-8)$$

که نشان می‌دهد حالت‌های گربه در بازهٔ بدون پرش «منقبض»^۱ می‌شود. پرش بین حالت‌های گربهٔ زوج و فرد در رفتار تابع ویگنر قابل مشاهده است؛ زیرا فرائزهای تداخلی تغییر علامت می‌دهند. این تبدیل از مقایسهٔ شکل ۳-۸ (ا) با ۳-۸ (ب) دیده می‌شود. سپس متعاقباً حالت گربه تحت شرایط «بدون پرش» با انقباض به شکل ۳-۸ (ج) تحول می‌یابد. پس از یک پرش دیگر، فرائزهای تداخلی مانند آنچه در شکل ۳-۸ (د) نشان داده شده است، بار دیگر تغییر علامت می‌دهند. با افزودن توابع ویگنر، حالت‌های گربهٔ زوج و فرد، آن‌طوری که در خلال میانگین‌گیری برای توصیف آنسامبل میدان‌های کاواک اتفاق می‌افتد، اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند و فرائزهای تداخلی به‌طور کامل حذف می‌شوند. پیامد این پرش‌های غیرقابل کنترل، وقتی میانگین آماری گرفته شود، واهمدوسی^۲ برهم‌نهی کوانتومی یک حالت، به مخلوط آماری کلاسیکی است. در بخش ۵-۸ به مسئلهٔ ناهمدوسی خواهیم پرداخت.



شکل ۳-۸ توابع ویگنر برای یک «گربهٔ پرشی»: ا. برای حالت گربه که ابتدا زوج است. ب. گربهٔ فرد که پس از اولین پرش به‌دست آمده است. ج. نشان می‌دهد که تابع ویگنر منقبض می‌شود. د. نتیجهٔ پرش دوم را نشان می‌دهد. توجه کنید که پرش‌ها علامت فرائزهای تداخلی را عوض می‌کنند.

۴-۸ قفسه‌بندی و دینامیک تلگراف در اتم‌های سه‌ترازی

اکنون با جزئیات بیشتر به بررسی اینکه چگونه دینامیک سیستم، آمار پریودهای روشن و تاریک را تعیین می‌کند، می‌پردازیم. بار دیگر یک سیستم سه‌ترازی مطابق شکل ۱-۸ را در نظر بگیرید. به شرط آنکه فرکانس‌های رابی ۱ $\leftrightarrow$ ۰ و ۲ $\leftrightarrow$ ۰ در مقایسه با آهنگ‌های واپاشی کوچک باشند، برای جمعیت در تراز ۱

1 shrink

2. decoherence

که به شدت فلورسنت است، به صورت تابعی از زمان رفتاری مانند شکل ۸-۳ مشاهده می‌شود (در ادامه این فصل، این نکته را دقیق‌تر به دست خواهیم آورد).

قبل از پرداختن به مدل‌های نظری، برای تشریح مسیرهای کوانتومی منفرد (یعنی تحوُّلی که روی یک رشته به خصوص از وقایع مشاهده شده) بهتر است بررسی کنیم چگونه کل آنسامبل تحوُّل پیدا می‌کند. این روش با روند تاریخی مطابقت دارد که در آن ابتدا سعی شد مشخصه‌های پرش کوانتومی در رفتار آنسامبلی یک سیستم را پیدا کنند. این عمل را به تفصیل برای آرایش V- شکل سه تراز (نشان داده شده در شکل ۸-۱) که برای پدیده پرش کوانتومی دِمِلت^۱ مناسب است، انجام می‌دهیم. برای سادگی، مورد برانگیختگی واهمدوس را بررسی می‌کنیم. مطالب مربوط به برانگیختگی همدوس با استفاده از معادلات بلاخ در مرجع [۱۵] آمده است، اما در اینجا معادلات آهنگک اینشتین برای عملگر چگالی اتمی، اثرات کلیدی را نشان می‌دهند [۱۶].

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{11}}{dt} &= -(A_1 + B_1 W_1) \rho_{11} + B_1 W_1 \rho_{00}, \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} &= -(A_2 + B_2 W_2) \rho_{22} + B_2 W_2 \rho_{00}, \\ \frac{d\rho_{00}}{dt} &= -(B_1 W_1 + B_2 W_2) \rho_{00} + (A_1 + B_1 W_1) \rho_{11} + (A_2 + B_2 W_2) \rho_{22},\end{aligned}\quad (12-8)$$

که در آن A_i ، B_i ضرایب A و B اینشتین برای گذارهای خودبه‌خودی و القایی مربوط، W_i چگالی انرژی میدان خارجی در فرکانس گذار مربوط و ρ_{ii} جمعیت نسبی در حالت $|i\rangle$ است که برای این سیستم بسته $\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} = 1$ است. در قفسه‌بندی فرض می‌کنیم $B_1 W_1$ و A_1 خیلی بزرگ‌تر از $B_2 W_2$ و A_2 باشند و به علاوه $B_2 W_2 \gg A_2$ باشد. جواب‌های حالت ایستای این معادلات به سادگی به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t \rightarrow \infty) &= \frac{B_1 W_1 (A_2 + B_2 W_2)}{A_1 (A_2 + 2B_2 W_2) + B_1 W_1 (2A_2 + 3B_2 W_2)}, \\ \rho_{22}(t \rightarrow \infty) &= \frac{B_2 W_2 (A_1 + B_1 W_1)}{A_1 (A_2 + 2B_2 W_2) + B_1 W_1 (2A_2 + 3B_2 W_2)}.\end{aligned}\quad (13-8)$$

عبارت $\rho_{00}(t \rightarrow \infty)$ را می‌توان از رابطه $\rho_{00} + \rho_{11} + \rho_{22} = 1$ که همواره باید برقرار باشد، به دست آورد. حال اگر گذار مجاز ۱ $\leftrightarrow$ ۰ اشباع شده باشد، به طوری که $A_2 \gg B_2 W_2$ باشد، داریم:

$$\rho_{11}(t \rightarrow \infty) \approx \rho_{00}(t \rightarrow \infty) \approx \frac{A_2 + B_2 W_2}{2A_2 + 3B_2 W_2}, \quad (14-8)$$

و

$$\rho_{22}(t \rightarrow \infty) \approx \frac{B_2 W_2}{2A_2 + 3B_2 W_2}. \quad (15-8)$$

1. Dehmelt

حال می‌بینیم که یک آهنگ‌گذار کوچک $B_2 W_2$ به حالت قفسه دارای اثر بزرگی در دینامیک است. توجه کنید که اگر آهنگ‌های القایی بسیار بزرگ‌تر از آهنگ‌های خودبه‌خودی باشند، جمعیت‌های حالت پایدار عبارت‌اند از $\rho_{00} = \rho_{11} = \rho_{22} = \frac{1}{3}$. جمعیت به‌طور مساوی بین حالت‌های تشکیل‌دهنده‌گذار تقسیم می‌شود، اما دینامیک چیز دیگری نسبت به آنچه با جمعیت حالت پایدار پیشنهاد می‌شود را بیان می‌کند. اگر گذار مجاز اشباع شده باشد، برطبق جواب‌های وابسته به زمان معادلات آهنگ‌گذار حالت برانگیخته برای $\rho_{00} = 1$ داریم:

$$\rho_{11}(t) = \frac{B_2 W_2}{2(2A_2 + 3B_2 W_2)} e^{-(A_2 + 3B_2 W_2/2)t} - \frac{1}{2} e^{-(2B_1 W_1 + A_1 + B_2 W_2/2)t} + \frac{A_2 + B_2 W_2}{2A_2 + 3B_2 W_2} \quad (16-8)$$

و

$$\rho_{22}(t) = \frac{B_2 W_2}{2A_2 + 3B_2 W_2} \left\{ 1 - e^{-(A_2 + 3B_2 W_2/2)t} \right\}. \quad (17-8)$$

توجه کنید که این عبارت‌ها تنها برای محرک قوی^۱ گذار ۱ $\leftrightarrow$ ۰ مناسب‌اند. برای یک حالت قفسه^۲ با عمر طولانی، ملاحظه می‌کنیم که برای گذارهای اشباع‌شده ($B_i W_i \gg A_i$) داریم:

$$\rho_{11}(t) \approx \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(e^{-3B_2 W_2 t/2} - 3e^{-2B_1 W_1 t} \right) \right\} \quad (18-8)$$

و

$$\rho_{22}(t) \approx \frac{1}{3} \{ 1 - e^{-3B_2 W_2 t} \}. \quad (19-8)$$

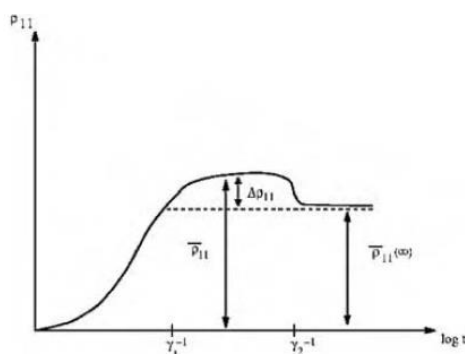
این عبارت‌های به‌ظاهر ساده حاوی مقدار زیادی مفاهیم فیزیکی هستند. یادآوری می‌کنیم که حالت ۱ یک حالت فلورسنت قوی است. مشاهده می‌کنیم که در مقیاس زمانی کوتاه نسبت به $(B_2 W_2)^{-1}$ جمعیت‌ها یک حالت شبه پایدار که مناسب با دینامیک دوترازی ۱ $\leftrightarrow$ ۰ است، می‌گیرند که برای محرک قوی‌تر، جمعیت‌ها را در حالت ۰ و ۱ برابر می‌کند.

$$\rho_{11}(t, \text{short}) \sim \frac{1}{2} \{ 1 - e^{-2B_1 W_1 t} \} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad (20-8)$$

برای زمان‌های واقعاً طولانی، حالت سوم (حالت قفسه‌ای) اثر خود را می‌گذارد و در حالت پایدار برای محرک قوی، همان‌طوری که به‌طور کیفی در شکل‌های ۸-۴ و ۸-۵ دیده می‌شود، جمعیت‌های سه‌تراز با یکدیگر برابر می‌شوند.

$$\rho_{11}(t, \text{long}) \sim \frac{1}{3} \quad (21-8)$$

1. Strong driving



شکل ۸-۴ تحول زمانی جمعیت تراز ۱ با فلورسنت قوی یون سه تراز ی در شکل ۸-۱؛ طول عمر γ_1^{-1} و γ_2^{-1} روی محور زمان مشخص شده است. عنصر ماتریسی چگالی حالت شبه پایدار کوتاه مدت با $\bar{\rho}_{11}$ نشان داده شده که دینامیک گذار سه تراز ی مانند است؛ $\bar{\rho}_{11}(\infty)$ عنصر ماتریسی واقعی حالت پایدار سه تراز ی $\Delta\rho_{11}$ اختلاف بین این دو است. آنچه در اینجا مهم است این «برآمدگی» $\Delta\rho_{11}$ است؛ این نشانه اهمیت تلگرافی فلورسانس است. همان طوری که قبلاً در بحث معادله ۳-۸ دیدیم، تغییر از دینامیک دو تراز ی به سه تراز ی نشانه ای از پُرشهای کوانتومی و فلورسانس تلگرافی است به شرطی که علامت های مربوط را تشخیص دهیم. این شکل، تغییر از دینامیک دو تراز ی به سه تراز ی را نشان می دهد.



شکل ۸-۵ چند تناوب از رشته‌های روشن و تاریک در شدت فلورسانس I از یک سیستم سه‌ترازی، پریودهای روشن به‌طور میانگین به‌اندازه T_B و پریودهای تاریک به‌اندازه T_b دوام می‌آورند. در اواسط دهه ۱۹۸۰ که دینامیک پرش‌های کوآنتومی لیزری اتم‌های سه‌ترازی شروع شد، تلاش زیادی صرف تعیین رابطه بین احتمال‌های مشترک برای آشکارسازی یک فوتون در زمان t و فوتون دیگر در زمان بعدی τ شد. این موارد به‌تفصیل توسط فیزیکدان‌های زیادی دنبال گردید (به مرجع ۳ رجوع کنید).

۸-۵ واهمدوسی

واهمدوسی، همان‌طوری که قبلاً بیان شد، عبارت است از تبدیل یک حالت برهم‌نهی کوانتومی به مخلوط آماری کلاسیکی که در نتیجه برهم‌کنش سیستم با «محیط اطراف» در طول زمان اتفاق می‌افتد. به‌عنوان یک مثال که این اثر را نشان می‌دهد، میدان یک کاواک که ابتدا در حالت گریه زوج ۸-۹ آماده شده است را در نظر بگیرید. حالت اولیه میدان- کاواک به‌اضافه محیط عبارت است از

$$|\Psi(0)\rangle \sim (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle)|\mathcal{E}\rangle, \quad (22-8)$$

که در آن $|\mathcal{E}\rangle >$ معرف حالت کوانتومی محیط است. البته محیط از سیستم‌های زیاد و حالت‌های فراوانی تشکیل شده است؛ اما ما به جزئیات آن کاری نداریم. در یک زمان بعدی، سیستم به حالت زیر تحول پیدا خواهد کرد [۱۷]:

$$|\Psi(t)\rangle \sim |\beta(t)\rangle |\mathcal{E}_1\rangle + |-\beta(t)\rangle |\mathcal{E}_2\rangle, \quad (23-8)$$

که در آن همان‌طوری که از بحث قبلی می‌دانیم، $\beta(t) = \alpha e^{-\gamma t/2}$ است. مشاهده می‌کنیم که حالت میدان با حالت‌های محیط درهم‌تنیده می‌شوند. عملگر چگالی مربوط

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &\sim [|\beta(t)\rangle |\mathcal{E}_1\rangle + |-\beta(t)\rangle |\mathcal{E}_2\rangle][\langle\beta(t)| \langle\mathcal{E}_1| + \langle-\beta(t)| \langle\mathcal{E}_2|] \\ &= |\beta(t)\rangle \langle\beta(t)| \otimes |\mathcal{E}_1\rangle \langle\mathcal{E}_1| + |-\beta(t)\rangle \langle-\beta(t)| \otimes |\mathcal{E}_2\rangle \langle\mathcal{E}_2| \\ &\quad + |\beta(t)\rangle \langle-\beta(t)| \otimes |\mathcal{E}_1\rangle \langle\mathcal{E}_2| + |-\beta(t)\rangle \langle\beta(t)| \otimes |\mathcal{E}_2\rangle \langle\mathcal{E}_1|. \end{aligned} \quad (24-8)$$

با گرفتن رد روی حالت‌های محیط و با فرض $\langle\mathcal{E}_i|\mathcal{E}_j\rangle = \delta_{ij}$ ، عملگر چگالی کاهش‌یافته میدان را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_F(t) &\sim \text{Tr}_{\text{Env}} \hat{\rho}(t) = \sum_i \langle\mathcal{E}_i| \hat{\rho}(t) |\mathcal{E}_i\rangle \\ &= |\beta(t)\rangle \langle\beta(t)| + |-\beta(t)\rangle \langle-\beta(t)|, \end{aligned} \quad (25-8)$$

که یک مخلوط آماری از حالت‌های همدوس است. توجه کنید که پس از مدت‌زمان بسیار طولانی همان حالت خلأ $|0\rangle\langle 0|$ را به‌دست می‌آوریم که یک حالت خالص است. معادله اصلی ۸-۷ تحول غیریکانی را سبب می‌شود که همان‌طوری که ثابت خواهیم کرد، نتایج ۸-۲۵ را می‌دهد.

برای روشن شدن موضوع، مورد با $\hat{H} = 0$ را بررسی می‌کنیم و معادله اصلی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\gamma}{2} \{2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\}. \quad (26-8)$$

ابتدا یک حالت همدوس اولیه $|\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{\rho}(0)$ را در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان نشان داد که

$$\hat{\rho}(t) = |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle \langle\alpha e^{-\gamma t/2}| \quad (27-8)$$

جواب صحیح معادله است. بدیهی است تحت نیروهای اتلافی در دمای $T = 0 \text{ K}$ یک حالت همدوس اولیه، همدوس باقی می‌ماند، ولی دامنه آن به‌طور نمایی کاهش می‌یابد. میانگین عدد فوتونی این حالت واپاشیده به‌صورت زیر است:

$$\bar{n}(t) = |\alpha|^2 e^{-\gamma t} \quad (28-8)$$

و بنابراین زمان واپاشی انرژی میدان برابر است با $T_{\text{decay}} = 1/\gamma$. حال حالت اولیه را حالت گره‌زوج ۸-۹

در نظر بگیرید. عملگر چگالی میدان اولیه عبارت است از

$$\hat{\rho}_F(0) = |\psi_e\rangle \langle \psi_e| = \mathcal{N}_e^2 [|\alpha\rangle \langle \alpha| + |-\alpha\rangle \langle -\alpha| + |\alpha\rangle \langle -\alpha| + |-\alpha\rangle \langle \alpha|]. \quad (29-8)$$

با توجه به تابع مشخصه مرتب‌شده نرمال (۱۲۸-۳)

$$C_N(\lambda, t) = \text{Tr}[\hat{\rho}_F(t) e^{\lambda \hat{a}^\dagger} e^{-\lambda^* \hat{a}}]. \quad (30-8)$$

برای $\hat{\rho}(t)$ که در ۸-۲۶ صدق می‌کند، تابع مشخصه در رابطه زیر صدق می‌کند [۱۸ و ۱۹]:

$$C_N(\lambda, t) = C_N(\lambda e^{-\kappa t/2}, 0). \quad (31-8)$$

بنابراین با یک مقایسه ساده می‌توان جواب زیر را نتیجه‌گیری کرد:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_F(t) = \mathcal{N}_e^2 \{ & |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle \langle \alpha e^{-\gamma t/2}| + |-\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle \langle -\alpha e^{-\gamma t/2}| \\ & + e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})} [|\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle \langle -\alpha e^{-\gamma t/2}| + |-\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle \langle \alpha e^{-\gamma t/2}|] \}. \end{aligned} \quad (32-8)$$

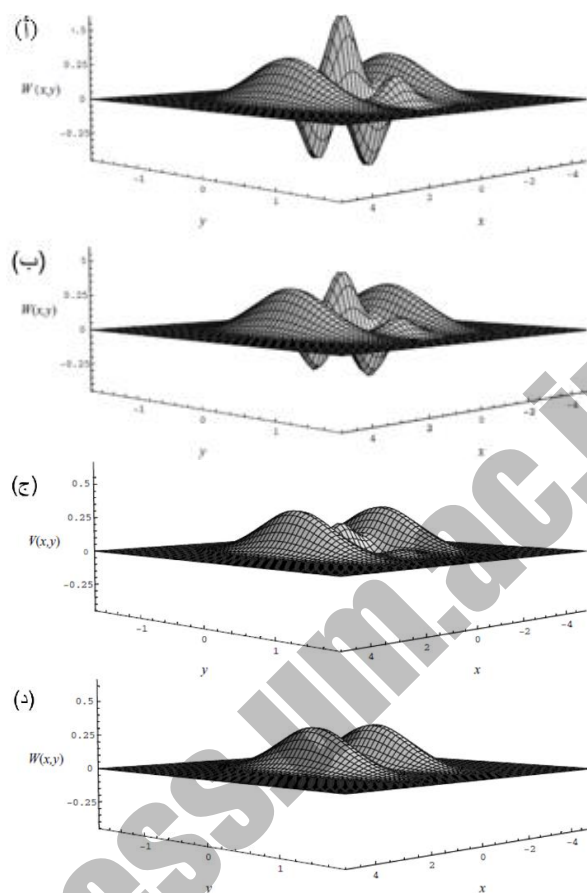
انرژی با همان آهنگ یک حالت همدوس واپاشی می‌کند، ولی اکنون کمیت دیگری وجود دارد که دچار واپاشی می‌شود و آن $\exp[-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})]$ است که در «همدوسی‌ها» یا عناصر غیرقطری $|\pm\beta\rangle\langle\mp\beta|$ ضرب می‌شود. برای مدت‌زمان کوتاه می‌توان آن را بسط داد و به دست آورد $\exp[-2|\alpha|^2(1-e^{-\gamma t})] \approx \exp[-2\gamma t|\alpha|^2]$ که از آن زمان واهمدوسی $T_{\text{decoh}} = 1/(2\gamma|\alpha|^2) = T_{\text{decay}}/(2|\alpha|^2)$ را به دست می‌آوریم. این همدوسی‌ها مادامی‌که $|\alpha|^2$ به قدر کافی بزرگ باشند، سریع‌تر از انرژی واپاشی می‌کنند.

در شکل ۸-۶ تحول تابع و یکنر برای یک حالت گریه زوج را نشان داده‌ایم. در مدت‌زمان طولانی فرائزهای تداخلی ناپدید می‌شوند، درحالی‌که توابع گاوسی وابسته به هریک از مؤلفه‌های حالت همدوس برهم‌نهی اولیه، مجزا می‌مانند، هرچند پس از مدت‌زمان بسیار طولانی این دو به یکدیگر می‌پیوندند و خلأ تابع و یکنر را تشکیل می‌دهند.

برای جزئیات پدیده واهمدوسی خواننده را به مقاله زورک [۲۰] و مراجع آن ارجاع می‌دهیم.

۸-۶ تولید حالت‌های همدوس از واهمدوسی: تعادل اپتیکی

در این فصل نشان دادیم چگونه اثرات اتلافی به از بین بردن همدوسی کوانتومی که به‌طور ذاتی در برهم‌نهی کوانتومی وجود دارد، تمایل دارند. بنابراین ممکن است قدری عجیب به نظر برسد که دریاپیم در بعضی شرایط واهمدوسی بتواند توسط اثرات اتلافی خلق شود. اگر به معادله اصلی (۸-۷) توجه کنیم، مشاهده می‌کنیم که جملات تحول یکانی و غیریکانی هر دو در آن حضور دارند؛ جمله اول توسط رابطه جابه‌جاگر و جمله آخر که جملات اتلافی و نسبت به عملگرهای خلق و نابودی غیرخطی است، وابسته به اتلاف واهمدوسی‌اند.



شکل ۸-۶- رشته‌ای که تحوّل تابع ویگنر برای حالت گریه زوج را نشان می‌دهد.

این برهم‌کنش‌ها در رقابت با یکدیگرند و بنابراین ممکن است یک سیستم در حد $t \rightarrow \infty$ به گونه‌ای تحوّل پیدا کند که به حالتی غیر از خلأ منتهی شود. این شرط «تعادل اپتیکی» نامیده می‌شود و با فرض اینکه یک میدان تک‌مدی پمپ شده است که توسط هامیلتونی برهم‌کنش

$$\hat{H}_I = \hbar G(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (8-33)$$

توصیف می‌شود، آن را نشان می‌دهیم. در این معادله G معرف قدرت میدان پمپ شده کلاسیکی است که در محیط جذب کننده فوتون که در آن جذب فوتون توسط جمله اتلافی (۸-۷) توصیف می‌شود، انتشار می‌یابد. بنابراین معادله اصلی به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i G[\hat{a} + \hat{a}^\dagger, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} \{2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\}. \quad (8-34)$$

با معرفی عملگر جدید $\hat{b} = \hat{a} + iG/\gamma$ معادله قبلی به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{\gamma}{2}\{2\hat{b}\hat{\rho}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{b}^\dagger\hat{b}\}. \quad (35-8)$$

در حالت پایدار داریم $d\hat{\rho}/dt = 0$ و بنابراین نتیجه می شود $\hat{b}\hat{\rho} = 0 = \hat{\rho}\hat{b}^\dagger$ که به معنای

$$\left(\hat{a} + \frac{iG}{\gamma}\right)\hat{\rho} = 0 = \hat{\rho}\left(\hat{a}^\dagger - \frac{iG}{\gamma}\right). \quad (36-8)$$

است. جواب معادلات بالا عبارت است از

$$\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad \text{با} \quad \alpha = -iG/\gamma. \quad (37-8)$$

بنابراین رقابت فرایندهای همدوسی و واهمدوسی به حالت‌های همدوس در حالت پایدار منجر می شود [۲۱]. توجه کنید که اگر حالت اولیه خلأ باشد، $|\hat{\rho}(0)\rangle = |0\rangle\langle 0|$ ، در زمان به حد کافی کوتاه که بتوان از اثرات اتلاف صرف نظر کرد، تحول یکانی خواهد بود و یک حالت همدوس به دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &\approx e^{-iGt(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)}\hat{\rho}(0)e^{iGt(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)} \\ &= \hat{D}(-iGt)|0\rangle\langle 0|\hat{D}^\dagger(-iGt) \\ &= |-iGt\rangle\langle -iGt|, \end{aligned} \quad (38-8)$$

که برای زمان‌های t خیلی کوتاه معتبر است. (ا)

۷-۸ نتیجه گیری

در این فصل نشان دادیم چگونه اپتیک کوانتومی می تواند به این سؤال جالب که چگونه می توان دینامیک سیستم‌های کوانتومی منفرد را فهمید، پاسخ دهد. در کارهای جاری درمورد محاسبات کوانتومی چنین سؤالاتی در بطن اینکه چگونه می توان با حالت‌های سیستم‌های کوانتومی کار کرد، وجود دارند.

مسائل

- ۱- یک میدان کاواک را که ابتدا در حالت عددی $|n\rangle$ قرار دارد، در نظر بگیرید. توضیح دهید در خلال مراحل مختلف الگوریتم پرش کوانتومی چه رخ می دهد.
- ۲- فرض کنید میدان کاواک در حالت برهم نهی $(|0\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ فراهم شده باشد. تعداد میانگین عدد فوتونی در این حالت چقدر است؟ فرض کنید یک پرش کوانتومی کوتاه رخ دهد. اگر یک تک فوتون گسیل شده باشد، میانگین تعداد فوتون‌ها در میدان چقدر است؟ آیا این نتیجه بامعنی است؟
- ۳- مجموعه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جفت شده برای عناصر ماتریس چگالی را برای عملگر چگالی که در معادله اصلی (۸-۲۶) صدق می کند، به دست آورید.

۴- در صورتی که حالت اولیه سیستم بالا حالت عددی $|5\rangle$ باشد، این معادلات را در صورتی که لازم باشد، به‌طور عددی حل کنید. تابع ویگنر را به‌دست آورید و نمودارهای سه‌بعدی برای حالت میدان در مراحل مختلف تحول را رسم کنید.

۵- معادله اصلی را برای موردی که در آن حالت اولیه، یک حالت گریه زوج با $|\alpha|^2 = 2$ است، به‌صورت عددی حل کنید. $Tr\hat{\rho}(t)$ را نسبت به زمان رسم کنید و نشان دهید که مقدار آن برابر واحد باقی می‌ماند و $Tr\hat{\rho}^2(t)$ را به‌عنوان یک سنج واهمدوسی رسم کنید.

۶- نشان دهید جواب معادله اصلی (۸-۲۶) را می‌توان با روش تکراری^۱ به‌صورت زیر نوشت [۲۲]:

$$\rho_{mn}(t) = \exp\left(-\frac{\gamma t(m+n)}{2}\right) \sum_l \left(\frac{(m+l)!(n+l)!}{m!n!}\right)^{1/2} \times \frac{(1 - \exp(-\gamma t))^l}{l!} \rho_{m+l,n+l}(0), \quad (۸-۳۹)$$

که در آن $\rho_{mn} = \langle m|\hat{\rho}|n\rangle$.

۷- با استفاده از روش تکراری، جواب‌های دقیق معادله اصلی را برای حالت‌های اولیه هم‌دوس و حالت‌های گریه زوج که با جواب بالا در توافق هستند، به‌دست آورید.

۸- معادله اصلی (۸-۳۴) را با این فرض که میدان ابتدا در یک حالت خلأ قرار دارد، به‌طور عددی حل کنید. به‌طور عددی، وجود حالت‌های هم‌دوس برای زمان‌های کوتاه و زمان‌های بلند را اثبات کنید. به این سؤال که آیا حالت تحول‌یافته همواره یک حالت هم‌دوس است یا خیر، پاسخ دهید.

مراجع

- [1] Ligare, M. and Oliveri, R. (2002). *Am. J. Phys.*, 70, 58; Buzek, V. Drobný, G. Kim, M. G. Havukainen, M. and Knight, P. L. *Phys. Rev. A*, 60 (1999), 582.
- [2] See Allen, L. and Eberly, J. H. (1987). *Optical Resonance and the Two-Level Atom* (New York: Wiley, 1975; Mineola: Dover).
- [3] Plenio, M. B. and Knight, P. L. (1998). *Rev. Mod. Phys.*, 70, 101.
- [4] Brun, T. A. (2002). *Am. J. Phys.*, 70, 719.
- [5] Schrödinger, E. (1952). *Br. J. Philos. Sci.*, 3, 109; 233.
- [6] Dehmelt, H. (1975). *Bull. Am. Phys. Soc.*, 20, 60.
- [7] Horvath, G. Z. K. Knight, P. L. and Thompson, R. C. (1997). *Contemp. Phys.*, 38, 25.
- [8] Thompson, R. C. (1996). private communication.
- [9] This is merely the a.c. Stark effect: the strong radiation shifts the atomic energy levels in an intensity-dependent fashion.
- [10] Klein, H. A. Barwood, G. P. Gill, P. and Huang, G. (2000). *Physica Scripta T*, 86, 33.
- [11] Cook, R. J. and Kimble, Possibility of Direct Observation of Quantum Jumps. (1985). *Phys. Rev. Lett.*, 54, 1023.
- [12] J. C. Bergquist, R. B. Hulet, H. J. Itano, W. M. and Wineland, D. J. (1986). *Phys. Rev. Lett.*, 57, 1699; Nagourney, W. Sandberg, J. and Dehmelt, H. G. (1986). *Phys. Rev. Lett.*, 56, 2797; T. Sauter, R. Blatt, W. Neuhauser and P. E. Toschek. (1986). *Opt. Comm.*, 60, 287.

- [13] See, for example, Knight, P. L. (1997). in *Quantum Fluctuations Les Houches Session LXIII*, Reynaud, S. Giacobino, E. and Zinn-Justin, J. (editors) (Amsterdam: Elsevier Science).
- [14] Dalibard, J. Castin, Y. and Mølmer, K. (1992). *Phys. Rev. Lett.*, 68, 580; Hegerfeldt, G. C. and Wilser, T. S. (1991). in *Proceedings of the II International Wigner Symposium*, H. D. Doebner, Scherer, W. and Schroek, F. (editors) (Singapore: World Scientific).
- [15] See, for example, Kim, M. S. and Knight, P. L. (1987). *Phys. Rev. A*, 36, 5265; see also references in [3].
- [16] Pegg, D. T. Loudon, R. and Knight, P. L. (1986). *Phys. Rev. A*, 33, 4085.
- [17] See Zurek, W. (1991). *Physics Today*, 44: 10, 36.
- [18] Perina, J. (1984). *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena* (Dordrecht: Reidel).
- [19] Brune, M. Haroche, S. Raimond, J. M. Davidovich, L. and Zagury. (1992). *N. Phys. Rev. A*, 45, 5193.
- [20] Zurek, W. (2003). *Rev. Mod. Phys.*, 75, 715.
- [21] See Agarwal, G. S. (1988). *J. Opt. Soc. Am. B*, 5, 1940.
- [22] Škvarček, J. and Hillery, M. (1999). *Acta Phys. Slovaca*, 49, 756

کتاب‌شناسی

- Carmichael, H. J. *An Open Systems Approach to Quantum Optics*, Lecture Notes in Physics (Berlin: Springer-Verlag, 1993).
- Ghosh, P. *Testing Quantum Mechanics on New Ground* (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).
- Louisell, W. H. *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley, 1973).
- Percival, I. *Quantum State Diffusion* (Cambridge: Cambridge University Press, 1998).
- Stenholm, S. and Wilkens, M. Jumps in quantum theory, *Contemp. Phys.*, 38 (1997), 257.

تست اپتیکی مکانیک کوانتومی

در خلال سه دهه گذشته آزمایش‌هایی که قبلاً تخیلی نامیده می‌شدند، شکل واقعی به خود گرفتند. نقل قولی از شرودینگر را که در فصل ۸ آوردیم، یادآور می‌شویم: «... هرگز با تنها یک الکترون یا اتم یا مولکول (کوچک) نخواهیم توانست آزمایشی انجام دهیم». این مطلب دیگر درست نیست. امروزه می‌توان آزمایش‌هایی را که شامل اتم‌های منفرد یا مولکول‌های منفرد و حتی تک‌فوتون‌ها باشند، انجام داد. از این رو، می‌توان نشان داد آنچه که توسط شرودینگر غیرممکن به نظر می‌رسید، کاملاً قابل تحقق است. قبلاً در فصل ۶ چند نمونه از آزمایش‌های تک‌فوتونی را مورد بحث قرار دادیم و در فصل ۱۰ آزمایش‌هایی را شرح خواهیم داد که با تک‌اتم‌ها و یون‌های در تله افتاده انجام شده‌اند. در این فصل بیشتر به تست‌های تجربی بنیادهای مکانیک کوانتومی که شامل تعداد کمی فوتون هستند، می‌پردازیم. منظور از تست‌های بنیادی عبارت است از تست‌های مکانیک کوانتومی در مقابله با پیش‌بینی‌های نظریه‌های واقع‌بینانه^۱ موضعی (یعنی نظریه‌های متغیرهای نهان^۲). به طور مشخص، آزمایش‌های اپتیکی را مورد بحث قرار می‌دهیم که نقض نامساوی‌های بل^۳ را نشان می‌دهند، نقض‌هایی که ابتدا توسط بل در مورد دو ذره با اسپین‌های نیمه صحیح مورد بحث قرار گرفتند [۱]. چنین نقض‌هایی اگر به طور تجربی مشاهده شوند، نظریه‌های متغیر نهان واقع‌بینانه موضعی^۴ را ابطال می‌کنند. موضعیت^۵ به مفهوم رایج در فیزیک کلاسیک این است که نمی‌تواند بین دو واقعه که جدایی آن‌ها فضاگونه است، ارتباط علی وجود داشته باشد. یعنی وقایع نمی‌توانند توسط علامتی که با سرعت نور یا کمتر از آن حرکت می‌کند، ارتباط پیدا کنند؛ یعنی وقایع در خارج از مخروط نوری قرار دارند. اما در مکانیک کوانتومی مشاهده می‌شود که اثرات غیر موضعی، اثراتی که مفهوم کلاسیکی موضعیت را نقض می‌کنند، ممکن است. به عنوان مثال، این واقعیت که اندازه‌گیری روی یک بخش از سیستم درهم‌تنیده به طور لحظه‌ای بخش دیگر سیستم را به یک حالت بخصوص تصویر کند،

1. realistic
2. hidden variable
3. Bell

4. local
5. locality

هرچند قسمت‌های سیستم به فاصله بسیار زیادی از یکدیگر قرار داشته باشند، یک اثر کوانتومی غیرموضعی است. «واقع‌بینی»^۱ در قالب نظریه‌های متغیرهای نهان بدین معنی است که تمام مشاهده‌پذیرهای یک سیستم کوانتومی در تمام لحظات دارای یک مجموعه ویژگی‌های عینی (اعداد کوانتومی) هستند. به عنوان مثال، می‌دانیم که یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}+$ در امتداد محور z یک برهم‌نهی از حالت‌های اسپینی $\pm \frac{1}{2}$ در امتداد محور x است. براساس تعبیر استاندارد کپنهاکی از مکانیک کوانتومی، اسپین این ذره در راستای محور x نامعین است، یعنی دراصل هیچ مقدار بخصوصی به اسپین در راستای محور x نمی‌توان منتسب کرد تا اینکه بر اثر اندازه‌گیری بردار حالت اسپینی، یکی از دو مقدار را بدهد. در یک نظریه متغیر نهان فرض می‌شود اسپین در راستای محور x یک مقدار معین است، هرچند آن را نمی‌دانیم و آزمایش تنها وجود حالتی را که از قبل وجود داشته است، آشکار می‌کند. اما دو نوع نظریه متغیر نهان، موضعی و غیرموضعی، وجود دارد. نظریه‌های متغیر نهان غیرموضعی از نوعی که توسط بوهم^۲ بررسی شد [۲]، پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی استاندارد را بازتولید می‌کنند. ولی این نظریه‌ها غیرموضعی بودن را نشان می‌دهند، جنبه‌ای از مکانیک کوانتومی که به نظر می‌رسد حتی بیش از فقدان واقع‌بینی، مورد انتقاد اینشتین بوده است. اما نظریه‌های متغیر نهان موضعی پیش‌بینی‌هایی می‌کنند که با پیش‌بینی‌های نظریه کوانتومی استاندارد متفاوت است و قضیه بل^۳ راهی برای محک زدن آن فراهم می‌کند. در این فصل با استفاده از فوتون‌های درهم‌تنیده قطبی، تست‌های اپتیکی نظریه‌های متغیر نهان را مورد بحث قرار می‌دهیم.

در آنچه به دنبال می‌آید، ابتدا چشمه‌های جدید از زوج حالت‌های تک فوتونی درهم‌تنیده را که از فرایندهای تبدیل فروافتی به دست می‌آیند، مورد استفاده قرار می‌دهیم (که در نقطه مقابل روش گسیل‌های آبخاری از گذارهای اتمی است که در فصل ۶ بررسی شد). سپس چند آزمایش تداخل تک فوتونی و دوفوتونی را مرور و مفهوم «پاک‌کن کوانتومی»^۴ در این زمینه را معرفی می‌کنیم و سپس به بررسی یک آزمایش درباره هم‌دوسی کوانتومی القایی می‌پردازیم. سپس یک آزمایش درباره تونل زنی فوتونی که نشان‌دهنده اثرات فوق‌نوری^۵ است را مورد بحث قرار می‌دهیم. بالاخره دو آزمایش درباره تست نامساوی‌های بل تشریح می‌کنیم؛ یکی شامل فوتون‌های درهم‌تنیده قطبی و دیگری (آزمایش فرانسون^۶) که براساس رابطه عدم قطعیت انرژی-زمان بنا شده است.

۹-۱ چشمه‌های فوتونی: تبدیل فروافتی پارامتری خودبه‌خودی

قبلاً در فصل ۷ تولید نور غیر کلاسیک از طریق محیط غیرخطی محرک پارامتری^۷ را که توسط پذیرفتاری غیرخطی مرتبه دوم^(۲) مشخص می‌شود، بررسی کردیم. مورد غیرتبهگن را به کار می‌بریم و فرض می‌کنیم میدان پمپ شده، کوانتیده و هامیلتونی برهم کنش به صورت زیر باشد:

1. realism
2. Bohm
3. Bell

4. Quantum eraser
5. superluminal
6. Franson

7. Parametrically driven

$$\hat{H}_I \sim \chi^{(2)} \hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger + H.c., \quad (1-9)$$

که در آن نماد گذاری فصل ۷ را تغییر داده است، به طوری که اکنون $\hat{a}_p$ عملگر نابودی باریکه پمپ شده و $\hat{a}_s^\dagger$ و $\hat{a}_i^\dagger$ به ترتیب عملگرهای خلق باریکه‌های «سیگنال» و «غیرفعال»^۱ هستند. قرارداد «سیگنال» و «غیرفعال» به دلایل تاریخی آمده است و هیچ معنای خاصی را القا نمی‌کند؛ برچسب گذاری باریکه‌ها تاحدی اختیاری است. در ساده‌ترین مورد که در آن باریکه‌های سیگنال و غیرفعال ابتدا در حالت‌های خلأ قرار دارند، یک باریکه پمپ منفرد فوتونی که در محدوده ماوراءبنفش طیف قرار دارد به دو فوتون اپتیکی تبدیل می‌شود که یکی در باریکه سیگنال و دیگری در باریکه غیرفعال قرار دارد:

$$|1\rangle_p |0\rangle_s |0\rangle_i \Rightarrow \hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger |1\rangle_p |0\rangle_s |0\rangle_i = |0\rangle_p |1\rangle_s |1\rangle_i. \quad (2-9)$$

چون مدهای سیگنال و غیرفعال ابتدا در حالت خلأ هستند، این فرایند یک فرایند «خودبه‌خودی» است. توجه کنید که فرض می‌شود فوتون‌های تولید شده در مدهای سیگنال و غیرفعال هم‌زمان به وجود آمده‌اند. درستی چنین چیزی سال‌ها قبل توسط پورنهام^۲ و واینبرگ^۳ نشان داده شد که آن‌ها برای شمارش هم‌زمان از آشکارسازهایی با ترتیبی استفاده کردند که بقای تکانه و انرژی را حفظ کنند و تأخیر زمانی یکسانی داشته باشند. تولید هم‌زمان فوتون‌های سیگنال و غیرفعال در کاربردهای چنین چشمه‌های پارامتری برای تست بنیادی مکانیک کوانتومی اساسی است. لیکن برای اینکه فرایند تبدیل فروافتی ادامه پیدا کند، شرایط معین دیگری باید برقرار باشد. فرض کنید ω_s, ω_p و ω_i به ترتیب فرکانس‌های پمپ، سیگنال و غیرفعال باشند؛ بقای انرژی ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i. \quad (3-9)$$

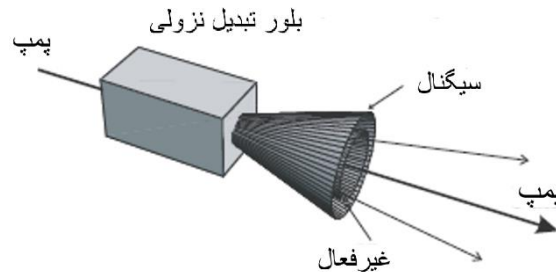
به علاوه اگر $\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_s$ و $\mathbf{k}_i$ به ترتیب اعداد موجی موردنظر باشند، در داخل بلور باید داشته باشیم:

$$\hbar\mathbf{k}_p \approx \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i, \quad (4-9)$$

که در آن علامت $\approx$ به خاطر عدم قطعیتی است که از معکوس طول محیط غیرخطی ناشی می‌شود [۴]. معادلات ۳-۹ و ۴-۹ را شرایط «همخوانی فازی»^۴ می‌نامند و می‌توانند در بعضی از انواع محیط‌های غیرخطی، نظیر بلورهای بدون تقارن مرکزی، حاصل شوند [۵]. تنها محیط‌های بدون تقارن مرکزی، دارای $\chi^{(2)}$ های مخالف صفر هستند. متداول‌ترین بلورهای به کاررفته عبارت‌اند از $\text{KDP} (\text{KD}_2\text{PO}_4)$ و $\text{BBO} (\beta - \text{BaB}_2\text{O}_4)$. ارتباط آن‌ها به اپتیک غیرخطی در پیوست «د» آمده است.

1. idler
2. Burnham

3. Weinberg
4. Phase matching



شکل ۹-۱ تبدیل فروافتی نوع I. فوتون‌های باریکه پمپ که پس از عبور از بلور، به دو فوتون سیگنال و غیرفعال تبدیل می‌شوند، در جهت‌های مختلف از بلور خارج می‌گردند. فوتون‌های سیگنال و غیرفعال دارای قطبش‌های یکسان هستند، ولی بر راستای قطبش پمپ عمودند. راستاهای ممکن مخروط‌های هم‌مرکز را تشکیل می‌دهند. نور حاصل از مخروط‌های مختلف دارای رنگ‌های متفاوت است، معمولاً نارنجی نزدیک به مرکز و قرمز تیره در مخروط بیرونی قرار دارد. باریکه پمپ ماوراءبنفش است.

درواقع، دو نوع فرایند SPDC وجود دارد. در نوع I فوتون‌های سیگنال و غیرفعال دارای قطبش‌های یکسان، ولی عمود بر قطبش پمپ هستند. هامیلتونی برهم‌کنش برای این فرایند به صورت زیر داده می‌شود:

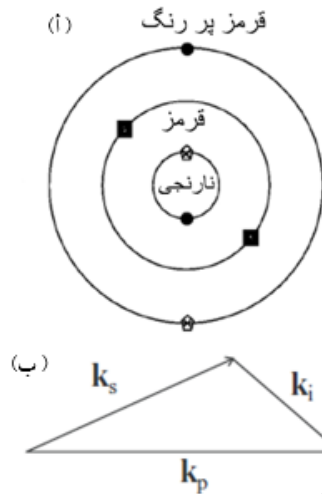
$$\hat{H}_I = \hbar \eta \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger + H.c., \quad (5-9)$$

که در آن تقریب پارامتری اعمال شده است و $\eta \propto \chi^{(2)} \varepsilon_p$ که ε_p دامنه میدان همدوس کلاسیکی است. شرط همخوانی فازی ۹-۴ این قید را ایجاد می‌کند که فوتون‌های سیگنال و غیرفعال (فوتون‌های مزدوج) باید در دو یال مقابل مخروط‌های هم‌مرکز که مرکز آن در راستای باریکه پمپ قرار دارد، از بلور خارج شوند (شکل ۹-۱ را ببینید). بدیهی است که تعداد بی‌نهایت راه برای باریکه‌های سیگنال و غیرفعال وجود دارد. چند مثال در شکل ۹-۲ نشان داده شده است. هامیلتونی ۹-۵ در عمل معرف یک «پس‌انتخاب»^۱ خاص از تکانه‌های باریکه‌های خروجی است.

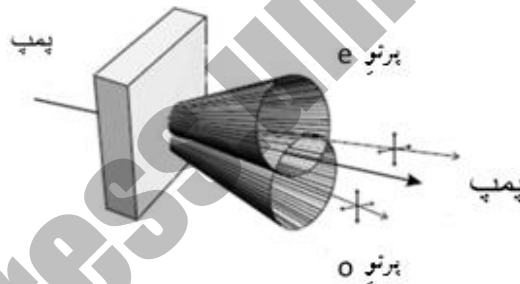
در تبدیل فروافتی نوع II، فوتون‌های سیگنال و غیرفعال دارای قطبش‌های متعامد هستند. به‌خاطر اثرات شکست دوگانه، فوتون‌های تولیدشده در امتداد دو مخروط صادر می‌شوند که مطابق شکل ۹-۳ یکی موج عادی (O) و دیگری غیرعادی (e) است. فصل مشترک دو مخروط شرایطی را برای تولید حالت‌های قطبش درهم‌تنیده فراهم می‌کند. حالت‌های قطبش عمودی و افقی تک‌فوتونی را به ترتیب با $|V\rangle$ و $|H\rangle$ نمایش می‌دهیم. همان‌طوری که در شکل ۹-۴ نشان داده شده است، برای فوتون‌هایی که در امتداد فصل مشترک مخروط‌ها صادر می‌شوند، در اینکه فوتون‌های سیگنال یا غیرفعال به‌طور افقی یا عمودی قطبیده شده‌اند، ابهام وجود دارد. برای مستثنا کردن فوتون‌های حاصل از سایر قسمت‌های مخروط‌ها از پرده‌هایی استفاده می‌شود که سوراخ‌هایی در امتداد فصل مشترک مخروط‌ها در آن تعبیه شده است. هامیلتونی مربوط به صورت زیر است:

$$\hat{H}_I = \hbar \eta (\hat{a}_{Vs}^\dagger \hat{a}_{Hs}^\dagger + \hat{a}_{Hs}^\dagger \hat{a}_{Vs}^\dagger) + H.c., \quad (6-9)$$

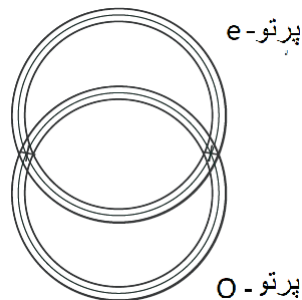
1. Post-selection



شکل ۹-۲. ا. مقطع مخروطیهای نور خارج شده از تبدیل فروافتی نوع I. نشانه‌های یکسان معرف فوتون‌های مزدوج هستند که در شرط همخوانی فازی صدق می‌کنند. توجه کنید آن‌هایی که در دایره وسط قرار دارند، از نظر فرکانس تبهگن هستند. ب. نمایش هندسی شرط همخوانی فازی.



شکل ۹-۳ تبدیل فروافتی نوع II: فوتون‌های سیگنال و غیرفعال دارای قطبش‌های متعامد هستند. اثرات شکست دوگانه باعث می‌شود فوتون‌ها در امتداد فصل مشترک دو مخروط صادر شوند: یکی نوع عادی (O) و دیگری غیرعادی (e).



شکل ۹-۴ فصل مشترک مخروط‌ها برای پرتو O- و پرتو e- منبع قطبش نور درهم‌تنیده است. از این نقاط نمی‌توان دریافت که هر فوتون از کدام باریکه آمده است. هامیلتونی معادله ۹-۶ نوری را توصیف می‌کند که از هر دو فصل مشترک آمده است.

که در آن عملگرهای $\hat{a}_{Vi}^\dagger, \hat{a}_{Hs}^\dagger, \hat{a}_{Vs}^\dagger$ و $\hat{a}_{Hi}^\dagger$ به ترتیب عملگرهای خلق برای فوتون‌ها با قطبش‌های عمودی و افقی برای باریکه‌های سیگنال و غیرفعال هستند. این هامیلتونی نیز معرف پسانتخاب است که با قرار دادن یک پرده در مقابل چشمه که دارای سوراخ‌هایی در نواحی هم‌پوشانی باریکه‌هاست، به دست می‌آید. حالت اولیه مدهای سیگنال و غیرفعال را به صورت $|\Psi_0\rangle = |0\rangle$ در نظر بگیرید که یک حالت خلأ جمعی برای تبدیل‌های فروافتی نوع I و II هستند. در هریک از دو مورد، بردار حالت به صورت زیر تحول می‌یابد:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-it\hat{H}_I/\hbar)|\Psi_0\rangle, \quad (7-9)$$

که چون $\hat{H}_I$ تابع صریحی از زمان نیست، می‌توان آن را به صورت زیر تا مرتبه دوم نسبت به زمان بسط داد:

$$|\Psi(t)\rangle \approx [1 - it\hat{H}_I/\hbar + \frac{1}{2}(-it\hat{H}_I/\hbar)^2]|\Psi_0\rangle \quad (8-9)$$

اگر نوع “SPDC I” را در نظر بگیریم، $|0\rangle_i |0\rangle_s |0\rangle_{Vi} = |\Psi_0\rangle$ داریم:

$$|\Psi(t)\rangle = (1 - \mu^2/2)|0\rangle_s |0\rangle_i - i\mu|1\rangle_s |1\rangle_i \quad (9-9)$$

که در آن $\mu = \eta t$. این بردار حالت تا مرتبه اول نسبت به μ بهنجار است و از جمله مرتبه μ^2 که شامل حالت $|2\rangle_s |2\rangle_i$ است، صرف نظر کرده‌ایم. در مورد نوع “SPDC II” با حالت اولیه $|\Psi_0\rangle = |0\rangle_{Vs} |0\rangle_{Hs} |0\rangle_{Vi} |0\rangle_{Hi}$ داریم:

$$|\Psi(t)\rangle = (1 - \mu^2/2)|0\rangle_{Vs} |0\rangle_{Hs} |0\rangle_{Vi} |0\rangle_{Hi} - i\mu \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle_{Vs} |0\rangle_{Hs} |0\rangle_{Vi} |1\rangle_{Hi} + |0\rangle_{Vs} |1\rangle_{Hs} |1\rangle_{Vi} |0\rangle_{Hi}). \quad (10-9)$$

حال حالت‌های خلأ قطبیده عمودی و افقی و حالت تک‌فوتونی را به صورت $|H\rangle = |0\rangle_V |1\rangle_H$ و $|V\rangle = |1\rangle_V |0\rangle_H$ معرفی می‌کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$|\Psi(t)\rangle = (1 - \mu^2/2)|0\rangle_s |0\rangle_i - i\mu(|V\rangle_s |H\rangle_i + |H\rangle_s |V\rangle_i). \quad (11-9)$$

عبارت بهنجار شده داخل پرانتز را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_s |H\rangle_i + |H\rangle_s |V\rangle_i), \quad (12-9)$$

که یکی از چهار حالت بل است. مجموعه کامل حالت‌های بل عبارت‌اند از

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |V\rangle_2 \pm |V\rangle_1 |H\rangle_2), \quad (13-9)$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 \pm |V\rangle_1|V\rangle_2). \quad (۱۴-۹)$$

که در بخش ۹-۶ در مورد این حالت ها و مفاهیم آن ها بحث خواهیم کرد.

۹-۲ تداخل سنجی هونگ-او-مندل

در فصل ۶ در این مورد که وقتی یک حالت تک فوتون دو قلو به طور هم زمان به هریک از درگاه های ورودی یک تقسیم کننده باریکه $50:50$ می تابد چه رخ می دهد، بحث کردیم. فوتون ها همراه با هم از یکی از خروجی ها خارج می شوند؛ هرگز یک تک فوتون در دو باریکه وجود ندارد. توجه کنید که برای حالت ورودی $|1\rangle_s|1\rangle_i$ ، حالت بعد از تقسیم کننده باریکه به صورت

$$|\psi_{BS}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|2\rangle_2), \quad (۱۵-۹)$$

است که مدهای خروجی را مطابق شکل ۹-۵ با اندیس های ۱ و ۲ مشخص کرده ایم. آشکارسازهای واقع در خروجی ها هرگز به طور هم زمان علامت ثبت نمی کنند. در واقع می توان عدم ثبت هم زمان این علامت ها را به عنوان دلیلی بر اینکه فوتون ها به طور هم زمان به تقسیم کننده باریکه تاییده شده اند، در نظر گرفت. اولین اثبات این اثر توسط هونگ-او-مندل (HOM) در ۱۹۸۷ در آزمایشی که امروزه یک آزمایش کلاسیک است، انجام شد [۶]. در واقع، این آزمایش برای این طراحی شده بود که فاصله زمانی بین دو فوتونی که به تقسیم کننده باریکه می رسند را اندازه گیری کند. طراحی از آزمایش آن ها در شکل ۹-۶ نشان داده شده است. در این آزمایش از یک بلور غیر خطی با فرض تبدیل فروافتی نوع I برای تولید حالت های تک فوتونی دو قلو استفاده می شود که باریکه های آن به سمت درگاه های ورودی یک تقسیم کننده باریکه $50:50$ هدایت می شوند. آشکارسازهای فوتونی را در خروجی های تقسیم کننده باریکه قرار می دهند و علامت هایی که به هم بسته ساز^۱ می رسند را ثبت می کنند. تغییر کوچکی در محل تقسیم کننده باریکه باعث تأخیر زمانی کوچکی بین زمان رسیدن فوتون ها به تقسیم کننده باریکه می شود. با یک اختلاف زمانی کوچک، فوتون ها به طور مستقل از تقسیم کننده باریکه منعکس می شوند یا عبور می کنند و باعث می شود که هر دو آشکارساز در یک بازه زمانی کوچک نسبت به یکدیگر علامت دهند. می توان نشان داد که [۶] آهنگ آشکارسازی هم زمان^۲، R_{coin} ، به صورت زیر است:

$$R_{coin} \sim \left[1 - e^{-(\Delta\omega)^2(\tau_s - \tau_i)^2} \right], \quad (۱۶-۹)$$

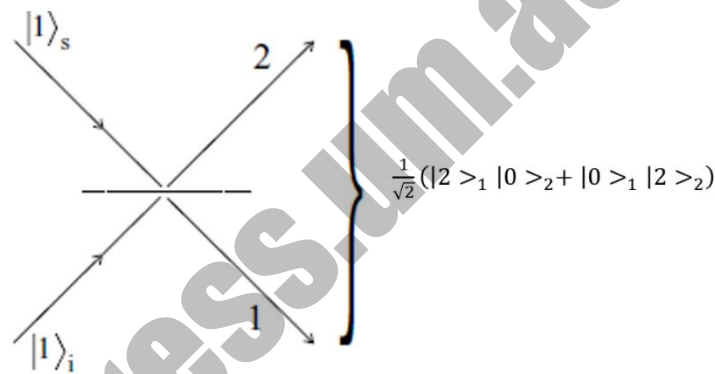
که در آن $\Delta\omega$ پهنای باند نور و τ_i و τ_s به ترتیب عبارت اند از مسافتی که فوتون های سیگنال و غیر فعال از مبدأ فروافتی^۳ به تقسیم کننده باریکه طی می کنند. پهنای باند $\Delta\omega$ بر این دلالت دارد که باریکه های سیگنال و غیر فعال تک رنگ نیستند و وجود آن در معادله ۹-۱۶ از این فرض نتیجه می شود که توزیع طیفی گاوسی است.

1. correlator

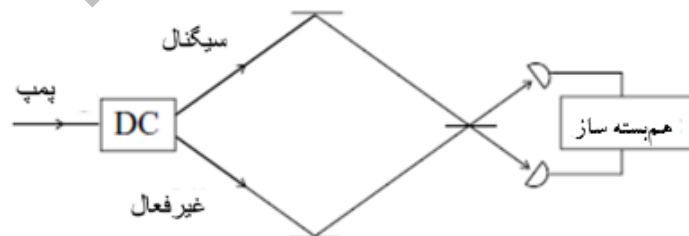
2. Coincident detection

3. Down- converter

بدیهی است به‌ازای $\tau_s - \tau_i = 0$ داریم $R_{coin} = 0$. آهنگ شمارش هم‌زمان^۱ به‌ازای $|\tau_s - \tau_i| \gg \tau_{corr}$ ماکزیمم می‌شود که در آن $\tau_{corr} = 1/\Delta\omega$ زمان هم‌بستگی فوتون‌هاست. این زمان هم‌بستگی از مرتبه چند نانوثانیه است که اندازه‌گیری آن با روش‌های متداول سخت است؛ زیرا آشکارسازهایی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند، اغلب دارای تفکیک زمانی به‌حدّ کافی کوچک نیستند. اما این زمان هم‌بستگی را می‌توان با تداخل سنج HOM اندازه‌گیری کرد. نتایج تجربی‌ای که از مرجع [۶] برداشته شده است، در شکل ۷-۹ رسم شده است. در این شکل، تعداد علامت‌ها در یک بازه ده دقیقه نسبت به مکان تقسیم‌کننده باریکه (اساساً فاصله زمانی) رسم شده است. منحنی توپر پیش‌بینی نظری را نشان می‌دهد. داده‌های تجربی دقیقاً بر مینیمم پیش‌بینی شده منطبق نیستند؛ زیرا ممکن نیست که باریکه‌ها دقیقاً در محل تقسیم‌کننده باریکه هم‌پوشانی داشته باشند. از توزیع علامت‌ها، زمان هم‌بستگی دو فوتون را که ~ 100 fs است، به‌دست می‌آوریم.

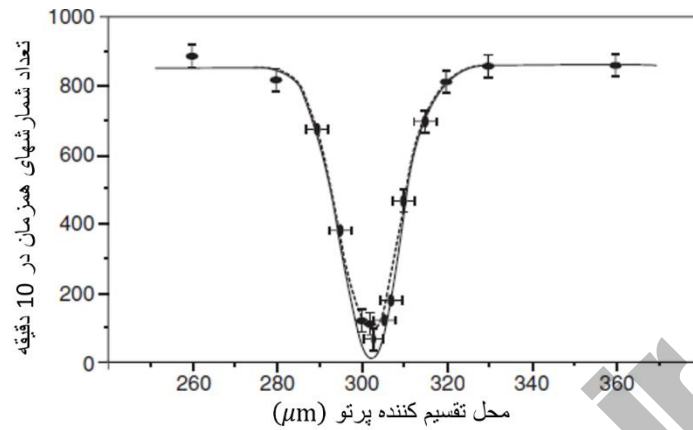


شکل ۷-۹ برچسب‌گذاری مدهای خروجی یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ با ورودی‌های باریکه‌های سیگنال و غیرفعال مبدل فروافتی نوع I. اگر حالت‌های تک‌فوتونی به‌طور هم‌زمان به تقسیم‌کننده باریکه بتابند، به‌دلایلی که در فصل ۶ آمد، خروجی شامل جمله $|1\rangle_1 |1\rangle_2$ نخواهد بود. هم‌بسته ساز



شکل ۷-۹ آزمایش هونگ-او-مندل (HOM)؛ وقتی طول مسیرها یکسان باشد، هیچ‌گونه شمارش هم‌زمانی مشاهده نمی‌شود.

1. Coincidence count



شکل ۷-۹ تعداد شمارش‌های هم‌زمان در بازه ۱۰ دقیقه به صورت تابعی از مکان تقسیم‌کننده باریکه که از مقاله (HOM) هونگ-او-مندل گرفته شده است. آهنگ شمارش به دلیل اینکه باریکه‌ها در محل تقسیم‌کننده باریکه کاملاً هم‌پوشانی ندارند، دقیقاً صفر نمی‌شوند.

۳-۹ پاک‌کن کوانتومی^۱

در آزمایش HOM که در بالا توصیف شد، این واقعیت که فوتون‌ها غیرقابل تشخیص‌اند، نکته کلیدی در فهم نتایج است. چون SPDC نوع I به عنوان چشمه استفاده می‌شود، هر دو فوتون دارای یک قطبش هستند. ممکن است از نظر انرژی اختلاف کمی با یکدیگر داشته باشند، ولی آشکارسازهای فوتونی به این اختلاف انرژی حساس نیستند. لازم نبود که راستای قطبش فوتون‌ها را تعیین کنیم؛ تنها کافی بود که قطبش آن‌ها یکسان باشد. اما اکنون به طور مشخص فرض کنید قطبش آن‌ها افقی باشد (شکل ۹-۸ را ببینید). حالت‌های تک‌فوتونی دو قلو را به صورت $|H\rangle_i |H\rangle_s$ فرض کنید. با این حالت ورودی به تقسیم‌کننده باریکه (با فرض اینکه در قطبش فوتون‌ها تاثیری ایجاد نکند)، حالت خروجی را می‌توان به صورت $i(|2H\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |2H\rangle_2)/\sqrt{2}$ نوشت که در آن $|2H\rangle$ یک حالت با دو فوتون با قطبش افقی است.

حال فرض می‌کنیم یک چرخنده در، مثلاً باریکه غیرفعال قرار دهیم، به طوری که مانند شکل ۹-۹ قطبش آن به اندازه θ نسبت به راستای افق دوران یابد. این عمل قطبش، حالت غیرفعال را به صورت زیر تبدیل می‌کند:

$$|\theta\rangle_i = |H\rangle_i \cos \theta + |V\rangle_i \sin \theta. \quad (۱۷-۹)$$

قطبش بردار حالت فوتونی که قطبش آن عمود بر این حالت است، عبارت است از

$$|\theta^\perp\rangle_i = -|H\rangle_i \sin \theta + |V\rangle_i \cos \theta. \quad (۱۸-۹)$$

اکنون حالت ورودی به تقسیم‌کننده باریکه عبارت است از

(19-9)

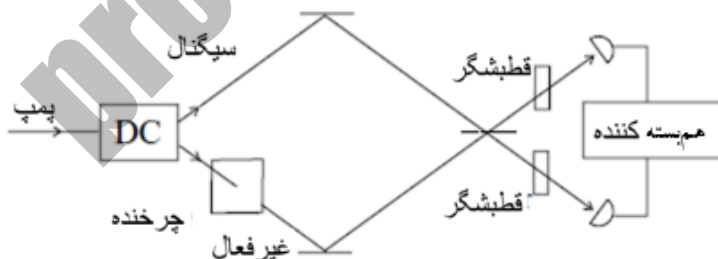
در این صورت، حالت خروجی

(20-9)

درمے آید:

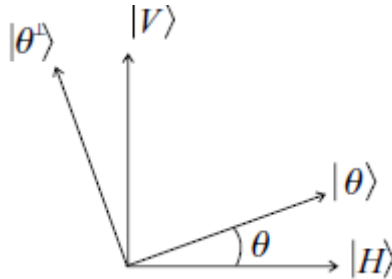
(21-9)

آشکار ساز



می‌آید، از بین می‌برد. با قرار دادن قطبشگر در باریکه پس از تداخل‌سنج، تداخل کوانتومی اعاده می‌شود.

۱. توجه کنید که برای اینکه حالت قطبش یک فوتون را وارد کنیم، درواقع باید فضای هیلبرت را گسترش دهیم تا بتوانیم بنویسیم $|H>_1 = |1>_{H_1}|0>_{V_1}$ و... بنابراین جمله آخر به صورت $(|1>_{H_1}|0>_{V_1}|1>_{H_2}|0>_{V_2} - |0>_{H_1}|1>_{V_1}|1>_{H_2}|0>_{V_2})/\sqrt{2}$ درمی آید که نشان می دهد چرا حالت های تک فوتونی مانند قبل یکدیگر را حذف نمی کنند.


 شکل ۹-۹ رابطه بین $|\theta\rangle, |\theta^\perp\rangle$ و بردارهای قطبش $|H\rangle, |V\rangle$

در خروجی تقسیم‌کنندهٔ باریکه طبیعت ذره‌مانندی آن یا با استفاده از تداخل سنج ماخ-زندر که در فصل ۶ مورد بحث قرار گرفت، طبیعت موج‌مانندی آن را می‌توان مشاهده کرد که مثالی از مکملیت^۱ بور را فراهم می‌کند. معمولاً کاهش تولید هم‌دوسی با داشتن اطلاعات در مورد مسیر است که به ناپدید شدن تداخل نسبت داده می‌شود. «واهم‌دوسی» بنابه فرض، بردار حالت را به یک مخلوط آماری تبدیل می‌کند که در آن به‌جای دامنه‌های احتمال، تنها احتمالات ظاهر می‌شوند. اما در مورد آزمایش تداخل سنجی دوفوتونی که در اینجا مورد بحث قرار گرفت تا نقطه‌ای که فوتون‌ها آشکار می‌شوند، حالت خالص نداریم.

حال فرض کنید یک قطبشگر خطی با زاویهٔ θ_1 را نسبت به افق در مقابل آشکارساز واقع در خروجی باریکهٔ ۱ قرار دهیم. اگر پس از قطبشگر، یک آشکارساز فوتونی قرار دهیم، نتیجهٔ اندازه‌گیری تصویری فون‌نویمن (پیوست «ب» را ببینید) بردار حالت

$$|\theta_1\rangle_1 = |H\rangle_1 \cos \theta_1 + |V\rangle_1 \sin \theta_1. \quad (22-9)$$

است. یعنی تنها حالت قطبش $|\theta_1\rangle_1$ توسط آشکارساز ثبت می‌شود. حالت ۹-۲۱ به حالت خالص زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} |\psi, \theta_1\rangle &= \frac{|\theta_1\rangle_1 \langle \theta_1 | \psi_{\text{out}}(\pi/2) \rangle}{\langle \psi_{\text{out}}(\pi/2) | \theta_1 \rangle \langle \theta_1 | \psi_{\text{out}}(\pi/2) \rangle^{1/2}} \\ &= |\theta_1\rangle (|V\rangle_2 \cos \theta_1 - |H\rangle_2 \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (23-9)$$

که فوتون مد ۲ دارای قطبشی عمود بر قطبش فوتون آشکار شده است. به‌طور مشابه، فرض کنید یک قطبشگر در زاویهٔ θ_2 را نسبت به افق در مقابل آشکارساز باریکهٔ خروجی ۲ قرار دهیم. در این صورت، احتمال اینکه آشکارسازی هم‌زمان یک فوتون با قطبش تحت زاویهٔ θ_1 و دیگری تحت زاویهٔ θ_2 انجام شود، برابر است با

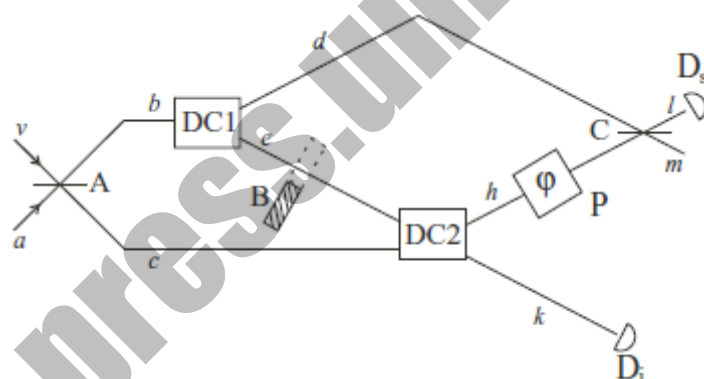
$$\begin{aligned} P_{\text{coin}} &= |\langle \theta_1 | \langle \theta_2 | \psi_{\text{out}}(\pi/2) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (24-9)$$

1. complementarity

از این نتیجه مشاهده می‌کنیم که فرورفتگی در آهنگ شمارش هم‌زمان می‌تواند بسته به زاویه نسبی قطبشگرها احیا شود. اثر قطبشگرهایی که درست قبل از آشکارسازها قرار می‌گیرند این است که اطلاعات کدگذاری شده توسط چرخنده در یکی از باریکه‌ها را پاک کنند. چرخنده اطلاعات کدام مسیر را (که اغلب Welcher – Weg نامیده می‌شود) ایجاد می‌کند و قطبشگرها آن را پاک می‌کنند. توجه کنید که پاک شدن در خارج تداخل سنج HOM، یعنی بعد از تقسیم‌کننده باریکه اتفاق می‌افتد. اثر پاک شدن کوانتومی نور به‌طور تجربی توسط کُیات^۱ استاینبرگ^۲ و چیاو^۳ [۷] اثبات شده است.

۴-۹ همدوسی القایی

حال به تشریح یک آزمایش دیگر می‌پردازیم، آزمایشی که به‌حق «اعجاب‌آور» [۸] نامیده می‌شود که در آن نیز اطلاعات کدام مسیر تداخل را از بین می‌برد. اما در اینجا مکانیسم کسب چنین اطلاعاتی حتی از طریق تداخل به‌دست نمی‌آید. این آزمایش توسط زو، وانگ و مندل انجام شده است [۹]. طرح‌واره این آزمایش در شکل ۹-۱۰ آمده است. توجه کنید که بدون اینکه سدکننده باریکه B مسیر غیرفعال مبدل فروافتی^۴ DC1 را سد کند، مدهای غیرفعال دو مبدل فروافتی هم‌جهت هستند.



شکل ۹-۱۰ طرح‌واره آزمایش زو، وانگ و مندل؛ مدی که با v نشان داده شده است، شامل حالت خلأست. B یک سدکننده باریکه است که می‌تواند به داخل (خارج) باریکه e حرکت داده شود.

آنچه اتفاق می‌افتد، به‌طور کیفی به‌شرح زیر است: فوتون‌ها از یک لیزر یون آرگون به تقسیم‌کننده باریکه A پمپ می‌شوند و از یکی از DC1 یا DC2 که هر دو از نوع I فرض می‌گردند، عبور می‌کنند. این مبدل‌های فروافتی با آهنگ تبدیل بسیار پایین، در حدود $\gamma = 10^{-6}$ زوج فوتون تولید می‌کنند. با تنظیم مناسب طول مسیرها و برداشتن سدکننده باریکه B، آشکارساز D_i که باریکه‌های غیرفعال هم‌جهت شده را رصد می‌کند،

1. Kwiat
2. Steinberg
3. chiao
4. Down-converter

نمی‌تواند تعیین کند در کدام بلور این تبدیل فروافتی رخ داده است (بلورها شفاف هستند). در نتیجه تداخل را می‌توان در آشکارساز D_s دید که یکی از خروجی‌های تقسیم‌کننده باریکه C که دو باریکه سیگنال به آن می‌تابد را رصد می‌کند. تداخل را می‌توان با تنظیم طول مسیر یا به‌طور معادل، تنظیم فاز φ مطابق شکل مشاهده کرد. تداخل چه باریکه‌های هم‌جهت‌شده غیرفعال رصد شوند یا خیر، اتفاق می‌افتد. لیکن اگر باریکه غیرفعال DC1 سد شود، آشکارسازی یک فوتون توسط D_i نشان‌دهنده این است که آن فوتون باید در DC2 تولید شده باشد و بدین معنی است که فوتون ورودی اولیه، مسیر پایین‌تر به DC2 را انتخاب کرده است. بدین ترتیب، اطلاعات کدام مسیر در دسترس است و تداخل در آشکارساز دیگر ناپدید می‌شود. وجه تمایز این آزمایش این است که باریکه‌های غیرفعال حتی در مسیرهایی که به تداخل منجر می‌شوند، نیستند.

حال سعی می‌کنیم این آزمایش را به‌طور کمی بفهمیم. با انتخاب نمادگذاری مدها مطابق شکل ۹-۱۰، حالت اولیه سیستم عبارت است از $|1\rangle_a |0\rangle_v$ و سایر مدها در حالت خلأ هستند. اولین تقسیم‌کننده باریکه باعث تبدیل زیر می‌شود:

$$|1\rangle_a |0\rangle_v \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_b |0\rangle_c + i |0\rangle_b |1\rangle_c). \quad (25-9)$$

حال در DC1 داریم $|1\rangle_e |1\rangle_d |0\rangle_b |0\rangle_a \rightarrow \gamma |0\rangle_b |1\rangle_d |1\rangle_e$ و به‌طور مشابه در DC2 داریم $|1\rangle_k |0\rangle_h |0\rangle_c$ بنابراین درست بعد از مبدل فروافتی داریم:

$$|\psi_{DC1,2}\rangle \sim \frac{\gamma}{\sqrt{2}} |0\rangle_b |0\rangle_c [|1\rangle_d |1\rangle_e |0\rangle_h |0\rangle_k + i |0\rangle_d |0\rangle_e |1\rangle_h |1\rangle_k]. \quad (26-9)$$

انتقال فاز در باریکه h نتیجه زیر را می‌دهد:

$$|\psi_{PS}\rangle \sim \frac{\gamma}{\sqrt{2}} |0\rangle_b |0\rangle_c [|1\rangle_d |1\rangle_e |0\rangle_h |0\rangle_k + i e^{i\varphi} |0\rangle_d |0\rangle_e |1\rangle_h |1\rangle_k]. \quad (27-9)$$

تقسیم‌کننده باریکه واقع در C تبدیل زیر را انجام می‌دهد:

$$\begin{aligned} |1\rangle_d |0\rangle_h &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_m |0\rangle_l + i |0\rangle_m |1\rangle_l), \\ |0\rangle_d |1\rangle_h &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_m |1\rangle_l + i |1\rangle_m |0\rangle_l), \end{aligned} \quad (28-9)$$

بدین ترتیب، در نهایت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\psi_{out}\rangle &\sim \frac{\gamma}{2} |0\rangle_b |0\rangle_c [|1\rangle_e |0\rangle_k (|1\rangle_m |0\rangle_l + i |0\rangle_m |1\rangle_l) \\ &\quad + i e^{i\varphi} |0\rangle_e |1\rangle_k (|0\rangle_m |1\rangle_l + i |1\rangle_m |0\rangle_l)]. \end{aligned} \quad (29-9)$$

حال اگر باریکه‌های غیرفعال کاملاً هم‌جهت شده باشند، مدهای e و k یکسان‌اند و این مد شامل یک فوتون است؛ یعنی می‌توان نوشت $|1\rangle_k \rightarrow |0\rangle_e |1\rangle_k, |1\rangle_e |0\rangle_k$ که منعکس‌کننده این واقعیت است که آشکارساز نمی‌تواند مشخص کند کدام مبدل فروافتی فوتون را تولید کرده است. بنابراین معادله ۹-۲۹ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_{\text{out}}\rangle \sim \frac{\gamma}{2} |0\rangle_b |0\rangle_c |1\rangle_k [(1 - e^{i\varphi}) |1\rangle_m |0\rangle_l + i(1 + e^{i\varphi}) |0\rangle_m |1\rangle_l]. \quad (۹-۳۰)$$

تجزیه حالت $|1\rangle_k$ که شامل فوتون حاصل از باریکه‌های غیرفعال هم‌جهت شده است در پیش‌بینی تداخل در شمارش‌های تک‌فوتونی نقش اساسی ایفا می‌کند. بنابراین دامنه احتمال برای اینکه D_s و D_i همراه با هم به ترتیب، تک‌فوتون‌هایی به‌طور مشترک در مدهای l و k آشکار کنند، برابر است با $i\gamma(1 + e^{i\varphi})/2$ و احتمال موردنظر نیز برابر است با

$$P(l_l, 1_k) \sim \frac{\gamma^2}{2} (1 + \cos \varphi), \quad (۹-۳۱)$$

که به‌وضوح شامل اطلاعات درباره فاز و از این‌رو، نشان‌دهنده اثرات تداخل است. درواقع از آنجا که حالت $|1\rangle_k$ در معادله ۹-۳۰ فاکتور گرفته شده است که نتیجه هم‌جهتی باریکه‌های e و k است، نیازی نیست که هیچ آشکارسازی‌ای روی باریکه‌های غیرفعال انجام شود؛ کافی است با D_s آشکارسازی انجام دهیم که در این صورت، احتمال آشکارسازی برای تک‌فوتون برابر است با

$$P(l_l) = P(l_l, 1_k) \sim \frac{\gamma^2}{2} (1 + \cos \varphi). \quad (۹-۳۲)$$

اما فرض کنید سدکننده باریکه B را که درواقع می‌تواند یک آینه باشد که فوتون در مد e را منعکس و از آشکارساز دور می‌کند، در مسیر باریکه قرار دهیم. در هر صورت، باریکه‌های غیرفعال e و k دیگر هم‌جهت نیستند و در نتیجه نمی‌توان حالت‌های این مدها را در معادله ۹-۲۹ فاکتور گرفت. احتمال یافتن شمارش هم‌زمان توسط D_s و D_i برابر است با

$$P(l_l, 1_k) \sim \left| \frac{ie^{i\varphi}\gamma}{2} \right|^2 = \frac{\gamma^2}{4}, \quad (۹-۳۳)$$

که در آن جمله تداخلی وجود ندارد. آشکارسازی یک فوتون توسط D_i لزوماً بدین معنی است که فوتون توسط DC2 تولید شده و در نتیجه اطلاعات درباره مسیر را می‌دهد. ترکیبات دیگری از آشکارسازی ممکن است، ولی احتمال همه آن‌ها یکسان است.

$$P(l_l, 1_k) = P(0_l, 0_k) = P(l_l, 0_k) = P(0_l, 1_k) \sim \frac{\gamma^2}{4}. \quad (۹-۳۴)$$

توجه کنید که فقدان آشکارسازی یک فوتون توسط D_i نیز اطلاعات کدام مسیر را می‌دهد. فرض کنید هیچ‌گونه اندازه‌گیری روی باریکه k انجام نشود. برای این کار کافی است آشکارساز D_i را برداریم. در این صورت، هیچ اطلاعی درباره‌ی کدام مسیر به دست نمی‌آوریم. آیا تداخل کوانتومی در شمارش‌های تک‌فوتونی توسط D_s احیا می‌شود؟ آشکارسازی یک حالت تک‌فوتونی در مد l را می‌توان با عملگر تصویری $|1\rangle_l\langle 1|$ نشان داد. از معادله ۹-۲۹ احتمال اینکه یک تک‌فوتون در مد l آشکار شود، برابر است با

$$P(1_l) = \langle \psi_{\text{out}} | 1_l \langle 1 | \psi_{\text{out}} \rangle \sim \frac{\gamma^2}{2}, \quad (9-35)$$

که می‌توان به سادگی آن را نشان داد. اما این هیچ‌گونه اطلاعات فازی دربر ندارد و بنابراین بازهم در شمارش تک‌فوتون در آشکارساز D_s هیچ تداخلی وجود ندارد. البته عقل متعارف می‌گوید که فقدان اطلاعات کدام مسیر یک شرط برای تداخل کوانتومی است. این شرط کافی نیست. در اینجا اطلاع کدام مسیر را نداریم، ولی هیچ تداخلی هم نداریم. این یک مثال دیگر و شاید چشمگیرتر از مثال قبلی است که نشان می‌دهد لزوماً داشتن اطلاعات کدام مسیر نیست که تداخل کوانتومی را از بین می‌برد، بلکه صرف توانایی داشتن چنین اطلاعاتی است که موجب آن می‌شود.

۹-۵- تونل زنی فوق‌نوری^۱ فوتون‌ها

یکی از کاربردهای جالب تداخل سنج HOM اندازه‌گیری زمان تونل‌زنی یک فوتون از داخل یک سد است. تونل‌زنی که یکی از برجسته‌ترین پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی است، البته صرفاً یک پدیده کوانتومی است و هیچ مشابه کلاسیکی ندارد. یک سؤال دیرپا این است که زمان چیست؟، زمان تونل‌زنی برای یک ذره از داخل سد چقدر است؟ پاسخ‌ها به این سؤال در طول سالیان، متعدد بوده است و ما قصد پرداختن به آن‌ها را نداریم (برای این منظور، مرجع [۱۰] را ببینید). اما اذعان می‌کنیم که از تداخل سنج HOM می‌توان برای اندازه‌گیری زمان تونل‌زنی فوتون‌ها به طریقی که با ابزار آزمایشگاهی الکترونیک معمولی ممکن نیست، استفاده کرد؛ این ابزارها خیلی گند هستند. نکته کلیدی در اینجا نیز این است که فوتون‌های سیگنال و غیرفعال به‌طور هم‌زمان تولید می‌شوند.

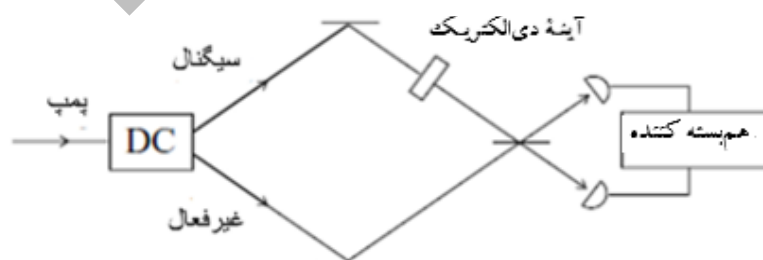
بنابراین بار دیگر تداخل سنج HOM را در نظر می‌گیریم، ولی این بار مطابق شکل ۹-۱۱ یک سد تونل‌زنی در بازوی سیگنال قرار می‌دهیم. در آزمایش استاینبرگ، گیات و چیا [۱۱] سد انتخاب‌شده یک ماده فوتونیک یک‌بعدی با نوار ممنوعه^۲ بود که از یک آینه عایق چندلایه با ضخامت $d = 1.1 \mu m$ تشکیل شده بود. برای ذره‌ای که با سرعت نور c حرکت می‌کند، زمان طی این سد برابر $d/c = 3.6 fs$ است. البته با در نظر گرفتن ضریب شکست، این مدت زمان طولانی‌تر می‌شود.

1. superluminal

2. one-dimensional photonic band-gap material

فرض کنید تداخل سنج HOM، بدون سد، طوری تنظیم شده باشد که هیچ شمارش هم‌زمانی توسط آشکارسازها وجود نداشته باشد: فوتون‌های سیگنال و غیرفعال هر دو هم‌زمان به تقسیم‌کننده باریکه برسند. حال سد را قرار می‌دهیم. در وهلهٔ اول و ساده‌انگارانه ممکن است انتظار داشته باشیم ابتدا فوتون مد‌غیرفعال به تقسیم‌کننده باریکه برسد. اما این نمونهٔ دیگری است که برداشت ساده‌انگارانه جواب نمی‌دهد. اگر بنا باشد ابتدا غیرفعال به تقسیم‌کننده باریکه برسد، باید انتظار داشته باشیم که بتوان با افزایش طول، مسیر تعادل را بازیابی کرد (هیچ شمارش هم‌زمان نداشته باشیم). ولی آزمایش‌ها نشان می‌دهد این طول مسیر سیگنال است که باید افزایش یابد و نشان می‌دهد ابتدا فوتونی که از سد عبور می‌کند، به تقسیم‌کننده باریکه می‌رسد. درواقع به نظر می‌رسد فوتون‌هایی که تونل می‌زنند، با سرعتی بیش از سرعت نور در حدود $1.7c$ حرکت می‌کنند.

نیازی به گفتن نیست که تعبیر این نتیجه به مناقشات زیادی منجر شده است! توضیح متداول این اثر به صورت زیر است: زمان گسیل فوتون (یا زوج فوتون) دقیقاً معلوم نیست. از این رو، مکان دقیق آن را نیز نمی‌دانیم، گرچه می‌توان مکان آن را توسط یک توزیع احتمال گاوسی - یک بسته موج گاوسی توصیف کرد. به خاطر هم‌بستگی‌های بین فوتون‌ها، هر دو دارای بسته موج‌های گاوسی یکسانی خواهند بود. اما بسته موجی که به سد برخورد می‌کند شکافته می‌شود، قسمت عمدهٔ آن منعکس می‌گردد و بخش بسیار کوچکی عبور می‌کند. این دو بسته موج هر دو یک فوتون را توصیف می‌کنند. در اکثر اوقات فوتون منعکس شده است. تصور می‌شود بخشی که نمایندهٔ تونل‌زنی فوتون از داخل سد است، در نتیجهٔ تغییر شکل پالس، عمدتاً از قسمت جلوی بسته موج اولیه تشکیل شده باشد. بنابراین آن قسمت از بسته موج، به دلیل عدم قطعیت در زمان تولید فوتون‌ها، قبل از مرکز بسته موج باریکهٔ دیگر به تقسیم‌کننده می‌رسد. هیچ‌گاه هیچ فوتونی با سرعتی بیش از سرعت نور حرکت نمی‌کند و مطمئناً نمی‌توان از این پدیده برای علائم سریع‌تر از نور استفاده کرد. لیکن این توضیحات همه را قانع نکرده و مناقشه پابرجاست [۱۲]. در بخش ۹-۷ پیامد دیگری از عدم قطعیت در زمان تولید زوج فوتون‌ها را بررسی خواهیم کرد. هم‌بسته کننده



شکل ۹-۱۱ آزمایش بررسی تونل‌زنی فوق‌نوری فوتون‌ها؛ وقتی سد در باریکهٔ سیگنال قرار داده شود، طول مسیر باریکه باید افزایش یابد تا حذف هم‌زمانی فوتون بعد از تقسیم‌کننده باریکه حاصل شود.

۹-۶ تست اپتیکی نظریه‌های واقع‌بینانه موضعی و قضیه بل

قبلاً نشان دادیم که چگونه می‌توان با قرار دادن یک چرخنده $\frac{\pi}{2}$ در یکی از باریک‌ها، حالت بل $|\Psi^-\rangle$ را از تبدیل فروافتی نوع I تولید کرد. سایر حالت‌های بل را نیز می‌توان از طریق شکل‌های دیگر تبدیل فروافتی تولید کرد. به عنوان مثال، می‌توان دو مبدل فروافتی نوع I را که محورهای اپتیکی آن‌ها نسبت به یکدیگر 90° است، ردیف و با فوتون‌هایی که قطبش آن‌ها نسبت به محور اپتیکی بلورها 45° است، پمپ کرد [۱۳]. این چشمه یک منبع روشن برای نور درهم‌تنیده است. این ترکیب می‌تواند حالت‌های بل $|\Phi^\pm\rangle$ را تولید کند. تبدیل فروافتی نوع II که توسط هامیلتونی ۹-۶ توصیف می‌شود، می‌تواند هریک از چهار حالت بل را تولید کند [۱۴].

حال فرض کنید برای یک انتخاب مشخص بتوانیم حالت بل

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 - |V\rangle_1|H\rangle_2) \quad (۹-۳۶)$$

را از طریق یک فرایند تبدیل فروافتی تولید کنیم. به علاوه، در هریک از مدها حالت‌های قطبیده در امتداد و عمود بر راستاهای θ (برای مد ۱) و ϕ (برای مد ۲) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\theta\rangle_1 &= \cos\theta|H\rangle_1 + \sin\theta|V\rangle_1, \\ |\theta^\perp\rangle_1 &= -\sin\theta|H\rangle_1 + \cos\theta|V\rangle_1, \\ |\phi\rangle_2 &= \cos\phi|H\rangle_2 + \sin\phi|V\rangle_2, \\ |\phi^\perp\rangle_2 &= -\sin\phi|H\rangle_2 + \cos\phi|V\rangle_2. \end{aligned} \quad (۹-۳۷)$$

بر حسب این حالت‌ها می‌توان نوشت:

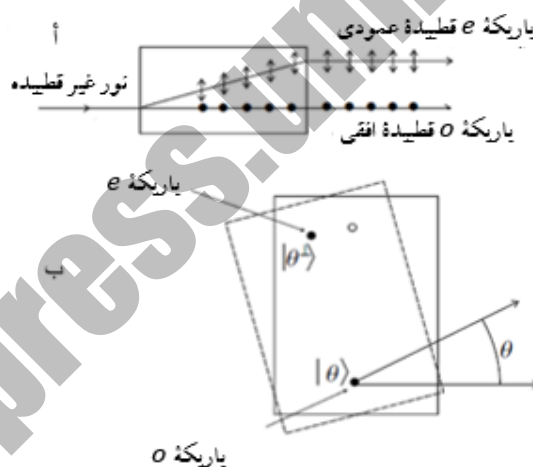
$$\begin{aligned} |\Psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi)|\theta\rangle_1|\phi\rangle_2 \\ &\quad + (\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)|\theta\rangle_1|\phi^\perp\rangle_2 \\ &\quad - (\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi)|\theta^\perp\rangle_1|\phi\rangle_2 \\ &\quad - (\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi)|\theta^\perp\rangle_1|\phi^\perp\rangle_2\}. \end{aligned} \quad (۹-۳۸)$$

برای انتخاب $\phi = \theta$ نتیجه بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\theta\rangle_1|\theta^\perp\rangle_2 - |\theta^\perp\rangle_1|\theta\rangle_2), \quad (۹-۳۹)$$

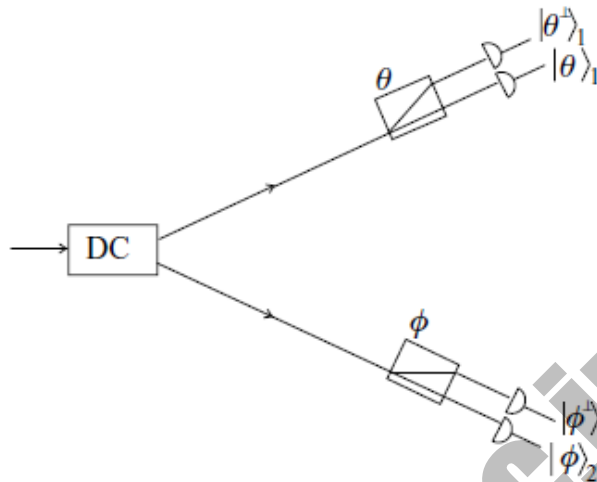
که نشان‌دهنده ناوردایی دَوْرانی $|\Psi^-\rangle$ است. حالت $|\Psi^-\rangle$ به طور ریاضی هم‌ارز یک حالت اسپینی یگانه است؛ یک حالت با اسپین صفر که از دو ذره با اسپین‌های $2/1$ تشکیل شده است. سایر حالت‌های بل ناوردای دَوْرانی نیستند. وجود یا فقدان این ویژگی، به آنچه در ادامه می‌آید ارتباطی ندارد.

اکنون در موقعیتی هستیم که در مورد محک زدن مکانیک کوانتومی در مقابل پیش‌بینی‌های نظریه‌های واقع‌بینانه موضعی کوانتومی از طریق قضیه‌ای که چهل سال قبل توسط جان بل اعلام شد، بحث کنیم [۱]، اما ابتدا باید توضیح دهیم چگونه حالت‌های قطبش فوتون را می‌توان اندازه گرفت. این عمل بسیار ساده و تنها نیازمند یک قطعه ماده دوشکستی (با ضریب شکست دوگانه) نظیر کلسیت که در اپتیک کلاسیک متداول است و چند آشکارساز فوتونی است. عمل بلور کلسیت روی یک باریکه نور غیرقطبیده این است که باریکه‌های قطبیده افقی و عمودی آن را از یکدیگر جدا می‌کند که در آن باریکه اولی که باریکه عادی (باریکه o) نامیده می‌شود، در راستای باریکه ورودی و باریکه دوم که باریکه غیرعادی (باریکه e) نامیده می‌شود در راستایی دیگر مطابق شکل ۹-۱۲ (أ) حرکت می‌کند. در عمل، حالت قطبش یک تک‌فوتون با مشاهده اینکه کدام باریکه آن را صادر کرده است تعیین می‌شود: اگر در باریکه o باشد، حالت آن $|H\rangle$ و اگر در باریکه e باشد، $|V\rangle$ است. اگر بلور کلسیت را حول باریکه ورودی دوران دهیم، باریکه o تغییر نمی‌کند، درحالی که باریکه e مطابق شکل ۹-۱۲ (ب) دوران می‌یابد. برای یک بلور که به اندازه زاویه θ دوران یافته باشد، تک‌فوتون‌هایی که در باریکه o قرار دارند، در حالت $|\theta\rangle$ و آن‌هایی که در باریکه e قرار دارند، در حالت $|\theta^\perp\rangle$ هستند.



شکل ۹-۱۲. أ. یک ماده دوشکستی نظیر بلور کلسیت، باریکه غیرقطبیده را به دو باریکه با قطبش‌های متعامد تجزیه می‌کند. باریکه o -منحرف نمی‌شود، درحالی که باریکه e -که قطبش آن عمود بر باریکه o -است، شکسته می‌شود. ب. بر اثر دوران بلور حول باریکه o قطبش‌های دو باریکه متعامد باقی می‌مانند.

فرض کنید یک حالت به شکل معادله ۹-۳۹ داریم و برای اندازه‌گیری قطبش‌ها، مطابق شکل ۹-۱۳ در هریک از باریکه‌ها بلور کلسیت قرار داده‌ایم. فرض کرده‌ایم باریکه‌ها در راستاهایی حرکت می‌کنند که دستگاه‌های اندازه‌گیری کلسیت از یکدیگر فاصله داشته باشند. ایدئال آن است که فاصله‌ها آن قدر زیاد باشند تا رویداد اندازه‌گیری در بازه فضا-زمان نسبت به هم فضاگونه باشند.



شکل ۹-۱۳ طرح‌وارهٔ تست قضیهٔ بل با استفاده از فوتون‌های تبدیل‌شدهٔ فروافتی؛ این مبدل می‌تواند از نوع II یا I باشد که در آن چرخندهٔ قطبش در یکی از باریکه‌ها قرار داده می‌شود.

با فرض اینکه چنین باشد و اینکه هر دو بلور کلسیت تحت زاویهٔ θ نسبت به افق قرار داشته باشند، آنچه رخ می‌دهد به شرح زیر است: اگر فوتون در مد I در حالت قطبش $|\theta\rangle_1$ قرار داشته باشد، فوتون دیگر در حالت $|\theta^\perp\rangle_2$ آشکار خواهد شد و برعکس. البته این امر ناشی از هم‌بستگی‌های قوی‌ای است که در حالت ۹-۳۹ وجود دارد. اما در اینجا رمزورازی وجود دارد که به اساس تغییر بردار حالت در مکانیک کوانتومی برمی‌گردد. آیا حالتی که توسط ۹-۳۹ بیان شده بدین معنی است که برای یک زوج معین از فوتون‌ها، قطبش هر کدام در زمان تشکیل به صورت $|\theta\rangle_1|\theta^\perp\rangle_2$ یا $|\theta^\perp\rangle_1|\theta\rangle_2$ بوده است و اندازه‌گیری‌ها صرفاً آن‌ها را آشکار می‌کنند یا این خود اندازه‌گیری است که به‌طور تصادفی یکی از فوتون‌ها را به یک حالت قطبش ویژه می‌برد و دیگری را که در فاصلهٔ بسیار دوری از آن قرار دارد، وادار می‌کند به حالتی با قطبش عمود برود؟ اگر مورد دوم درست باشد، به نظر می‌رسد به‌نوعی نقض موضعیت باید دخیل باشد. اگر اندازه‌گیری‌ها در یک بازهٔ فضاگونه انجام شوند، چگونه فوتون‌های دور از هم «بدانند» آشکارسازها چه حالت‌هایی را باید ببینند تا اینکه هم‌بستگی‌های موجود بین دو ذره در حالت درهم‌تنیده $|\Psi^-\rangle$ حفظ شود؟ ولی هنوز راز بیشتری وجود دارد. برای اینکه نشان دهیم قطبش فوتون با مورد اسپین ۲/۱ یک ریخت^۱ است، عملگرهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_1 &= |\theta\rangle\langle\theta^\perp| + |\theta^\perp\rangle\langle\theta|, \\ \hat{\Sigma}_2 &= -i(|\theta\rangle\langle\theta^\perp| - |\theta^\perp\rangle\langle\theta|), \\ \hat{\Sigma}_3 &= |\theta\rangle\langle\theta| - |\theta^\perp\rangle\langle\theta^\perp|,\end{aligned}\tag{۹-۴۰}$$

1. isomorphic

که در جبر $[\hat{\Sigma}_i, \hat{\Sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\Sigma}_k$ صدق می‌کنند، همان جبری که عملگرهای اسپینی پاولی در آن صدق می‌کنند. بنابراین اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نسبت به مؤلفه‌های قطبش نقش ایفا می‌کند. اگر به‌عنوان مثال، بدانیم فوتون در حالت $|\theta\rangle$ است که برای $\hat{\Sigma}_3$ مقدار ۱ را می‌دهد، مقادیر $\hat{\Sigma}_1$ و $\hat{\Sigma}_2$ نامعین هستند؛ زیرا با یکدیگر و $\hat{\Sigma}_3$ جابه‌جاپذیر نیستند. اما در مورد حالت بل (۹-۳۹) وضعیت زیر را داریم. اگر مد ۱ به‌عنوان مثال، در حالت $\theta > 1$ آشکار شده باشد، اگر یک اندازه‌گیری روی باریکه ۲، وقتی کلسیت تحت همان زاویه θ باشد، انجام گیرد، نتیجه قطعاً $|\theta^\perp\rangle_2$ خواهد بود. اما اگر چنین آزمایشی انجام ندهیم، آیا می‌توان نتیجه‌گیری کرد که فوتون باید در حالت $|\theta^\perp\rangle_2$ باشد؟ اگر چنین نتیجه‌ای بگیریم، یعنی اینکه فوتون در مد ۲ در ویژه‌حالت $|\theta^\perp\rangle_2$ عملگر «اسپینی» $\hat{\Sigma}_3^{(2)}$ آن مد است؛ در این صورت اگر یک اندازه‌گیری دیگر (به‌عنوان مثال، عملگر $\hat{\Sigma}_1^{(2)}$) را انجام دهیم، فوتون را در یکی از ویژه‌حالت‌های آن عملگر خواهیم یافت که این امر بر این دلالت دارد که رابطه عدم قطعیت نقض شده است؛ زیرا این عملگرها با هم جابه‌جاپذیر نیستند.

معمای بیان‌شده در بحث بالا ابتدا در ۱۹۳۵، به‌صورتی متفاوت از سوی اینشتین، پادولسکی و روزن (15) [EPR] و بعداً در قالب یک حالت یگانه اسپین که از نظر ریاضی با حالت‌های قطبش بالا یکسان است، توسط بوهم [۱۶] ارائه شد. در اینجا با دو مسئله روبه‌رو هستیم: ۱- مسئله موضعیت و ۲- مسئله منتسب کردن مقادیر معین به مشاهده‌پذیرها در تمام زمان‌ها، مسئله «واقع‌بینی»، آنچه EPR به آن «عناصر واقعیت» می‌گفتند. فقدان عناصر واقعیت معین، EPR را به این نتیجه رساند که مکانیک کوانتومی بایستی یک نظریه ناکامل باشد. در مورد موضوع موضعیت، انتظار داریم یک تئوری فیزیکی معقول، موضعی باشد. یعنی نباید اثراتی را پیش‌بینی کند که پیامد فیزیکی‌ای، نظیر علائم فوق‌نوری باشد. یک استدلال کلاسیکی مانند می‌تواند به‌عنوان مکمل با پیشنهاد وجود «متغیرهای نهان»، مکانیک کوانتومی را کامل کند. در ۱۹۵۲ بوهم [۲] یک نظریه متغیرهای نهان معرفی کرد که تمام نتایج مکانیک کوانتومی را بازتولید می‌کرد، ولی غیر موضعی بود، بل در ۱۹۶۴ [۱] توانست نشان دهد که نظریه‌های متغیرهای نهان موضعی پیش‌بینی‌هایی می‌کنند که با پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی متفاوت است و بنابراین راهی پیدا کرد که نشان دهد یا مکانیک کوانتومی درست است یا نظریه‌های متغیرهای نهان موضعی.

برای دیدن اینکه چگونه این حاصل می‌شود، روش بل را به کار می‌بریم و تابع هم‌بستگی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$C(\theta, \phi) = \text{Average}[A(\theta)B(\phi)], \quad (9-41)$$

که در آن میانگین‌گیری روی تکرار تعداد زیادی آزمایش است. اگر فوتون ۱ در باریکه ۰- (یعنی در حالت $|\theta > 1\rangle$) باشد، $A(\theta) = +1$ و اگر در باریکه ۰- (یعنی در حالت $|\theta^\perp\rangle_1$) باشد، $A(\theta) = -1$ است. تعریف مشابهی برای $B(\phi)$ نسبت به فوتون ۲ برقرار است. اما برای مقدار حاصل ضرب $A(\theta)B(\phi)$ ، اگر این مقدار

برابر با ۱+ باشد، زوج حالت‌های خروجی $|\theta\rangle_1|\phi\rangle_2$ و $|\theta^\perp\rangle_1|\phi\rangle_2$ خواهند بود و اگر برابر ۱- باشد، حالت‌های خروجی $|\theta\rangle_1|\phi^\perp\rangle_2$ و $|\theta^\perp\rangle_1|\phi^\perp\rangle_2$ هستند؛ در این صورت، مقدار میانگین برابر است با

$$C(\theta, \phi) = \text{Pr}(|\theta\rangle_1|\phi\rangle_2) + \text{Pr}(|\theta^\perp\rangle_1|\phi^\perp\rangle_2) - \text{Pr}(|\theta\rangle_1|\phi^\perp\rangle_2) - \text{Pr}(|\theta^\perp\rangle_1|\phi\rangle_2), \quad (۴۲-۹)$$

که در آن $\text{Pr}(|\theta\rangle_1|\phi\rangle_2)$ عبارت است از احتمال اینکه خروجی $|\theta\rangle_1|\phi\rangle_2$ باشد و غیره. برای حالت $|\Psi^-\rangle$ در معادله ۹-۳۸ می‌توان دامنه‌های احتمال را به دست آورد و پس از کمی محاسبه ریاضی نتیجه گرفت که

$$C(\theta, \phi) = -\cos[2(\theta - \phi)]. \quad (۴۳-۹)$$

همین نتیجه از مقدار چشمداشتی به دست می‌آید.

$$C(\theta, \phi) = \langle \Psi^- | \sum_3^{(1)}(\theta) \sum_3^{(2)}(\phi) | \Psi^- \rangle = -\cos[2(\theta - \phi)], \quad (۴۴-۹)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \sum_3^{(1)}(\theta) &= |\theta\rangle_{11}\langle\theta| - |\theta^\perp\rangle_{11}\langle\theta^\perp|, \\ \sum_3^{(2)}(\phi) &= |\phi\rangle_{22}\langle\phi| - |\phi^\perp\rangle_{22}\langle\phi^\perp|, \end{aligned} \quad (۴۵-۹)$$

تصویرهای «اسپین» در راستای محور فرضی «۳» است. بدیهی است که ویژه‌مقدارهای این عملگرها همان اعدادی‌اند که برای $A(\theta)$ و $B(\phi)$ در بالا داده شده‌اند. بنابراین تابع هم‌بستگی ۹-۴۳ یک پیش‌بینی سرراست مکانیک کوانتومی است.

برای اینکه موضعیت را وارد کنیم، فرض می‌کنیم متغیرهای نهانی وجود دارند که آن‌ها را با λ نشان می‌دهیم و نقش آن‌ها این است که هم‌بستگی بین زوج فوتون‌ها وقتی خلق شدند را تعیین کنند. این متغیرها ممکن است از یک اجرای آزمایش به اجرای دیگر تغییر کنند، ولی مقادیر $A(\theta)$ و $B(\phi)$ باید به متغیرهای نهان در یک اجرای معین بستگی داشته باشند. بنابراین باید آن‌ها را به صورت $A(\theta, \lambda)$ و $B(\phi, \lambda)$ بنویسیم، ولی باز هم $A(\phi, \lambda) = \pm 1$ و $B(\phi, \lambda) = \pm 1$ هستند. بر طبق اصل موضعیت، نتیجه اندازه‌گیری روی یک فوتون نمی‌تواند به زاویه کلسیت در اندازه‌گیری فوتون دیگر بستگی داشته باشد و برعکس. به همین دلیل توابع را به صورت $A(\theta, \phi, \lambda)$ و $B(\theta, \phi, \lambda)$ نمی‌نویسیم. فرض می‌کنیم برای تعداد زیادی اجرای آزمایش، $\rho(\lambda)$ معرف توزیع احتمال برای متغیرهای نهان λ باشد، به طوری که

$$\int \rho(\lambda) d\lambda = 1. \quad (۴۶-۹)$$

بنابراین برای نظریه متغیرهای نهان موضعی، تابع هم‌بستگی به صورت زیر است:

$$C_{HV}(\theta, \phi) = \int A(\theta, \lambda) B(\phi, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (۴۷-۹)$$

باید تعیین کنیم آیا این عبارت با عبارت مکانیک کوانتومی در ۴۳-۹ سازگار است یا خیر. برای این منظور، به نتیجه ساده ریاضی زیر نیاز داریم: اگر $X_1, X'_1, X_2, X'_2 = \pm 1$ باشند، داریم:

$$\begin{aligned} S &= X_1 X_2 + X_1 X'_2 + X'_1 X_2 - X'_1 X'_2 \\ &= X_1(X_2 + X'_2) + X'_1(X_2 - X'_2) = \pm 2, \end{aligned} \quad (۴۸-۹)$$

که به سادگی می‌توان آن را نشان داد. اگر $X_1 = A(\theta, \lambda)$ ، $X'_1 = A(\theta', \lambda)$ ، $X_2 = B(\phi, \lambda)$ ، $X'_2 = B(\phi', \lambda)$ قرار دهیم و در $\rho(\lambda)$ ضرب کنیم و روی λ انتگرال بگیریم، داریم:

$$-2 \leq C_{HV}(\theta, \phi) + C_{HV}(\theta', \phi) + C_{HV}(\theta', \phi) - C_{HV}(\theta', \phi') \leq +2. \quad (۴۹-۹)$$

این یک نامساوی بل است که توسط کلوزر^۱، هورن^۲، شیمونی^۳ و هالت^۴ [۱۷] به دست آمده است و به اختصار آن را نامساوی CHSH می‌نامند. اگر $\theta = 0$ ، $\theta' = \pi/4$ ، $\phi = \pi/8$ و $\phi' = -\pi/8$ قرار دهیم، از تابع هم‌بستگی مکانیک کوانتومی (۴۳-۹) به دست می‌آوریم:

$$S = C(\theta, \phi) + C(\theta', \phi) + C(\theta', \phi) - C(\theta', \phi') = 2\sqrt{2}, \quad (۵۰-۹)$$

نتیجه‌ای که به وضوح در خارج از محدوده‌ای است که نامساوی ۴۹-۹ که از نظریه متغیر نهان موضعی به دست آمده، وضع کرده است. این نقض نامساوی CHSH بدین معنی است که نتیجه مکانیک کوانتومی نمی‌تواند توسط هیچ نظریه متغیر نهان موضعی‌ای توصیف شود. البته داور نهایی در این باره آزمایش است.

تست‌های تجربی نامساوی‌هایی از نوع بل با نور قطبیده که از گذارهای آبهاری اتمی $J = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ در کلسیم حاصل می‌گردد، در دهه ۱۹۷۰ با آزمایش فریدمن^۵ و کلوزر [۱۸] آغاز و در سال ۱۹۸۲ با آزمایش‌های اسپه^۶ و همکاران کامل شدند [۱۹] و [۲۰]. در آزمایش‌های اسپه، آنالیزور قطبش در حالی که فوتون‌ها در حرکت بودند، دَوَران می‌کرد. پس از آن و به طور مستقل، اوو مندل [۲۱] و شی^۷ و آلی^۸ [۲۲] اولین تست را با استفاده از تبدیل فروافتی به عنوان چشمه فوتون‌های قطبیده درهم‌تنیده انجام دادند.

اغلب این آزمایش‌ها نقض نامساوی‌ها را نشان می‌دادند، ولی برای این کار فرضیات اضافی در مورد تجزیه و تحلیل داده‌ها مورد استفاده قرار گرفت. در هر آزمایش واقعی که با فوتون‌ها انجام می‌شود، باید بازدهی آشکارساز را (که آن را با η_{det} نشان می‌دهیم و هرگز مقدار ایدئال $\eta_{det} = 1$ را ندارد) در نظر بگیریم، هر چند

1. Clauser
2. Horne
3. Shimony
4. Holt

5. Freedman
6. Aspect
7. Shih
8. Alley

در به دست آوردن نتایج بالا برعکس آن فرض کرده ایم. برای حالت غیرایده‌آل، معادله ۹-۴۳ باید با رابطه زیر جایگزین شود:

$$C(\theta, \phi) = -\eta_{det}^2 \cos[2(\theta - \phi)]. \quad (۹-۵۱)$$

زیرا هر جمله در معادله ۹-۴۲ باید در η_{def}^2 ضرب شود و این ناشی از این واقعیت است. که هر جمله احتمال مشترک دو اندازه گیری است و عامل η_{det} از هریک از اندازه گیری‌ها ظاهر می‌شود. بنابراین از معادله ۹-۵۱ داریم $S = \eta_{def}^2 2\sqrt{2}$. توجه کنید که نامساوی بل هرگاه $S > 2$ باشد، نقض می‌شود. بدیهی است برای اینکه نقض موردنظر حاصل شود، باید بازده آشکارساز را مقدار $\eta_{det} > 1/\sqrt[4]{2} \approx 0.84$ قرار دهیم.

با آشکارسازهای ناکارآمد، همه زوج فوتون‌ها شمرده نمی‌شوند. در یک آزمایش عملی لازم است یک فرض مکمل تست‌ناپذیر وارد کنیم. این فرض این است که آشکارسازها یک نمونه‌گیری مناسب از مجموعه تمام رویدادها انجام دهند. یعنی رویدادهایی که برای آن‌ها هر دو فوتون آشکار شده‌اند، معرف کل مجموعه باشند. بنابراین تابع هم‌بستگی را به صورت زیر بازتعریف می‌کنیم:

$$C(\theta, \phi) = \frac{\text{Average}[A(\theta)B(\phi)]}{\text{Average}[N_1 N_2]} \quad (۹-۵۲)$$

که در آن N_1 تعداد کل فوتون‌های آشکارشده در باریکه ۱ (در هر دو آزمایش $N_1 = 1$ یا $N_1 = 0$) است و به طور مشابه، برای N_2 که در آن

$$\begin{aligned} \text{Average}[N_1 N_2] = & \Pr(\theta, \phi) + \Pr(\theta^\perp, \phi^\perp) \\ & + \Pr(\theta, \phi^\perp) + \Pr(\theta^\perp, \phi). \end{aligned} \quad (۹-۵۳)$$

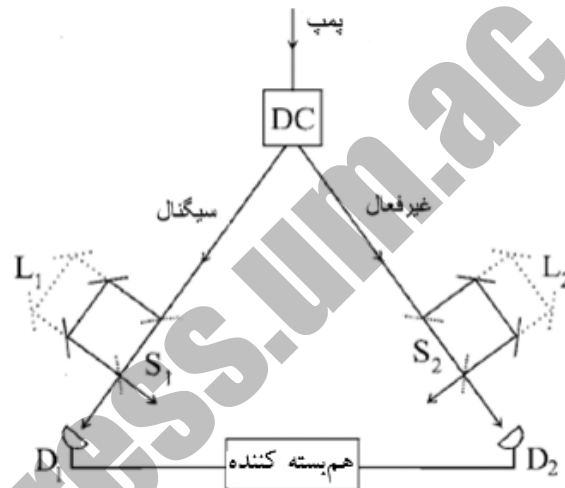
چون هم صورت و هم مخرج با η_{def}^2 متناسب هستند، تابع هم‌بستگی مستقل از آن است. با این فرض مناسب نمونه‌گیری، CHSH برای نامساوی بل برطبق مکانیک کوانتومی برای آشکارسازها با هر بازدهی نقض می‌شود. البته در تشریح این آزمایش‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌سازی کرده ایم. با وجود این، انجام این آزمایش‌ها و آزمایش‌های نظیر آن خیلی پیچیده نیست و حتی می‌توان آن‌ها را با هزینه متوسط در آزمایشگاه‌های دوره‌های کارشناسی انجام داد. دلینجر^۱ و میچل^۲ [۲۳] دستگاهی برای تولید حالت‌های قطبیده-درهم تنیده توصیف کرده‌اند که می‌تواند نقض نامساوی‌های بل را در آزمایشگاه‌های دوره کارشناسی نشان دهد. روش آن‌ها این است که از دو مبدل فروافتی BBO نوع I استفاده کرده‌اند که روبه‌روی هم قرار گرفته‌اند و مبدل فروافتی BBO دوم نسبت به عمود بر مبدل فروافتی BBO اول به اندازه 90° دوران یافته است. یک باریکه نور قطبیده 45° که از یک لیزر دیود تولید شده است، به بلورها تابانده می‌شود. این سیستم یک حالت درهم‌تنیده به صورت زیر تولید می‌کند:

1. Dehlinger

2. Mitchell

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|H\rangle_2 + |V\rangle_1|V\rangle_2). \quad (۵۴-۹)$$

این الگوی دوبلوری که توصیف شد، یک روش کارا برای تولید حالت‌های قطبیده است و اولین بار از سوی کیات و همکاران به کار رفت [۲۴]. نتایج آن‌ها با انحراف معیار ۲۱ نامساوی بل را نقض می‌کند. همه آزمایش‌هایی که نقض یک نوع نامساوی بل را نشان می‌دهند، از نور تبدیل‌شده فروافتی که شامل درهم‌تنیدگی قطبش هستند، استفاده نمی‌کنند. راریتی^۱ و تپستر^۲ [۲۵] با باریکه‌های درهم‌تنیده تکانه آزمایش‌هایی انجام داده‌اند. در آزمایش دیگری که توسط فرانسون^۳ [۲۶] پیشنهاد شد، از عدم قطعیت انرژی-زمان استفاده شده است که در بخش بعدی آن را مورد بحث قرار می‌دهیم.



شکل ۹-۱۴ طرح‌واره آزمایش فرانسون؛ طول مسیرهای تداخل‌سنج مطابق آنچه گفته شد، قابل تنظیم است.

۹-۷ آزمایش فرانسون

طرح آزمایشی شکل ۹-۱۴ را در نظر بگیرید. یک زوج فوتون سیگنال و غیرفعال به‌طور هم‌زمان توسط مبدل فروافتی تولید و به سمت تداخل‌سنج‌ها هدایت می‌شوند. هیچ تداخل تک‌فوتونی در داخل یک تداخل‌سنج منفرد وجود ندارد؛ زیرا طول‌های هم‌دوسی فوتون خیلی کوچک‌تر از اختلاف طول بین مسیر بازوهای تداخل‌سنج‌ها هستند. اما در آشکارسازی هم‌زمان بین دو آشکارساز D_1 و D_2 تداخل دوفوتونی وجود دارد. برای اینکه ببینیم چگونه این اتفاق می‌افتد، مراحل زیر را توضیح می‌دهیم. فوتون‌ها برای اینکه به آشکارسازها برسند، می‌توانند هر دو مسیرهای کوتاه (S, S) هر دو مسیرهای بلند (L, L) ، مسیرهای بلند-کوتاه (S, L) یا مسیرهای

1. Rarity
2. Tapster

3. Franson

کوتاه-بلند (L, S) را انتخاب کنند. دو مورد اول از یکدیگر قابل تشخیص نیستند؛ زیرا نمی‌دانیم چه زمانی دو فوتون خلق شده‌اند. اگر طول مسیرها در دو تداخل‌سنج یکسان باشد، هر دو آشکارساز به‌طور هم‌زمان علامت می‌دهند. دو مورد آخر از یکدیگر قابل تشخیص‌اند؛ زیرا آشکارساز فوتونی که مسیر کوتاه‌تری را طی کرده است، زودتر «علامت» می‌دهد. بنابراین دو مورد آخر از یکدیگر و از دو مورد اول که در آن آشکارسازها هم‌زمان علامت می‌دهند، قابل تشخیص‌اند. در شرایط آزمایشگاهی، الکترونیک سریع هم‌بسته‌کننده را برای یک بازه زمانی به‌اندازه کافی کوچک می‌توان طوری تنظیم کرد که شمارش‌های دو فرایند قابل تشخیص حذف شود. این عمل دارای این اثر است که حالت خروجی دو فوتون پس از اندازه‌گیری به‌صورت زیر باشد:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|S\rangle_1|S\rangle_2 + e^{i\Phi}|L\rangle_1|L\rangle_2), \quad (55-9)$$

که به‌وضوح یک حالت بل دیگر است که در آن فرض کرده‌ایم $S_1 = S_2 = S$ ولی L_1 و L_2 را می‌توان مطابق شکل ۹-۱۴ تنظیم کرد. فاز Φ ، فاز نسبی بین فرایندهای (S, S) و (L, L) عبارت است از مجموع فازهای نسبی کسب‌شده توسط هریک از فوتون‌ها

$$\begin{aligned} \Phi &= \omega_s \Delta L_1 / c + \omega_i \Delta L_2 / c \\ &= \frac{\omega_s + \omega_i}{2} (\Delta L_1 + \Delta L_2) + \frac{\omega_s - \omega_i}{2} (\Delta L_1 - \Delta L_2) \\ &\approx \frac{\omega_p}{2} (\Delta L_1 + \Delta L_2) \end{aligned} \quad (56-9)$$

که وقتی $\Delta L_1 - \Delta L_2$ در مقایسه با معکوس پهنای باند فرکانس‌های ω_s و ω_i ی سیگنال و غیرفعال کوچک باشد، معتبر است. البته فرکانس $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ همان فرکانس میدان پمپ‌شده است. حال اگر طبق نظر فاینمن، دامنه‌های وابسته به فرایندهای تشخیص‌ناپذیر را با هم جمع کنیم، احتمال آشکارسازی هم‌زمان دو فوتون برابر است با

$$\begin{aligned} P_{\text{coin}} &= \frac{1}{4} |1 + e^{i\Phi}|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos \Phi] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\omega_p}{2} (\Delta L_1 + \Delta L_2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (57-9)$$

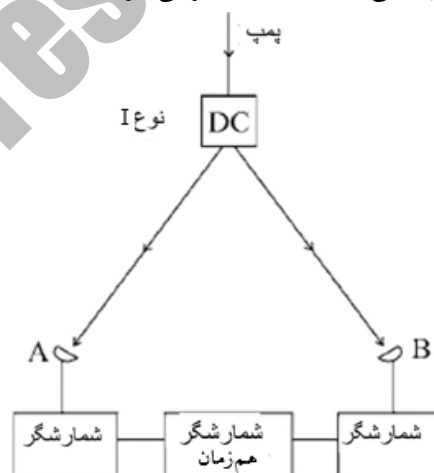
این نتیجه دارای قابلیت رؤیت صد درصد است، بدین معنی که کمینه احتمال آشکارسازی هم‌زمان صفر است. این به‌نوبه خود بدان معنی است که فوتون‌هایی که وارد تداخل‌سنج‌ها می‌شوند، پادهم‌بسته می‌گردند: اگر یکی مسیر کوتاه را انتخاب کند، دیگری مسیر بلند را انتخاب می‌کند و برعکس. معنی ماکزیمم این است که فوتون‌ها در تداخل‌سنج هم‌بسته می‌شوند: هر دو یا مسیر کوتاه را انتخاب می‌کنند یا مسیر بلند را. هیچ مدل کلاسیکی یا مدل متغیرهای نهان نمی‌تواند قابلیت رؤیت بزرگ‌تر از ۵۰٪ را پیش‌بینی کند. فرانژهای با قابلیت رؤیت بزرگ‌تر از ۷۰٪ نامساوی بل مانند را نقض می‌کنند. آزمایش‌های کیات و همکاران [۲۷] قابلیت رؤیت $80.4 \pm 0.6\%$ را

پیش‌بینی می‌کند. دیگر آزمایش‌هایی که آزمایش فرانسون را محقق می‌سازند، آزمایش‌هایی‌اند که توسط او و همکاران [۲۸]، برندل^۱ و همکاران [۲۹] و شی و همکاران [۲۹] انجام شده‌اند.

۸-۹ کاربرد نور تبدیل‌یافته فروافتی در مترولوژی بدون استانداردهای مطلق

بالاخره در این فصل به‌اختصار به کاربرد نور تبدیل‌یافته فروافتی در مسائل عملی می‌پردازیم. این کاربردها همان‌طوری که ابتدا توسط بارنهایم و واینبرگ نشان داده شده است [۳]، از این جهت که فوتون‌هایی که در خلال فرایند تبدیل فروافتی به‌طور خودبه‌خودی گسیل می‌شوند هم‌بستگی بالایی دارند، امکان‌پذیر است. مزیت استفاده از نور تبدیل‌یافته فروافتی، همان‌طوری که خواهیم دید، این است که اندازه‌گیری‌ها را می‌توان بدون نیاز به کالیبره شدن استاندارد به‌طور مطلق انجام داد.

ابتدا کالیبره کردن مطلق یک آشکارساز فوتونی را که اساساً عبارت است از اندازه‌گیری بازدهی کوانتومی مطلق آن، مورد بحث قرار می‌دهیم. طرح‌واره این اندازه‌گیری در شکل ۹-۱۵ آمده است. دو آشکارساز فوتونی یکسان را در خروجی یک مبدل فروافتی نوع I قرار می‌دهیم. آشکارساز A را به‌عنوان آشکارسازی که باید کالیبره شود و آشکارساز B را به‌عنوان راه‌انداز^۲ در نظر می‌گیریم (هر کدام می‌توانند جای دیگری قرار گیرند). چون مبدل فروافتی فوتون‌ها را به‌صورت زوج تولید می‌کند، برای آشکارسازهای ایدئال، فوتون‌ها در هر دو بازو به‌طور هم‌زمان آشکار می‌شوند. اندازه‌گیری بازدهی کوانتومی بسیار ساده است. فرض کنید N تعداد زوج فوتون‌هایی باشد که توسط مبدل فروافتی تولید می‌شود. هرگاه آشکارساز B علامت دهد، آزمایشگر نگاه می‌کند تا ببیند آیا آشکارساز A نیز علامت می‌دهد. سپس کسری از آشکارسازی‌هایی که برای A و B به‌طور هم‌زمان اتفاق می‌افتد را به‌عنوان بازدهی آشکارساز A در نظر می‌گیرد.



شکل ۹-۱۵ طرح‌واره برای کالیبره کردن مطلق یک آشکارساز فوتونی

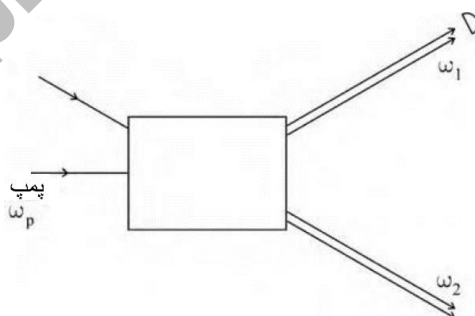
1. Brendel

2. trigger

این روش به دانستن بازدهی کوانتومی آشکارساز B نیاز ندارد. اگر هیچ آشکارسازی ای توسط B انجام نشود، آزمایشگر آشکارساز A را کنار می گذارد. از نظر کمی، اگر بازدهی های آشکارسازهای A و B را به ترتیب η_A و η_B بنامیم، تعداد فوتون های آشکار شده توسط هر کدام عبارت است از $N_A = \eta_A N$ و $N_B = \eta_B N$. تعداد شمارش های هم زمان برابر است با $N_C = \eta_A \eta_B N = \eta_A N_B$ و بنابراین $\eta_A = N_B / N_C$ که نشان می دهد مستقل از بازده کوانتومی آشکارساز B است. ایده پشت این نوع اندازه گیری ها به طور ضمنی در کار بارنهایم و واینبرگ [۳] آمده است. میگدال^۱ و همکاران [۳] در NIST این روش را در ۱۹۹۵ بررسی و آن را با یک روش متداول تر که شامل یک استاندارد بود، مقایسه کردند و به توافق خوبی دست یافتند.

یک کاربرد متروлоژی دیگر که مورد بحث قرار می دهیم، اندازه گیری تابندگی مطلق است. این کاربرد توسط کلیشکو^۲ [۳۲] پیشنهاد شد و برای اولین بار در ۱۹۷۹ در آزمایشگاه انجام گردید [۳۳]. در این آزمایش، تغییر فرایند تبدیل فروافتی پارامتری خود به خودی^۳ است که در آن باریکه نوری که قرار است تابندگی آن اندازه گیری شود (باریکه مجهول)، طوری تنظیم می شود که با یکی از باریکه های خروجی (به عنوان مثال، باریکه سیگنال) مبدل فروافتی، مطابق شکل ۹-۱۶، هم پوشانی پیدا کند. این سیستم از یک تقویت کننده پارامتری تشکیل شده است که وجود باریکه ورودی (مجهول) تولید زوج فوتون (که همیشه باید به صورت زوج تولید شوند) را تهییج می کند. این عمل در شکل ۹-۱۶ با خطوط دو گانه در خروجی ها مشخص شده است. ایده اصلی نظارت کردن بر خروجی باریکه غیر فعال و تعیین افزایش شدت تابش آن در رفتن از تبدیل فروافتی خود به خودی که در آن باریکه مجهول سد شده باشد، به تبدیل فروافتی القایی که در آن باریکه ورودی مجهول حضور دارد، است. نسبت شدت سیگنال های خروجی القایی و خود به خودی، تابندگی باریکه مجهول را می دهد. در این اندازه گیری، به استاندارد نیازی نیست.

کاربردهای مورد بحث در بالا شامل درهم تنیدگی نبودند. لیکن کاربردهایی که درهم تنیدگی در آن ها دخیل باشد و بنابراین به تبدیل فروافتی نوع II نیاز دارند نیز پیشنهاد شده است. یک نمونه به خصوص کاربرد بیضی سنجی^۴ است [۳۴]. برای مشاهده مراجع بیشتر به مقالات کتاب شناسی آخر فصل مراجعه کنید.



شکل ۹-۱۶ طرحواره برای اندازه گیری تابندگی مطلق

1. Migdal
2. Klyshko

3. Parametric down conversion
4. Ellipsometry

مسائل

۱- در بسط اختلالی معادله ۸-۹ تا مرتبه اول نسبت به خروجی مبدل فروافتی نوع I زوج حالت $|1\rangle_s |1\rangle_i$ وجود دارد.

ا. نشان دهید تا مرتبه دوم، خروجی زوج حالت $|2\rangle_s |2\rangle_i$ است.

ب. فرض کنید دو فوتون، هر کدام از یکی از حالت‌ها و هر دو به‌طور هم‌زمان به یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ بتابند. حالت‌های خروجی چه خواهند بود؟

ج. نشان دهید نتایجی که به‌دست آورده‌اید با نتایجی که به‌طور کلاسیکی با استفاده از توزیع دو جمله‌ای به‌دست می‌آید، مطابقت ندارد.

د. آزمایشی را طراحی کنید که بتواند تمایز بین پیش‌بینی‌های کوانتومی و کلاسیکی برای خروجی تقسیم‌کننده باریکه را نشان دهد (پس از کار روی این مسئله ممکن است بخواهید مقاله او، ری^۱ و وانگ [۳۵] را ببینید).

۲- نامساوی CHSH را با شروع از حالت بل زیر به‌دست آورید:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |V\rangle_2 + |V\rangle_1 |H\rangle_2)$$

۳- همان‌طوری که در این فصل و مراجع [۲۳] و [۲۴] ذکر شده است، می‌توان با استفاده از دو مبدل فروافتی نوع I که پشت‌به‌پشت یکدیگر قرار گرفته‌اند و یکی حول عمود بر دیگری به‌اندازه ۹۰° دوران یافته است و هر دو با نور قطبیده در ۴۵° پمپ شده‌اند، حالت بل

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 |H\rangle_2 + |V\rangle_1 |V\rangle_2)$$

را به‌دست آورید. درمورد امکان نقض نامساوی‌ها بل (به شکل CHSH) با این حالت بحث کنید.

۴- برای حالت $|\Psi^-\rangle$ مقدار زیر را در نظر بگیرید:

$$S_{\text{Bell}} \equiv |C(\theta, \phi) - C(\theta, \phi')| + |C(\theta', \phi') + C(\theta', \phi)|.$$

نشان دهید برای یک نظریه واقع‌بینانه موضعی که در آن $C(\theta, \phi)$ توسط $C_{\text{HV}}(\theta, \phi)$ جایگزین شده باشد، $S_{\text{Bell}} \leq 2$ است. مثالی پیدا کنید که مکانیک کوانتومی این نامساوی را نقض کند (این همان نامساوی است که بل ابتدا آن را مورد بحث قرار داد).

1. Rhee

مراجع

- [1] Bell, J. S. (1964). *Physics* (NY), 1, 195. See also Bell, J. S. *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1987).
- [2] Bohm D. (1952). *Phys. Rev.* 85, 166, 180.
- [3] Burnham D. C. and Weinberg D. L. (1970). *Phys. Rev. Lett.*, 25, 84.
- [4] Joobeur A., Saleh B. and Teich M. (1994). *Phys. Rev. A*, 50, 3349.
- [5] See, for example, R. W. Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear Optics*, 2nd edition (San Diego: Academic Press).
- [6] Hong C. K., Ou Z. Y. and L. Mandel. (1987). *Phys. Rev. Lett.*, 59, 2044. A related experiment was later performed by J. G. Rarity, P. R. Tapster, E. Jakeman, T. Larchuk, Campos R. A., Teich M. C. and Saleh B. E. A. (1990). *Phys. Rev. Lett.*, 65, 1348.
- [7] Kwiat P. G., Steinberg A. M. and Chiao R. Y. (1992). *Phys. Rev. A*, 45, 7729.
- [8] Greenberger D. M., Horne M. A and Zeilinger A. (1993). *Physics Today* (August), p. 22.
- [9] Zou X. Y., Wang L. J. and Mandel L. (1991). *Phys. Rev. Lett.*, 67, 318.
- [10] Chiao R. Y. and Steinberg A. M. (1997). *Progress in Optics XXXVII*, E. Wolf (editor) (Amsterdam: Elsevier), p. 345; Nimtz G. and W. Heitmann W., *Prog. Quant. Electr.*, 21 (1997), 81.
- [11] Steinberg A. M., Kwiat P. G. and Chiao R. Y. (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 71, 708.
- [12] See Winful H. (2003). *Phys. Rev. Lett.*, 90, 023901; B'uttiker H. and Washburn S. (2003). *Nature*, 422, 271; and the exchange between Winful and B'uttiker and Washburn. (2003). *Nature* 424, 638.

می‌توانید به هر کتاب درسی اپتیک نظیر

- [13] Pedrotti F. L. and Pedrotti L. S., *Introduction to Optics*, 2nd edition (Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993).

مراجعه کنید. برای بحث حالت‌های قطبیده تک‌فوتونی و کاربرد بلورهای کلسیت برای آشکارسازی آن‌ها، همراه با بحث پیرامون استفاده آن‌ها در روشن کردن چند جنبه معماگونه مکانیک کوانتومی به کتاب‌های زیر مراجعه کنید:

- French A. P. and Taylor E. F., *An Introduction to Quantum Physics* (New York: W. W. Norton, 1978), chapter 6
- [14] See Tittel W. and Weihs G., *Quant. Inf. Comp.*, 1 (2001), 3; Shih Y., *Rep. Prog. Phys.*, 66 (2003), 1009.
- [15] Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., *Phys. Rev.*, 47 (1935), 777.
- [16] Bohm D., *Quantum Theory* (New York: Prentice-Hall, 1951), chapter 22.
- [17] Clauser J. F., Horne M. A., Shimony A. and Holt R. A., *Phys. Rev. Lett.*, 23 (1969), 880.
- [18] Freedman S. J. and Clauser J. F., *Phys. Rev. Lett.*, 28 (1972), 938.
- [19] Aspect A., Grangier P. and Roger G., *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982), 91.
- [20] Aspect A., Dalibard J. and Roger G., *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982), 1804
- [21] Ou Z. Y. and L. Mandel L., *Phys. Rev. Lett.*, 61 (1988), 50.
- [22] Shih Y. H. and Alley C. O., *Phys. Rev. Lett.*, 61 (1988), 2921.
- [23] Dehlinger D. and Mitchell M. W., *Am. J. Phys.*, 70 (2002), 898, 903.
- [24] Kwiat P. G., Mattle K., Weinfurter H., Zeilinger A., Sergienko A. V. and Shih Y. H., *Phys. A*, 60 (1999), R773.
- [25] Rarity J. G. and Tapster P. R., *Phys. Rev. Lett.*, 64 (1990), 2495.
- [26] Franson J. D., *Phys. Rev. Lett.*, 62 (1989), 2205.
- [27] Kwiat P. G., Steinberg A. M. and Chiao R. Y., *Phys. Rev. A*, 47 (1993), R2472.
- [28] Ou Z. Y., Zou X. Y., Wang L. J. and Mandel L., *Phys. Rev. Lett.*, 65 (1990), 321.
- [29] Brendel J., Mohler E. and Martienssen W., *Euro. Phys. Lett.*, 20 (1992), 575.
- [30] Shih Y. H., Sergienko A. V. and Rubin M. H., *Phys. Rev. A*, 47 (1993), 1288.
- [31] Migdall A., Datla R., Sergienko A., Orszak J. S. and Shih Y. H., *Metrologica*, 32(1995/6), 479
- [32] Klyshko D. N., *Sov. J. Quantum Electron.*, 7 (1977), 591.
- [33] Kitaeva G., Penin A. N., Fadeev V. V. and Yanait Yu. A., *Sov. Phys. Dokl.*, 24 (1979), 564.
- [34] Abouraddy A. F., Toussaint K. C., Sergienko A. V., Saleh B. E. A. and Teich M. C., *JOpt. Soc. Am. B*, 19 (2002), 656.
- [35] Ou Z. Y., JRhee -K. and Wang L. J., *Phys. Rev. Lett.*, 83 (1999), 959.

کتاب‌شناسی

- Klyshko D. N., *Photons and Nonlinear Optics* (New York: Gordon and Breach, 1988).
- Chiao R. Y. and Steinberg A. M., Tunneling times and superluminality, in *Progress in Optics XXXVII*, E. Wolf (editor) (Amsterdam: Elsevier, 1997), p. 345.
- R. Y. Chiao, P. G. Kwiat and A. M. Steinberg, Faster than light?, *Scientific American* (August 1993), p. 52.
- Hariharan P. and P. Sanders P., Quantum phenomena in optical interferometry, *Progress in Optics XXXVI*, E. Wolf (editor) (Amsterdam: Elsevier, 1996).
- Mandel L., Quantum effects in one-photon and two-photon interference *Rev. Mod. Phys.*, 71 (1999), S274
 بحث نامساوی‌های بل بالا به آنچه در زیر می‌آید، نزدیک است:
- Hardy L., Spooky action at a distance in quantum mechanics, *Contemp. Phys.*, 39 (1998), 419
 آزمایش‌های اولیه‌ای که با استفاده از آشکارهای اتمی برای تولید فوتون‌های قطبیده درهم تنیده مورد استفاده قرار گرفتند، در مرجع زیر گردآوری شده‌اند:
- Clauser J. F. and Shimony A., Bell's theorem: experimental tests and implications, *Rep. Prog. Phys.*, 41 (1978), 1881.
 دو مقاله مروری که کاربردهای نور در تبدیل فروافتی را به مترولوژی مطرح کرده عبارت‌اند از:
- Migdall A., Correlated-photon metrology without absolute standards, *Physics Today* (January 1999), p. 41.
- Sergienko A. V. and Sauer G. S., Quantum information processing and precise optical measurements with entangled photon pairs, *Contemp. Phys.*, 44 (2003), 341

آزمایش‌ها در کاواک QED و با یون‌های در تله^۱ افتاده

در این فصل دو سیستم آزمایشگاهی دیگر که پدیده‌های اپتیک کوانتومی را محقق می‌کنند، مورد بحث قرار می‌دهیم: یکی برهم‌کنش یک اتم دوترازی با میدان الکترومغناطیسی کوانتیده در یک کاواک میکروویو با Q بالاست که معمولاً کاواک QED یا CQED نامیده می‌شود و دیگری حرکت کوانتیده یک یون به تله افتاده. در واقع این آزمایش‌ها آزمایش‌های اپتیکی نیستند، ولی برهم‌کنش‌هایی را نشان می‌دهند که دقیقاً از نوعی اند که در اپتیک کوانتومی مورد توجه اند، از جمله برهم‌کنش جیتز-کامینگز^۲ بین یک سیستم (اتم) دوترازی با یک درجه آزادی بوزونی، یک میدان کاواک تک‌مدی در مورد کاواک میکروویو و مد ارتعاشی حرکت مرکز جرم یک یون در تله افتاده که کوانتای آن در اینجا فونون‌ها^۳ هستند. ابتدا با توضیحی درباره خواص اتم‌های ریدبرگ^۴ که در آزمایش‌های میکروویو به کار می‌روند، شروع می‌کنیم و سپس به بحث درباره کلیات رفتار تابشی اتم‌ها در کاواک‌ها می‌پردازیم که یک سیستم CQED است و مدل جیتز-کامینگز را محقق می‌کند. سپس با استفاده از نسخه پاشنده^۵ مدل که خیلی دور از حالت تشدید است، برای تولید برهم‌نهی‌های حالت‌های هم‌دوس، یعنی حالت‌های گربه شرودینگر استفاده می‌کنیم. حالت‌های گربه شرودینگر که در فصل‌های ۷ و ۹ بررسی شدند، برای امواج متحرک میدان‌های اپتیکی بودند، در حالی که حالت‌هایی که در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرد، مربوط به میدان میکروویو کاواک‌اند. بالاخره سیستمی را که برهم‌کنش جیتز-کامینگز در حرکت ارتعاشی یک یون به تله افتاده را محقق می‌کند، بررسی می‌کنیم.

۱-۱۰ اتم‌های ریدبرگ

اتم ریدبرگ یک اتم معمولی است که یکی از الکترون‌های آن، معمولاً الکترون ظرفیت در یک اتم قلیایی، به

1. Trapped ion

2. Jaynes-Cummings

3. phonon

4. Rydberg

5. dispersive

حالتی که عدد کوانتومی اصلی آن بسیار بالاست، برانگیخته شده است [۱]. در آزمایش‌هایی که بحث خواهیم کرد، اتم‌های مورد استفاده اتم‌های روییدوم هستند که عدد کوانتومی اصلی (n) نباید با عدد فوتونی یک حالت میدان اشتباه شود) الکترون ظرفیت آن‌ها در حدود $n \sim 50$ است. انرژی پیوندی یک اتم ریدبرگ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$E_{nl} = -\frac{R}{(n - \delta_l)^2} = -\frac{R}{n^{*2}} \quad (1-10)$$

که در آن $n^* = n - \delta_l$ "نقص کوانتومی" ناشی از "هسته" هیدرژنی است که برای تصحیح انحراف پتانسیل پیوندی از حالت خالص هیدرژنی وارد می‌شود. ثابت R ، ثابت ریدبرگ است که مقدار تقریبی آن $R = 13.6 \text{ eV}$ است. نقص کوانتومی به عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای l بستگی دارد. برای l های کوچک مقدار آن برابر واحد است و با l های بزرگ کاهش می‌یابد. از آنجا که عمدتاً با l های بزرگ کار داریم که در آن‌ها δ_l کوچک است، می‌توان حالت‌های ریدبرگ را با همان عدد کوانتومی اصلی n مشخص کرد. حالت‌هایی که برای آن‌ها l بزرگ‌ترین مقدار مجاز برای یک n معین را می‌گیرد، $l = n - 1$ و برای آن‌ها $|m| = n - 1$ است که در آن m عدد کوانتومی مغناطیسی است، حالت‌های ریدبرگ دایره‌ای نامیده می‌شوند؛ زیرا در این حالت‌ها الکترون در حد کلاسیک یک مدار دایره‌ای طی می‌کند [۲]. همین حالت‌های ریدبرگ دایره‌ای هستند که در آزمایش‌های QED مورد استفاده قرار می‌گیرند. ناسنزویگ^۲ و همکاران [۳] شرح داده‌اند که چگونه چنین حالت‌هایی را می‌توان در مورد روییدوم فراهم کرد.

چه ویژگی خاصی در اتم‌های ریدبرگ وجود دارد که آن‌ها را برای آزمایش‌های QED مناسب می‌کند؟ تعداد این ویژگی‌ها بسیار زیاد است. از جمله اینکه تنها یک گذار دوقطبی الکتریکی، $|m| - 1 \leftrightarrow |m|$ ، $|m| \leftrightarrow n - 1$ مجاز است. از این رو، چنین حالت‌هایی با تقریب خیلی بالا یک سیستم دوترازی تشکیل می‌دهند. شعاع «کلاسیکی» یک اتم ریدبرگ برابر $n^2 a_0$ است که در آن $a_0 = 0.5 \text{ \AA}$ شعاع اتم بور است. به ازای $n \sim 100$ ابعاد اتم در حد یک ویروس است (اتم‌های ریدبرگی که گذار از حالت‌های با اعداد کوانتومی اصلی در حدود $n \sim 733$ انجام می‌دهند، در فیزیک نجومی مشاهده شده‌اند). عنصر ماتریسی عملگر دوقطبی الکتریکی بین دو حالت ریدبرگ دایره‌ای با اعداد کوانتومی اصلی n و $n' = n - 1$ با $\Delta n = n - n' = 1$ برابر است با

$$d = \langle n | \hat{d} | n' \rangle \sim q n^2 a_0 \quad (2-10)$$

که در آن $\hat{d} = qr$ است. برای $n = 50$ به دست می‌آوریم $d \sim 1300 \text{ A.U.}$ که در آن $qa_0 = 1 \text{ A.U.}$ ، مقداری برای گشتاور دوقطبی که نزدیک به 300 برابر گشتاور دوقطبی گذارهای اپتیکی نوعی برای حالت‌های هیدرژنی پایین است. گشتاورهای دوقطبی بزرگ اتم‌های ریدبرگ دایره‌ای باعث شده است برای آزمایش‌های QED جاذبه داشته باشند؛ زیرا پیوند آن‌ها به میدان تک‌مدی یک کاواک می‌تواند خیلی بزرگ باشد. برای

1. core

2. Nussenzweig

یک اتم ریدبرگ در یک حالت با n بزرگ، فرکانس گسیل شده در گذار برای موردی که در آن $\Delta n = 1$ است، خیلی نزدیک به فرکانس مداری بور است:

$$\omega_0 = \frac{E_{n+1} - E_n}{\hbar} \simeq \frac{2R}{\hbar n^3}. \quad (3-10)$$

برای $n \sim 50$ ، فرکانس تابش گسیل شده برابر است با $\omega_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 36 \text{ GHz}$ که متناظر با طول موج $\lambda_0 = c/\nu_0 \sim 8 \text{ mm}$ است. این عدد اخیر، حدودی از ابعاد لازم برای یک کاواک به دست می‌دهد که می‌تواند یک موج ساکن میکروویو میدان در آن تشکیل شود. آهنگ گسیل خودبه‌خودی توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}. \quad (4-10)$$

با استفاده از نتایج قبلی برای گذارهای ریدبرگ دایره‌ای، $d^2 \sim n^4$ و $\omega_0^3 \sim n^{-9}$ ، آهنگ واپاشی برای این گذارها را به دست می‌آوریم:

$$\Gamma \sim \Gamma_0 n^{-5}, \quad (5-10)$$

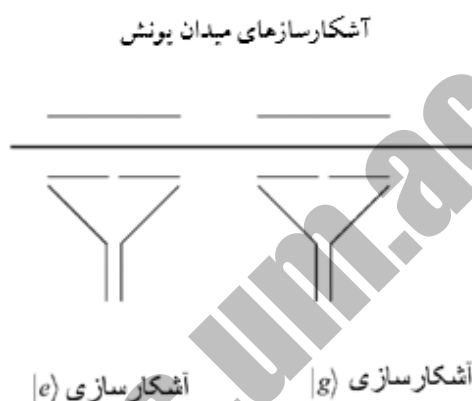
که در آن $\Gamma_0 = c\alpha^4/a_0$ و α در اینجا ثابت ساختار ریز $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ است. آهنگ Γ_0 مربوط به گسیل‌های خودبه‌خودی مجاز ترازهای پایین‌تر (معمولاً با گذارهای اپتیکی سروکار داریم) و اندازه نوعی آن‌ها از مرتبه $\Gamma_0 \sim 10^9 \text{ s}^{-1}$ است که متناظر با طول عمر حالت برانگیخته $\tau_0 = 1/\Gamma_0 \sim 10^{-9} \text{ s}$ است. گذارهای ریدبرگ دایره‌ای دارای یک آهنگ گسیل خودبه‌خودی پایین‌تر و طول عمر حالت برانگیخته طولانی‌تر خواهند بود که با $\tau = 1/\Gamma = \tau_0 n^5$ داده می‌شود. بنابراین برای $n \sim 50$ خواهیم داشت $\tau \sim 10^{-1} \text{ s}$ که در مقایسه با طول عمر گسیل‌های خودبه‌خودی «عادی» که در حدود $\tau_0 \sim 10^{-9} \text{ s}$ است، خیلی طولانی‌تر است.

بالاخره به موضوع آشکارسازی حالت اتمی می‌پردازیم. برای یک اتم ریدبرگ، الکترون معمولاً دور از هسته هیدروژنی است و انرژی پیوندی آن نسبتاً کوچک است و از این رو، به سادگی با اعمال میدان خارجی یونیده می‌شود. میدان الکتریکی که معمولاً توسط الکترون احساس می‌شود، اگر هیچ میدان خارجی نباشد، به صورت زیر از قانون کولن به دست می‌آید:

$$E_{\text{Coulomb}} \approx \frac{e}{4\pi \epsilon_0 (n^2 a_0)^2}, \quad (6-10)$$

بنابراین آهنگ یونش با یک میدان الکتریکی ثابت یکنواخت $E \sim E_{\text{Coulomb}}$ به صورت n^{-4} رفتار می‌کند. آهنگ یونش اتم ریدبرگ با عدد کوانتومی اصلی n نسبت به حالت $n-1$ با ضریب $(1 + 4/n)$ کوچک‌تر است. اگرچه اختلاف این آهنگ‌ها برای ترازهای مجاور ریدبرگ در مقایسه با مورد ترازهای پایین‌تر، کوچک است، ولی برای اندازه‌گیری‌های با انتخاب حالت^۱ که توسط میدان یونش اعمال می‌شوند، به اندازه کافی بزرگ

است. ایده کاملاً ساده است: اتم را از یک مجموعه دو آشکارساز یونی که هر کدام دارای یک میدان با شدت‌های متفاوت هستند، عبور می‌دهیم (شکل ۱۰-۱ را ببینید). اتم ابتدا از آشکارسازی می‌گذرد که طوری تنظیم شده است تا حالت بالاتر را آشکار کند، مثلاً حالت با عدد کوانتومی n . آشکارساز دوم که دارای میدان قوی‌تر است، حالت با عدد کوانتومی $n-1$ را آشکار می‌کند. شدت میدان‌های اعمال‌شده باید بادقت و طوری انتخاب شوند که آشکارساز اول تنها وقتی الکترون در تراز بالاتر قرار دارد، آن را یونیده کند و شدت آشکارساز دوم باید آن‌قدر باشد تا حالت پایین‌تر را یونیده کند. البته آشکارسازی الکترون توسط میدان یونیده‌کننده^۱ در یکی از آشکارسازهاست که آشکارسازی حالت اتمی انتخابی را تشکیل می‌دهد.



شکل ۱۰-۱ میدان یونش یک باریکه اتمی از اتم‌های ریدبرگ به شدت برانگیخته، امکان آشکارسازی حالت انتخابی را فراهم می‌کند. یک میدان الکتریکی فزاینده اعمال می‌شود، به طوری که اولین آشکارساز جمعیت حالت برانگیخته را تعیین و میدان قوی‌تر بعدی حالت پایه را که مقیدتر است، آشکار می‌کند.

به طور خلاصه، حالت‌های اتمی ریدبرگ دایره‌ای دارای خواص زیرند:

- ۱- گذارها به دیگر حالت‌های دایره‌ای محدودند و در نتیجه شرایط به گونه‌ای می‌شود که مانند «اتم‌های دوترازی» عمل کنند.
- ۲- گشتاورهای دوقطبی گذارهای مجاز، بزرگ‌اند.
- ۳- حالت‌ها عمر طولانی‌تری دارند.
- ۴- می‌توان آن‌ها را با اعمال میدان‌هایی که به آشکارسازی انتخابی حالت اتمی برسند، به طور گزینشی یونیده کرد.

۱۰-۲ اتم ریدبرگ در برهم‌کنش با یک میدان کاواک

همان‌طوری که نشان دادیم، طول‌موج تابش‌های گسیل‌شده در نتیجه گذارهای بین حالت‌های ریدبرگ دایره‌ای مجاور در محدوده چند میلی‌متر است. این تابش میکروویو است. یک اتم ریدبرگ در فضای آزاد باید علاوه بر

1. Detection of the field-ionized electron

گسیل‌های خودبه‌خودی، گسیل‌های القایی و جذب ناشی از تابش جسم سیاه محیط در بخش میکروویو طیف نیز داشته باشد. دو حالت مجاور نوعی ریدبرگ را که می‌توان متناظر با حالت‌های با اعداد کوانتومی اصلی $n = 49$ و $n = 50$ در نظر گرفت، به ترتیب $|e\rangle$ و $|g\rangle$ می‌نامیم. اگر $U_{BB}(\omega)$ چگالی انرژی جسم سیاه باشد، آهنگ احتمال جذب القایی که اتم را از حالت $|g\rangle$ به $|e\rangle$ ببرد، به صورت زیر داده می‌شود [۴]:

$$W_{ge}^{BB} = \frac{\pi d^2}{\epsilon_0 \hbar^2} (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e})^2 U_{BB}(\omega_0) \quad (۷-۱۰)$$

که در آن $\mathbf{e}_a$ و $\mathbf{e}$ به ترتیب بردارهای یکه قطبش دوقطبی اتمی و میدان تابشی هستند و خط بالای پرانتز معرف میانگین‌گیری روی تمام قطبش‌ها و راستاهای انتشار ممکن است. می‌توان نشان داد که $(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e})^2 = 1/3$. به علاوه، برای یک میدان گرمایی در فضای آزاد می‌توان چگالی انرژی را به صورت $U_{BB}(\omega_0) = \rho_{fs}(\omega_0) \bar{n}(\omega_0)$ نوشت که در آن $\rho_{fs}(\omega_0)$ چگالی مد فضای آزاد، $\rho_{fs}(\omega_0) = \omega_0^2 / (\pi^2 c^3)$ است (معادله ۷۵-۲ را ببینید).

$$\bar{n}(\omega_0) = [\exp(\hbar \omega_0 / k_B T) - 1]^{-1}. \quad (۸-۱۰)$$

بنابراین

$$W_{ge}^{BB} = B \bar{n}, \quad (۹-۱۰)$$

که

$$B = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}. \quad (۱۰-۱۰)$$

آهنگ احتمال گسیل القایی از $|e\rangle$ به $|g\rangle$ برابر است با

$$W_{eg}^{BB} = B \bar{n}(\omega_0) = W_{ge}^{BB}. \quad (۱۱-۱۰)$$

گسیل خودبه‌خودی از حالت $|e\rangle$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$W_{eg}^{BB + SpE} = B[\bar{n}(\omega_0) + 1]. \quad (۱۲-۱۰)$$

از معادله ۱۰-۴ داریم $B = \Gamma$ که از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\Gamma = \frac{\pi d^2}{3\epsilon_0 \hbar^2} \rho_{fs}(\omega_0) \hbar \omega_0. \quad (۱۳-۱۰)$$

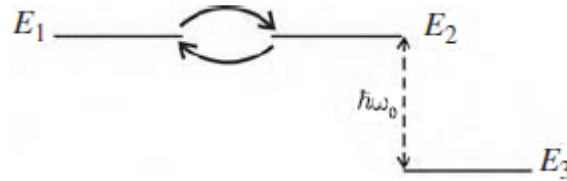
اگر $\bar{n} = 0$ باشد، آهنگ گسیل خودبه‌خودی به افت وخیزهای خلأ تمام مدهای اطراف اتم ارتباط پیدا می‌کند. برای یک گذار ریدبرگ با طول‌موج در محدوده چند میلی‌متر، حتی در دمای اتاق، داریم $\hbar \omega_0 \ll k_B T$. بنابراین می‌توان با استفاده از حد رالی - جینز، قانون تابش پلانک را برای $1 \ll \hbar \omega_0 / k_B T$ به دست آورد.

$$W_{eg}^{BB} \approx \frac{d^2 \omega_0^2 k_B T}{3\pi \epsilon_0 \hbar^2 c^3}. \quad (۱۴-۱۰)$$

چون برای حالت‌های ریدبرگ دایره‌ای $d^2 \sim n^4$ و $\omega_0^2 \sim n^{-6}$ است، داریم $W_{eg}^{BB} \sim n^{-2}$. این مقدار را باید با آهنگ گسیل خودبه‌خودی کل حالت $|e\rangle$ که برابر $\Gamma \sim n^{-5}$ است، مقایسه کرد. چون $W_{eg}^{BB}/\Gamma \sim n^3$ ، آهنگ گسیل القایی ناشی از تابش جسم سیاه اطراف اتم خیلی بزرگ‌تر از آهنگ گسیل خودبه‌خودی است.

آهنگ‌های W_{eg}^{BB} و Γ اساساً آهنگ‌های برگشت‌ناپذیر هستند: فوتونی که یک اتم به مدهای پیوسته تابش می‌کند، هرگز دوباره جذب اتم نمی‌شود. هدف ما این بوده است که شرایطی را پیدا کنیم که تحت آن دینامیک اتم-میدان برگشت‌پذیر باشد. این کار را با قرار دادن اتم در یک کاواک با ابعاد مناسب انجام می‌دهیم که چگالی مدهای آن بسیار کمتر از چگالی‌ها در فضای آزاد باشد. به‌طور ایدئال، می‌خواهیم کاواکی بسازیم که تنها یک مد با فرکانسی پیش‌تیبانی کند که نزدیک به تشدید با ω_0 گذار اتم باشد. این عمل آهنگ برگشت‌ناپذیری گسیل‌های خودبه‌خودی را کاهش می‌دهد؛ چراکه تنها یک مد کاواک وجود دارد که اتم می‌تواند تابش کند. در همان حال می‌خواهیم گذارهای ناشی از حضور تابش جسم سیاه با طول‌موج متناظر با گذار اتمی وجود نداشته باشد. برای یک کاواک با دیواره‌های در دمای پایین، به‌طوری که $\hbar\omega_0 \gg k_B T$ باشد، داریم $\bar{n} \approx \exp(-\hbar\omega_0/k_B T) \ll 1$ و بنابراین آهنگ گذار القایی ناشی از فوتون‌های گرمایی کوچک خواهد بود.

به‌عنوان یک مثال ساده، یک اتم برانگیخته در حالت $|e\rangle$ را در نظر بگیرید که در یک کاواک قرار دارد و یک میدان تک‌مدهی در تشدید با فرکانس گذار اتمی ω_0 راپشتیبانی می‌کند. فرض می‌کنیم ابتدا میدان در حالت خلأ باشد. بنابراین حالت اولیه سیستم اتم-میدان عبارت است از $|e\rangle|0\rangle = |1\rangle$. وقتی اتم گسیل خودبه‌خودی انجام داد، سیستم به حالت $|g\rangle|1\rangle = |2\rangle$ می‌رود. انرژی کل حالت‌های اتم-میدان تغییر نمی‌کند: $E_1 = E_2 = \frac{\hbar\omega_0}{2}$ (در تشدید). اگر برهم‌کنش‌های دیگری وجود داشته باشند، سیستم به‌طور تناوبی در فرکانس رابی خلأ $\Omega_0 = \Omega(0) = 2\lambda$ بین حالت‌های $|1\rangle$ و $|2\rangle$ نوسان می‌کند (بخش ۴-۵ را ببینید). اما یک امکان دیگر نیز وجود دارد: فوتون می‌تواند قبل از اینکه اتم آن را جذب کند، از کاواک خارج شود. دمای دیواره‌های کاواک هر قدر کوچک باشد، با سیستم اتم-میدان برهم‌کنش و دو اثر مهم ایجاد می‌کند: انرژی میدان به‌خاطر خروج فوتون‌ها کاهش می‌یابد و یک واهمدوسی برای دینامیک کوانتومی سیستم به‌وجود می‌آید. بنابراین حالت سومی نیز وجود دارد که باید در بررسی برهم‌کنش اتم برانگیخته با یک میدان کاواک تک‌مدهی به آن پردازیم: حالت $|g\rangle|0\rangle = |3\rangle$ دیگر یک دینامیک برگشت‌پذیر نیست و به‌عنوان دینامیک برگشت‌ناپذیر وابسته به اتلاف ظاهر می‌شود. حالت $|3\rangle$ دارای انرژی $E_3 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}$ است که همان‌طوری که در شکل ۱۰-۲ نشان داده شده، به‌اندازه $\hbar\omega_0$ از E_1 و E_2 پایین‌تر است. این مقدار انرژی وارد برانگیختگی مخزن می‌شود. مبحث اتلاف واهمدوسی، موضوع فصل ۸ است. در اینجا یک معادله اصلی که برای مدل‌سازی اتلاف مناسب باشد را معرفی می‌کنیم.



شکل ۱۰-۲ ترازهای انرژی سیستم اتم-میدان؛ حالت‌های $|e\rangle|0\rangle = |1\rangle$ و $|g\rangle|1\rangle = |2\rangle$ دارای انرژی‌های یکسان هستند و بدون اتلاف یک فوتون، سیستم بین این دو حالت نوسان می‌کند. ولی اگر فوتون از بین برود، حالت سیستم $|g\rangle|0\rangle = |2\rangle$ می‌شود و انرژی به مقدار $\hbar\omega_0$ کاهش می‌یابد.

اگر هامیلتونی برهم‌کنش، مانند فصل ۳، به صورت

$$\hat{H}_I = \hbar\lambda(\hat{a}\hat{\sigma}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_-) \quad (10-15)$$

باشد، معادله اصلی برای تحویل عملگر چگالی را (که در فصل ۸ آن را به دست آوردیم) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}_I, \hat{\rho}] - \frac{\kappa}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \kappa\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger, \quad (10-16)$$

که در آن $\kappa = \omega_0/Q$ است و Q یک ضریب مشخصه کیفی کاواک است که آهنگ اتلاف را توصیف می‌کند. زمان $T_r = 1/\kappa$ زمان واهلش کاواک است. برای Q های بسیار بزرگ، آهنگ اتلاف کوچک است (که مطلوب هم هست). با حالت‌های $|i\rangle$ ، $i = 1, 2, 3$ ، به طوری که $\rho_{ij} = \langle i|\hat{\rho}|j\rangle$ باشد، معادله ۱۰-۱۶ با معادلات دیفرانسیل جفت شده مرتبه اول زیر هم‌ارز است:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{11}}{dt} &= \frac{i}{2}\Omega_0(\rho_{12} - \rho_{21}) \equiv \frac{i}{2}\Omega_0 V, \\ \frac{d\rho_{22}}{dt} &= -\frac{\omega_0}{Q}\rho_{22} - \frac{i}{2}\Omega_0 V, \\ \frac{dV}{dt} &= i\Omega_0 W - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)V, \\ \frac{d\rho_{33}}{dt} &= \frac{\omega_0}{Q}\rho_{22}, \end{aligned} \quad (10-17)$$

که در آن $V = \rho_{12} - \rho_{21}$ و $W = \rho_{11} - \rho_{22}$. سه معادله اول دقیقاً به همان شکل معادلات بلاخ در تشدید مغناطیسی [۵] و تشدید اپتیکی با یک میدان کلاسیکی هستند [۶]. معادلات ۱۰-۱۷ را معادلات بلاخ «یک فوتونی» می‌نامیم، هرچند Ω_0 فرکانس رابی خلأست. سه معادله اول در ۱۰-۱۷ را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\Omega_0/2 \\ 0 & -\omega_0/Q & -i\Omega_0/2 \\ i\Omega_0 & -i\Omega_0 & -\omega_0/2Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \rho_{22} \\ V \end{pmatrix} \quad (10-18)$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از $\rho_{11}(0) = 1$, $\rho_{22}(0) = 0$, $\rho_{12}(0) = 0$ و $\rho_{33}(0) = 0$ البته مسئله می‌شود. ویژه‌مقداری در معادله ۱۰-۱۸ به معادله زیر منجر می‌شود:

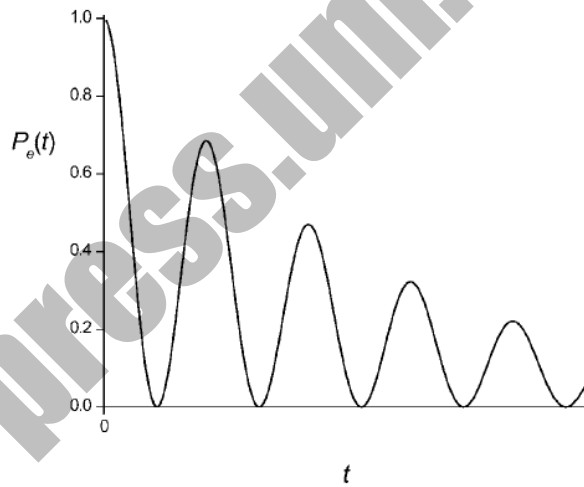
$$\left(\Lambda + \frac{\omega_0}{2Q}\right) \left(\Lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\Lambda + \Omega_0^2\right) = 0 \quad (19-10)$$

آن عبارت‌اند از که جواب‌های

$$\Lambda_0 = -\frac{\omega_0}{2Q},$$

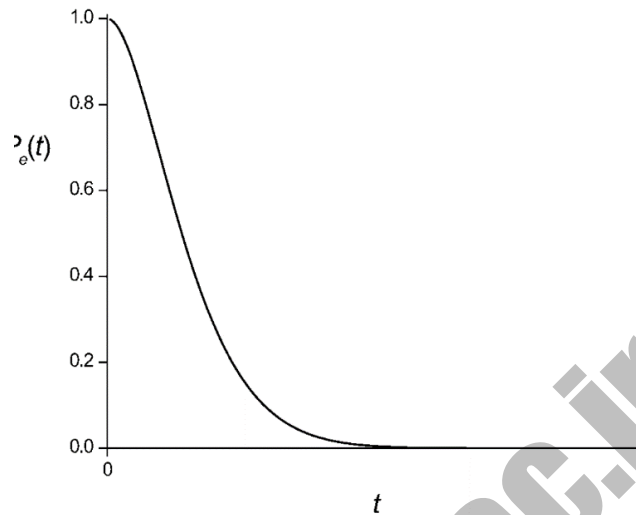
$$\Lambda_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \frac{4\Omega_0^2 Q^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2}. \quad (20-10)$$

اگر آهنگ واپاشی کاواک ضعیف باشد، به طوری که $\omega_0/Q < 2\Omega_0$ باشد، ویژه‌مقدارهای $\Lambda_{\pm}$ مختلط خواهند بود و احتمال یافتن اتم در حالت برانگیخته $P_e(t) = \rho_{11}(t)$ مطابق شکل ۱۰-۳ به نوسانات میرا با فرکانس Ω_0 منجر می‌شود.



شکل ۱۰-۳ احتمال حالت برانگیخته میرا برای یک اتم در یک کاواک با Q بالا که در آن تعداد زیادی نوسانات رابی خلأ در خلال زمان میرایی کاواک قابل مشاهده‌اند.

این نوسانات که در اینجا نوسانات رابی هستند، منعکس کننده این واقعیت‌اند که گسیل خودبه‌خودی برای میدان واپاشی ضعیف، برگشت‌پذیر است. این نوسانات با آهنگ $\omega_0/2Q$ میرا می‌شوند. اما اگر میرایی کاواک قوی باشد، به طوری که $\omega_0/Q > 2\Omega_0$ باشد، ویژه‌مقدارهای $\Lambda_{\pm}$ حقیقی‌اند و همان طوری که در شکل ۱۰-۴ نشان داده شده است، گسیل خودبه‌خودی برگشت‌ناپذیر خواهیم داشت. بزرگ‌ترین ثابت زمانی و بنابراین کوچک‌ترین ویژه‌مقدار در این حالت Λ_+ است که می‌توان آن را به صورت زیر تقریب زد:



شکل ۱۰-۴ واپاشی حالت برانگیخته یک اتم در یک کاواک با Q ی پایین که در آن هیچ نوسان رابی قابل‌مشاهده وجود ندارد. اتم با آهنگی که به Q ی کاواک بستگی دارد، واپاشی می‌کند.

$$\Lambda_+ \simeq -\frac{\Omega_0^2 Q}{\omega_0} = -\frac{4d^2 Q}{\hbar \varepsilon_0 V}, \quad (10-21)$$

که طرف راست آن با استفاده از روابط $\Omega_0 = 2\lambda$ ، $\lambda = dg/\hbar$ به‌دست آمده است که در آن g توسط معادله ۴-۸۷ داده می‌شود و V حجم مؤثر مد کاواک است. فرض کرده‌ایم اتم نزدیک به شکم موج ساکن کاواک قرار دارد، به‌طوری که $\sin^2(kz) \approx 1$. بنابراین می‌توان آهنگ واپاشی برگشت‌ناپذیر را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\Gamma_{\text{cav}} = \frac{4d^2 Q}{\hbar \varepsilon_0 V}. \quad (10-22)$$

توجه کنید که آهنگ واپاشی با افزایش Q افزایش می‌یابد و بنابراین آهنگ گسیل خودبه‌خودی کاواک افزایش خواهد یافت. اگر آهنگ واپاشی پس از معادله ۱۰-۱۳ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\Gamma_{\text{cav}} = \frac{\pi d^2}{\varepsilon_0 \hbar^2} \rho_{\text{cav}}(\omega_0) \hbar \omega_0 \quad (10-23)$$

دراین صورت، تعداد مدها بر واحد حجم کاواک برابر است با

$$\rho_{\text{cav}}(\omega) = \frac{4Q}{\pi \varepsilon_0 V} \quad (10-24)$$

و بنابراین داریم:

$$\frac{\Gamma_{\text{cav}}}{\Gamma} = \frac{3\rho_{\text{cav}}(\omega)}{\rho_{\text{fs}}(\omega)} = \frac{4Q\lambda_0^3}{3\pi\epsilon_0 V}. \quad (۱۰-۲۵)$$

این نتیجه که افزایش گسیل خودبه‌خودی در کاواک را پیش‌بینی می‌کند، توسط پارسل^۱ [۷] در مبحث تشدید مغناطیسی به‌دست آمد. البته در این نتیجه‌گیری فرض می‌شود کاواک یک مد با طول‌موج مناسب را که اتم می‌تواند تابش کند، پشتیبانی نماید. اما اگر کاواک خیلی کوچک باشد، به‌طوری که طول‌موج λ_0 نتواند تأمین شود، گسیل خودبه‌خودی اتفاق نمی‌افتد و این امر به‌صورت تجربی مشاهده شده است [۹].

۱۰-۳ تحقق تجربی مدل جینز-کامینگز

تحقق آزمایشگاهی تقویت کاواک^۲ و دینامیک گذار برگشت‌پذیر ابتدا توسط گروه‌هایی در انستیتوی ماکس پلانک^۳ برای اپتیک کوانتومی و در «اکول نورمال سوپریور»^۴ (ENS) انجام شد. در آزمایش‌هایی که توسط هرولش^۵ و همکارانش در ENS پاریس انجام شد، کاواک به کار گرفته شده از یک تشدیدکننده فابری پرو و متشکل از آینه‌های کروی ابررسانای نیوبوم به قطر ۵۰ میلی‌متر و شعاع انحنای ۴۰ میلی‌متر که به فاصله ۲۷ میلی‌متری از یکدیگر قرار داشتند، تشکیل شده بود. مقدار اندازه‌گیری شده Q برای کاواک برابر $Q = 3 \times 10^8$ است، هرچند مقادیر بیشتر نیز امکان‌پذیر است. زمان ذخیره‌سازی برای فوتون‌ها در چنین کاواکی در حدود ۱ میلی‌ثانیه است که از زمان واپاشی اتمی برای یک اتم ریدبرگ دایره‌ای با $n \sim 50$ کوتاه‌تر، اما از زمان برهم‌کنش اتم-میدان در سرعتی که با آن اتم‌ها به کاواک تزریق می‌شوند و از مرتبه چند میکروثانیه هستند بسیار طولانی‌تر است. دیواره‌های کاواک تا حدود ۱ K سرد می‌شوند و به‌طور میانگین ۰.۷ فوتون میکروویو در کاواک قرار دارند. اما این تعداد می‌تواند با تزریق یک رشته‌اتم‌ها در حالت پایه به داخل کاواک که با جذب فوتون‌ها عملاً باعث «سردتر شدن» کاواک می‌شوند، کمتر شود. این روش میانگین تعداد فوتون‌ها را تا ۰.۱ کاهش می‌دهد. در شکل ۱۰-۵ یک آزمایش کاواک QED نوعی را نشان داده‌ایم. کاواک میکروویو که از دو طرف باز است، تا امکان عبور اتم‌ها را بدهد، یک چشمه میکروویو کلاسیکی (یک کلیسترون^۶) به آن متصل می‌شود که خروجی آن را می‌توان به داخل کاواک پمپ کرد تا یک حالت همدوس با دامنه پایین تشکیل دهد. علاوه‌براین، چشمه‌های میکروویو تشدید کلاسیک وجود دارند که می‌توانند روی حالت‌های اتمی قبل و بعد از خروج از کاواک عملیات مناسب انجام دهند. این میدان‌ها اساساً تداخل سنجی رمزی^۷ را انجام می‌دهند [۱۰] و بنابراین به آن‌ها میدان‌های رمزی R_1 و R_2 اطلاق می‌شود. این میدان‌ها خیلی سریع واپاشی می‌کنند (کاواک‌های با Q ی پایین با تعداد کمی فوتون مورد استفاده قرار می‌گیرند) و بنابراین می‌توان آن‌ها را به‌طور کلاسیکی بررسی کرد و هیچ درهم‌تنیدگی ایجاد نمی‌شود [۱۱]. بالاخره آشکارسازهای یونش انتخابی بعد از میدان رمزی دوم قرار داده می‌شوند.

1. Purcell

2. Cavity-enhanced

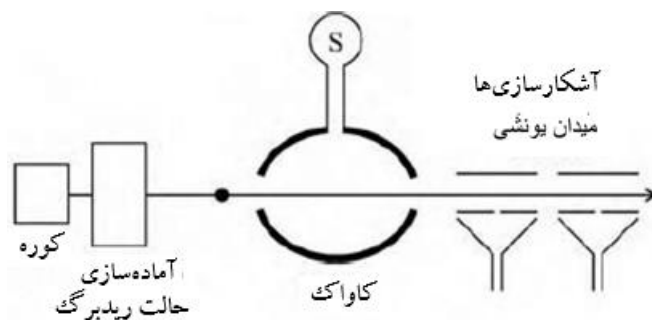
3. Max Planck Institute

4. Ecole Normale Supérieure

5. Haroche

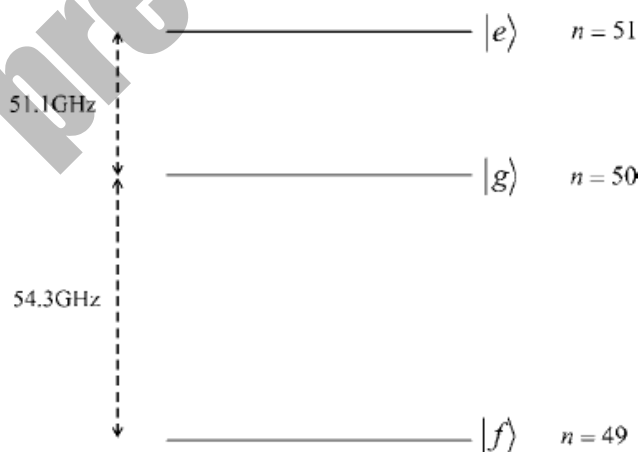
6. Klystron

7. Ramsey

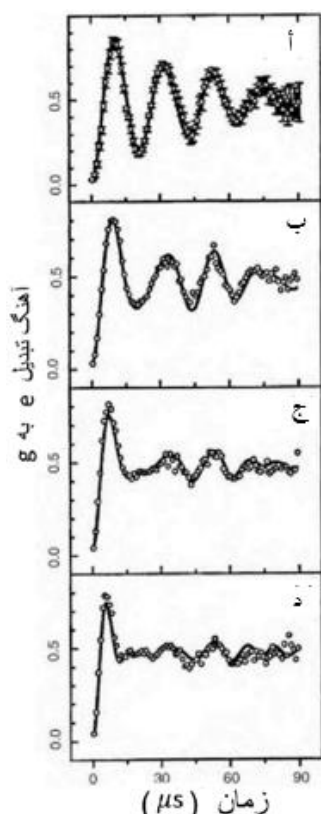


شکل ۵-۱۰ طرح راه‌اندازی تجربی برای تحقق مدل جینز-کامپنگز؛ میدان کاواک در یک حالت همدوس قرار دارد که از طریق یک موج بر از منبع S که خود حاصل جریان‌های کلاسیکی است، به‌دست آمده است. اتم‌ها در حالت برانگیخته آماده شده‌اند و با سرعت انتخابی به‌سمت کاواک هدایت می‌شوند. آشکارسازهای یونی گزینشی آمار وارونگی را به‌صورت تابعی از زمان که خود با انتخاب سرعت کنترل می‌شود، می‌دهند.

درمورد اتم‌های ریدبرگ دایره‌ای، حالت‌هایی که مورد استفاده قرار می‌گیرند آن‌هایی هستند که اعداد کوانتومی اصلی آن‌ها $n = 49, 50, 51$ باشد که آن‌ها را به ترتیب و $|g\rangle, |e\rangle$ می‌نامیم. نمودار ترازهای انرژی حالت‌های اتمی در شکل ۶-۱۰ نشان داده شده است. فرکانس گذار $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ برابر 51.1 GHz و فرکانس گذار $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ برابر 54.3 GHz است. فرکانس گذار اخیر خیلی دور از تشدید با میدان کاواک است، به‌طوری‌که بین این ترازها گذاری اتفاق نمی‌افتد، اما این بدان معنی نیست که کاواک هیچ‌گونه تأثیری ندارد. این مطلب را در بخش بعدی خواهیم دید. حالت‌های اتمی را می‌توان در صورتی که لازم باشد، با اعمال یک میدان الکتریکی استاتیک کوچک (انتقال استارک)، با میدان کاواک به حالت تشدید یا خروج از تشدید درآورد.



شکل ۶-۱۰ حالت‌های ریدبرگ دایره‌ای و فرکانس‌های گذار آن‌ها که برای آزمایش‌های کاواک QED توسط گروه پاریس مورد استفاده قرار گرفت.



شکل ۱۰-۷ آهنگ‌های گذار $|e\rangle$ به $|g\rangle$ برای چند حالت اولیه میدان کاواک: ا. مربوط به حالتی است که در آن هیچ میدانی تزریق نشده است و میانگین فوتون‌های گرمایی (± 0.01) است. درحالی‌که شکل‌های «ب»، «ج» و «د» حالت‌هایی هستند که در آن‌ها به ترتیب حالت‌های همدوس با میانگین (± 0.02) ، (± 0.04) و (± 0.15) فوتون تزریق شده است (این شکل از مرجع ۱۳ گرفته شده است).

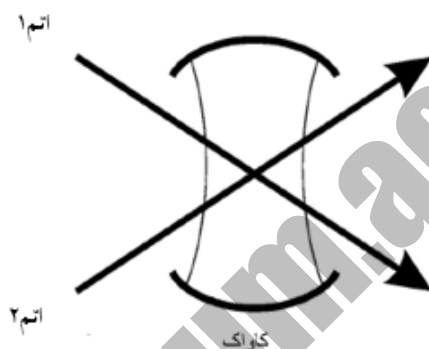
اولین آزمایشی که برای مشاهده پدیده‌های فروپاشی و احیا در برهم‌کنش‌های اتم-میدان در QED انجام شد، در سال ۱۹۸۷ توسط رمپ، والتر و کلاین^{۱۲} گزارش گردید [۱۲]. این آزمایش شامل یک میدان گرمایی در کاواک بود و نوساناتی در آمار حالت‌های اتمی مشاهده شد، اما این نتوانست محدوده زمان برهم‌کنش را آن قدر طولانی کند تا فروپاشی و احیا را نشان دهد. در ۱۹۹۶ هروش و همکارانش [۱۳] توانستند آزمایشی انجام دهند که بتواند روی زمان‌های برهم‌کنش کنترل لازم را داشته باشد و به علاوه توانستند میدان‌های کاواک همدوس کوآنتیده تا $\bar{n} = 1.77(\pm 0.15)$ فوتون تزریق کنند. در این آزمایش، به خصوص کاواک به کاررفته دارای زمان واهلش $T_r = 220 \mu s$ بود که متناظر با $Q = 7 \times 10^7$ است. این زمان واهلش، از زمان برهم‌کنش اتم-میدان t که در بازه $90 \mu s < t < 40$ است، بزرگ‌تر است. بازه سرعت‌های v اتمی موردنظر $110 < v < 250 \text{ m/s}$ است. نتایج تجربی در شکل ۱۰-۷ که از مرجع [۱۳] گرفته شده، آمده است. در قسمت «ا» نوسانات به دست آمده وقتی هیچ میدانی تزریق نشده است، ولی میدان گرمایی شامل $\bar{n} = 0.06(\pm 0.01)$ فوتون باشد، به دست آمده است. در این شکل چندین نوسان به وضوح مشاهده می‌شوند. برای میدان‌های همدوس با دامنه‌های در حال

1. Rempe, Walter, Klein

افزایش، فروپاشی و پس از آن احیا مشاهده می‌شود. بزرگ‌ترین میدان همدوس به کاررفته دارای تعداد میانگین فوتون $\bar{n} = 1.77(\pm 0.15)$ است.

۴-۱۰ تولید اتم‌های درهم‌تنیده در CQED

آزمایش‌های به کاررفته برای CQED که در بالا توصیف شدند را می‌توان با قدری اصلاح برای تولید درهم‌تنیدگی بین اتم‌هایی که به‌طور متوالی به داخل کاواک تزریق می‌شوند، مورد استفاده قرار داد. در شکل ۸-۱۰ دو اتم از داخل کاواک عبور می‌کنند که ابتدا اتم ۱ در حالت برانگیخته و اتم ۲ در حالت پایه قرار دارد.



شکل ۸-۱۰ روش پیشنهادشده برای ایجاد دو اتم درهم‌تنیده. اتم اول در حالت برانگیخته آماده می‌شود و سرعت آن طوری انتخاب می‌گردد که هنگام عبور از کاواک یک فوتون گسیل کند. سپس اتم دوم در حالت پایه آماده می‌شود و سرعت آن طوری تعیین می‌گردد که فوتون را جذب کند. در نتیجه، هر دو اتم با وجود اینکه دور از هم قرار دارند، ولی درهم‌تنیده هستند.

فرض شده است میدان کاواک ابتدا در حالت خلاء باشد. درحالی که اتم در داخل کاواک قرار دارد، سیستم میدان و اتم مطابق رابطه زیر تحول می‌یابند:

$$|e\rangle_1 |0\rangle_{\text{cav}} \rightarrow \cos(\lambda t_1) |e\rangle_1 |0\rangle - i \sin(\lambda t_1) |g\rangle_1 |1\rangle. \quad (26-10)$$

اگر سرعت اتم طوری انتخاب شود که $\lambda t_1 = \pi/4$ باشد، داریم:

$$|e\rangle_1 |0\rangle_{\text{cav}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |0\rangle - i |g\rangle_1 |1\rangle). \quad (27-10)$$

با ارسال فوتون دوم داریم:

$$|e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{\text{cav}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle - i |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle), \quad (28-10)$$

با استفاده از

$$|g\rangle_2 |1\rangle \rightarrow \cos(\lambda t_2) |g\rangle_2 |1\rangle - i \sin(\lambda t_2) |e\rangle_2 |0\rangle, \quad (29-10)$$

و انتخاب سرعت اتم دوم، به طوری که $\lambda t_2 = \pi/2$ باشد، بالاخره به دست می آوریم:

$$|e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_{\text{cav}} \rightarrow |\Psi^+\rangle |0\rangle, \quad (30-10)$$

که در آن

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle_1 |g\rangle_2 + |g\rangle_1 |e\rangle_2) \quad (31-10)$$

یکی از حالت‌های بل با ماکزیمم هم‌بستگی است که این بار برحسب حالت‌های یک اتم دوترازی داده شده است. با استفاده از میدان‌های تشدید کلاسیک و آشکارسازی یونش انتخابی می توان با جست و جوی نقض نامساوی بل از این حالت برای تست نظریه‌های واقع بینی موضعی استفاده کرد. لیکن چون اندازه گیری‌های حالت اتمی ممکن است دارای جدایی فضاگونه نباشند، این نوع تست‌ها نسبت به ملاک وضعیت نتیجه قطعی نمی دهند. تولید اتم‌های درهم تنیده به روشی که توضیح داده شد، از سوی سیراک^۱ و زلر^۲ پیشنهاد گردید [۱۴] و تحقق آزمایشی آن توسط گروه پاریس نیز انجام گرفت [۱۵].

۱۰-۵ تشکیل حالت‌های گره‌شده دینگر با برهم کنش‌های پاشنده اتم- میدان و واهمدوسی از کوانتوم به کلاسیک

در بخش ۸-۴ مدل جیتز- کامینگز را درمورد واکوکی‌های^۳ بزرگ مورد بحث قرار دادیم. برهم کنش در آن حالت، همان طوری که در پیوست «ج» نشان داده شده است، با هامیلتونی زیر نشان داده می شود:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar \chi [\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\sigma}_3] \quad (32-10)$$

که در آن $\hat{\sigma}_3 = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ و $\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- = |e\rangle\langle g|g\rangle\langle e| = |e\rangle\langle e|$ و $\hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ = |g\rangle\langle e|e\rangle\langle g| = |g\rangle\langle g|$ است. واکوکی بزرگ بین فرکانس میدان- کاواک و فرکانس گذار $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ است. البته حالت پایین تر $|f\rangle$ از نظر دینامیکی هنوز جداست؛ زیرا خیلی دور از تشدید با میدان کاواک است. اگر حالت اتمی $|e\rangle$ قرار نباشد اشغال شود، هامیلتونی برهم کنش مؤثر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\hbar \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} |g\rangle\langle g|. \quad (33-10)$$

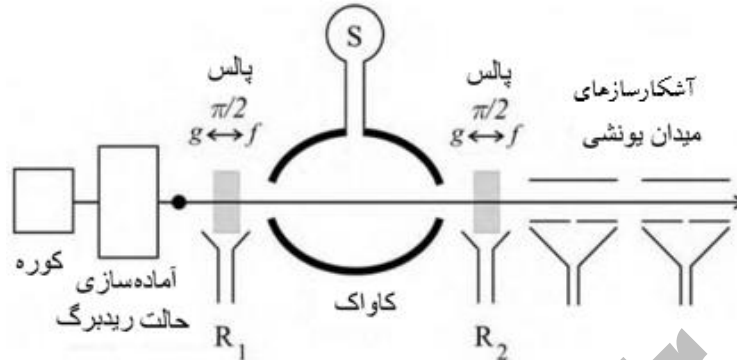
حال فرض کنید آزمایش شکل ۱۰-۹ مورد استفاده قرار بگیرد که در آن ناحیه رمزی R_1 که میدان آن را در تشدید با گذار $|g\rangle \rightarrow |f\rangle$ فرض می کنیم (که فرض می شود با R_2 نیز چنین باشد)، برای فراهم آوردن اتم در یک برهم نهی به صورت زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

$$|\psi_{\text{atom}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle + |f\rangle). \quad (34-10)$$

1. Cirac

2. Zoller

3. detuning



شکل ۱۰-۹ طرح‌واره‌ای از آزمایشی که برای تولید حالت‌های گره‌شده شرودینگر طراحی شده است. R_1 و R_2 نواحی رمزی هستند که پالس‌های $\pi/2$ در گذار $|g\rangle \leftrightarrow |f\rangle$ را تولید می‌کنند.

سپس اتم وارد کاواکی می‌شود که خود در حالت هم‌دوس $|\alpha\rangle$ قرار دارد. بنابراین حالت اولیه سیستم اتم-میدان به صورت زیر است:

$$|\Psi(0)\rangle = |\psi_{\text{atom}}\rangle |\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle + |f\rangle) |\alpha\rangle. \quad (۱۰-۳۵)$$

با استفاده از هامیلتونی مؤثر ۱۰-۳۳ این حالت سیستم به صورت زیر تحول می‌یابد:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp[-i \hat{H}_{\text{eff}} t / \hbar] |\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|g\rangle |\alpha e^{i\chi t}\rangle + |f\rangle |\alpha\rangle]. \quad (۱۰-۳۶)$$

حال فرض می‌کنیم در ناحیه رمزی دوم، R_2 ، یک میدان تشدید کلاسیکی گذارهای زیر را انجام دهد:

$$\begin{aligned} |g\rangle &\rightarrow \cos(\theta/2)|g\rangle + \sin(\theta/2)|f\rangle, \\ |f\rangle &\rightarrow \cos(\theta/2)|f\rangle - \sin(\theta/2)|g\rangle, \end{aligned} \quad (۱۰-۳۷)$$

که در آن زاویه رابی برابر است با $\theta = \Omega_R T$ و Ω_R فرکانس رابی نیمه کلاسیکی و T زمان برهم کنش است. معادله ۱۰-۳۶ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} |\Psi(t, \theta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos(\theta/2)|g\rangle + \sin(\theta/2)|f\rangle) |\alpha e^{i\chi t}\rangle \\ &\quad + (\cos(\theta/2)|f\rangle - \sin(\theta/2)|g\rangle) |\alpha\rangle], \\ &= |g\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\theta/2) |\alpha e^{i\chi t}\rangle - \sin(\theta/2) |\alpha\rangle] \\ &\quad + |f\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin(\theta/2) |\alpha e^{i\chi t}\rangle + \cos(\theta/2) |\alpha\rangle]. \end{aligned} \quad (۱۰-۳۸)$$

با انتخاب زمان برهم کنش، به طوری که $\chi t = \pi$ و زاویه رابی برابر با $\theta = \pi/2$ باشد، داریم:

$$|\Psi(\pi/\chi), \pi/2\rangle = \frac{1}{2} [|g\rangle(|-\alpha\rangle - |\alpha\rangle) + |f\rangle(|-\alpha\rangle + |\alpha\rangle)]. \quad (39-10)$$

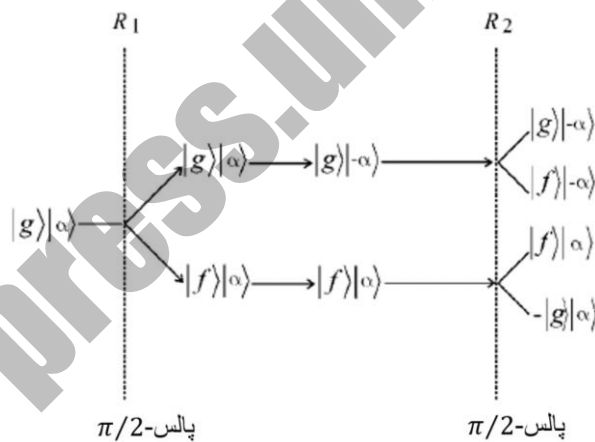
با آشکارسازهای یونش که برای آشکارسازی حالت‌های $|g\rangle$ و $|f\rangle$ انتخاب شده‌اند، آشکارسازی $|f\rangle$ میدان کاواک را به یک حالت گریه‌شرو دینگر زوج می‌برد.

$$|\psi_e\rangle = \mathcal{N}_e (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \quad (40-10)$$

درحالی‌که اگر $|g\rangle$ آشکار شود، میدان کاواک به حالت گریه‌شرو دینگر فرد زیر تصویر می‌شود:

$$|\psi_o\rangle = \mathcal{N}_o (|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle), \quad (41-10)$$

این حالت‌ها قبلاً در معادلات ۷-۱۱۵ تا ۷-۱۱۷ داده شده‌اند. سرعت اتمی لازم برای اینکه به انتقال فاز $\chi t = \pi$ که برای تولید حالت‌های گریه‌شرو دینگر زوج و فرد لازم است برسیم، در حدود ۱۰۰ متر بر ثانیه است. تولید حالت‌های گریه‌شرو دینگر زوج و فرد که در بالا مورد بحث قرار گرفت، می‌تواند (در واقع باید) به عنوان یک پیامد از تداخل در نظر گرفته شود. این مسئله را در شکل ۱۰-۱۰ نشان داده‌ایم. نواحی رمزی مانند تقسیم‌کننده باریکه عمل می‌کنند و ناحیه دوم عملاً ابهام در انتخاب دو «مسیر» را ایجاد می‌کند.



شکل ۱۰-۱۰ نمایش تداخل موجود در تولید حالت‌های گریه‌شرو دینگر؛ نواحی رمزی مانند تقسیم‌کننده باریکه برای ایجاد ابهام در «مسیر» عمل می‌کنند. در انتهای سمت راست، حالت‌های میدان وابسته به حالت‌های اتمی یکسان بر اثر یونش حالت اتمی انتخابی، برهم‌نهی پیدا می‌کنند.

یکی از انگیزه‌ها برای تولید حالت‌های گریه‌شرو دینگر این بود که بتوانند واهمدوسی یک برهم‌نهی حالت‌های مزوسکوپی را با یک مخلوط آماری نمایش دهند. اگر فرض کنیم زمان برهم‌کنش اتم-میدان آنقدر کوچک باشد که وقتی اتم در داخل کاواک است، بتوان از اثرات اتلافی صرف‌نظر کرد، وقتی اتم از کاواک خارج شد و یونیده گردید، می‌توان فرض کرد حالت میدان که اکنون با اتم درهم‌تنیده نیست، برطبق

معادله اصلی زیر تحول پیدا می‌کند:

$$\frac{d\hat{\rho}_F}{dt} = -\frac{\kappa}{2}(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_F + \hat{\rho}_F \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \kappa \hat{a} \hat{\rho}_F \hat{a}^\dagger, \quad (42-10)$$

که در آن چون اتم و میدان دیگر با یکدیگر برهم کنش ندارند، داریم $\hat{H}_I = 0$ و تغییر نماد $\gamma \rightarrow \kappa$ را اعمال کرده‌ایم. همان‌طوری که در فصل ۸ نشان دادیم، جواب معادله اصلی برای میدانی که ابتدا در حالت گریه زوج بوده، عبارت است از

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_F(t) = \mathcal{N}_e^2 \Big\{ & |\alpha e^{-\kappa t/2}\rangle \langle \alpha e^{-\kappa t/2}| + |-\alpha e^{-\kappa t/2}\rangle \langle -\alpha e^{-\kappa t/2}| \\ & + e^{-2|\alpha|^2(1-e^{-\kappa t})} [|\alpha e^{-\kappa t/2}\rangle \langle -\alpha e^{-\kappa t/2}| + |-\alpha e^{-\kappa t/2}\rangle \langle \alpha e^{-\kappa t/2}|] \Big\}. \end{aligned} \quad (43-10)$$

توجه کنید که بازهم وقتی $t \rightarrow \infty$ میل کند، دو جمله آخر، یعنی «همدوسی‌ها» به شرط آنکه $|\alpha|^2$ خیلی کوچک نباشد، سریع‌تر از انرژی میرا می‌شوند. در این شرایط درمی‌یابیم که حالت اولیه گریه که یک حالت برهم‌نهی کوانتومی است، به مخلوط آماری از حالت‌های همدوس تجزیه می‌شود.

$$\hat{\rho}_F(t) \xrightarrow[t \text{ large}]{} \frac{1}{2} [|\beta(t)\rangle \langle \beta(t)| + |-\beta(t)\rangle \langle -\beta(t)|] \quad (44-10)$$

که در آن $\beta(t) = \alpha e^{-\kappa t/2}$ البته در حد $t \rightarrow \infty$ حالت خلا (خالص) به دست می‌آید:

$$\hat{\rho}_F(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} |0\rangle \langle 0|.$$

چگونه این واهمدوسی‌ها را مشاهده کنیم؟ دیویدویچ^۱ و همکارانش [۱۶] روش زیر را پیشنهاد کردند: یک اتم دیگر (۲) در حالت $(|g\rangle_2 + |f\rangle_2)/\sqrt{2}$ ، T ثانیه بعد از اتم اول به کاواک تزریق شود و نقش یک «موش» کوانتومی را ایفا کند تا حضور گریه را آشکار سازد. حالت «اولیه» جدید، یعنی درست قبل از آنکه اتم دوم تزریق شود، برای سیستم اتم-میدان عبارت است از

$$\hat{\rho}_{AF}(T) = \frac{1}{2}(|g\rangle_2 + |f\rangle_2)(\langle g| + \langle f|)\hat{\rho}_F(T) \quad (45-10)$$

که در آن $\hat{\rho}_F(T)$ توسط معادله ۴۳-۱۰ داده می‌شود. با فرض اینکه سرعت اتم ۲ طوری تنظیم شود که بازهم داشته باشیم $\chi t_2 = \pi$ که در آن t_2 زمان برهم کنش اتم دوم با میدان کاواک است، حالت اتم-میدان درست پس از آنکه اتم ۲ از کاواک خارج شود، توسط عملگر چگالی زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{AF} = \frac{1}{2} [& |g\rangle_{22} \langle g| e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\rho}_F(T) e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} + |f\rangle_{22} \langle f| \hat{\rho}_F(T) \\ & + |g\rangle_{22} \langle f| e^{i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{\rho}_F(T) + |f\rangle_{22} \langle g| \hat{\rho}_F(T) e^{-i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}}]. \end{aligned} \quad (46-10)$$

1. Davidovich

ناحیه دوم رمزی یک پالس $\pi/2$ روی اتم اعمال می‌کند، به‌طوری‌که درست قبل از آنکه اتم به آشکارسازهای یونش برسد، عملگر چگالی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{AF}(T) = & \frac{1}{4}[(|g\rangle_2 + |f\rangle_2)(\langle g| + \langle f|)e^{i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{\rho}_F(T)e^{-i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}} \\ & + (-|g\rangle_2 + |f\rangle_2)(-\langle g| + \langle f|)\hat{\rho}_F(T) \\ & + (|g\rangle_2 + |f\rangle_2)(\langle g| - \langle f|)e^{i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{\rho}_F(T) \\ & + (-|g\rangle_2 + |f\rangle_2)(\langle g| + \langle f|)\hat{\rho}_F(T)e^{-i\pi\hat{a}^\dagger\hat{a}}].\end{aligned}\quad (47-10)$$

عملگر چگالی کاهش‌یافته برای اتم با گرفتن رد روی میدان به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\rho}_A(T) = \text{Tr}_F \hat{\rho}_{AF}(T), \quad (48-10)$$

که از آن احتمال آشکارسازی حالت $|g\rangle_2$ را به‌دست می‌آوریم (جزئیات به‌عنوان تمرین برعهده خواننده گذاشته می‌شود).

$$P_{g_2}(T) = {}_2\langle g|\hat{\rho}_A(T)|g\rangle_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{e^{-2|\alpha|^2}e^{-\kappa T} + e^{-2|\alpha|^2}(1-e^{-\kappa T})}{1 + e^{-2|\alpha|^2}}\right], \quad (49-10)$$

و احتمال آشکارسازی $|f\rangle_2$ برابر است با

$$P_{f_2}(T) = {}_2\langle f|\hat{\rho}_A(T)|f\rangle_2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{e^{-2|\alpha|^2}e^{-\kappa T} + e^{-2|\alpha|^2}(1-e^{-\kappa T})}{1 + e^{-2|\alpha|^2}}\right], \quad (50-10)$$

که باید داشته باشیم $P_{f_2}(T) + P_{g_2}(T) = 1$. یادآور می‌شویم که حالت اولیه میدان، حالت گره زوج، با آشکارسازی اتم اول به حالت $|f\rangle$ تصویر می‌شود. به‌ازای $T = 0$ داریم $P_{f_2}(0) = 1$ که بدین معنی است که اگر هیچ اتلافی در میدان کاواک نبوده است، اتم دوم نیز باید در حالت $|f\rangle$ آشکار شود. اما با افزایش T احتمال آشکارسازی اتم در حالت $|f\rangle$ به سمت $\frac{1}{2}$ میل می‌کند. بنابراین با افزایش زمان تأخیر بین اتم‌های اول و دوم می‌توان واهمدوسی گره زوج اولیه را به یک مخلوط آماری مشاهده کرد.

در بالا، نواحی رمزی با گذار $|f\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ در حال تشدید فرض شدند، درحالی‌که حالت $|f\rangle$ آن‌قدر دور از حالت تشدید با میدان کاواک بود که بتواند به انتقال یا تغییر فاز میدان منجر شود. اما فرض کنید نواحی رمزی در حالت تشدید با گذار $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ تنظیم شده باشند و ناحیه اول برهم‌نهی زیر را تولید کند:

$$|\psi_{\text{atom}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle). \quad (51-10)$$

در این صورت، باید کل هامیلتونی برهم‌کنش مؤثر ۱۰-۳۲ را به کار ببریم. با همان حالت اولیه میدان، در زمان t ، حالت زیر را خواهیم داشت:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\chi t}|e\rangle|\alpha e^{-i\chi t}\rangle + |g\rangle|\alpha e^{i\chi t}\rangle] \quad (52-10)$$

که در آن مشاهده می‌کنیم مؤلفه‌های حالت همدوس در فضای فاز در جهت‌های مخالف دوران می‌کنند. ماکزیمم درهم‌تنیدگی در ماکزیمم جدایی در فضای فاز رخ می‌دهد که وقتی $\chi t = \pi$ است، اتفاق می‌افتد و داریم:

$$|\Psi(\pi/\chi)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[-i|e\rangle|-i\alpha\rangle + |g\rangle|i\alpha\rangle]. \quad (53-10)$$

ناحیه دوم رمزی تبدیل زیر را ایجاد می‌کند:

$$\begin{aligned} |e\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle), \\ |g\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |e\rangle), \end{aligned} \quad (54-10)$$

برای زمان برهم‌کنش دلخواه t به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |\Psi(t), \pi/2\rangle &= \frac{1}{2}[|e\rangle(e^{-i\chi t}|e^{-i\chi t}\alpha\rangle - |e^{i\chi t}\alpha\rangle) \\ &+ |g\rangle(e^{-i\chi t}|e^{-i\chi t}\alpha\rangle + |e^{i\chi t}\alpha\rangle)]. \end{aligned} \quad (55-10)$$

وقتی آشکارسازها طوری تنظیم شوند که حالت‌های $|e\rangle$ و $|g\rangle$ را از یکدیگر تشخیص دهند، تقلیل حالت، حالت‌های کاواک - میدان را به‌صورت زیر تولید می‌کند:

$$|\psi_{\pm}\rangle \sim e^{-i\chi t}|\alpha e^{-i\chi t}\rangle \pm |\alpha e^{i\chi t}\rangle. \quad (56-10)$$

درواقع حالت‌هایی دقیقاً از همین نوع به‌طور تجربی تولید شده‌اند و واهمدوسی آن‌ها مشاهده شده است [۱۷]. لیکن سرعت‌های اتمی در این آزمایش تاحدودی بالا بود. بنابراین انتقال‌های فاز $\chi t = \pi$ به‌دست نیامد. درواقع بیشترین انتقال فاز وقتی رخ داد که داشته باشیم $\chi t < \frac{\pi}{4}$. باوجوداین، این نکته همراه با این واقعیت که حالت همدوس اولیه تزریق‌شده به کاواک دارای میانگین فوتون $\bar{n} \cong 10$ بوده است، سبب شد که جدایی اولیه حالت‌های همدوس مؤلفه به‌قدر کافی بزرگ باشد تا مشاهده واهمدوسی حالت میدان را امکان‌پذیر کند.

۱۰-۶ اندازه‌گیری غیرمخرب کوانتومی عدد فوتونی

در روش استاندارد اندازه‌گیری، آن‌گونه که در پیوست «ب» موردبحث قرار گرفته است، کمیتی که اندازه‌گیری می‌شود معمولاً برآثر اندازه‌گیری از بین می‌رود. به‌عنوان مثال، در مبحث اپتیک کوانتومی اگر بخواهیم تعداد فوتون‌های یک میدان کوانتیده را اندازه‌گیری کنیم، آشکارسازهای فوتونی، فوتون‌ها را جذب و در نتیجه آن‌ها را از حالت میدان خارج می‌کنند. در اینجا، در مبحث CQED نشان می‌دهیم چگونه می‌توان عدد فوتونی را

اندازه‌گیری کرد بدون آنکه هیچ فوتونی جذب شود. این مطلب نمونه‌ای است از آنچه به اندازه‌گیری غیرمخرب کوانتومی (QND) موسوم است [۱۸].

فرض کنید میدان کاواک شامل تعداد معین، ولی نامعلوم n فوتون باشد. یک اتم ریدبرگ در حالت برهم‌نهی $\frac{(|e\rangle + |g\rangle)}{\sqrt{2}}$ به داخل کاواک تزریق می‌شود. بنابراین حالت اولیه سیستم عبارت است از

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle|n\rangle + |g\rangle|n\rangle) \quad (57-10)$$

پس از مدت‌زمان t (زمانی است که اتم در داخل کاواک است) بردار حالت عبارت است از

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \exp[-i \hat{H}_{\text{eff}} t / \hbar] |\Psi(0)\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i \chi t(n+1)}|e\rangle + e^{i \chi t n}|g\rangle]|n\rangle. \end{aligned} \quad (58-10)$$

اگر یک میدان رمزی با پالس تشدید $\frac{\pi}{2}$ به اتم اعمال شود که به تبدیلات ۱۰-۵۴ منجر گردد، بردار حالت به صورت زیر درمی‌آید:

$$|\Psi(t), \pi/2\rangle = \frac{1}{2} \left[|e\rangle (e^{-i \chi t(n+1)} - e^{+i \chi t n}) + |g\rangle (e^{-i \chi t(n+1)} + e^{+i \chi t n}) \right] |n\rangle. \quad (59-10)$$

در این صورت، احتمال آشکارسازی اتم در حالت‌های برانگیخته و پایه به ترتیب عبارت است از

$$\begin{aligned} P_e(t) &= \frac{1}{2} \{1 + \cos[(2n+1)t]\}, \\ P_g(t) &= \frac{1}{2} \{1 - \cos[(2n+1)t]\}, \end{aligned} \quad (60-10)$$

که به وضوح نوسان نسبت به زمان (فرازهای رمزی) را نشان می‌دهد. فرکانس نوسان‌ها تعداد فوتون‌های n را مشخص می‌کند. توجه کنید که حتی وقتی $n=0$ باشد، نوسانات وجود دارد. فرازهای رمزی توسط برون^۱ و همکاران [۱۹] برای موارد $n=0$ و $n=1$ مشاهده شده است. با تزریق یک اتم برانگیخته به داخل کاواک با سرعت مناسب که با کاواک به حالت تشدید درآید، این کاواک در حالت یک تک فوتون قرار می‌گیرد.

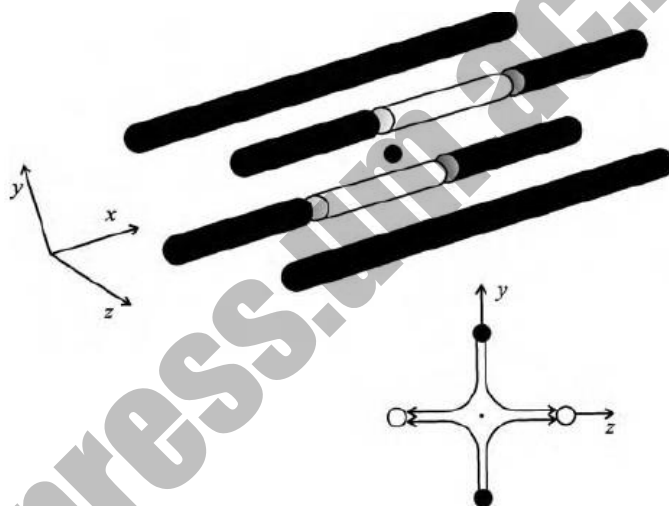
۱۰-۷ تحقق برهم‌کنش جینز - کامینگز در حرکت یک یون به تله افتاده

این فصل را به بحث در این باره می‌پردازیم که اگر برای تحقق برهم‌کنش جینز - کامینگز به جای میدان کوانتیده کاواک از حرکت ارتعاشی مرکز جرم یک یون به تله افتاده استفاده کنیم، چه اتفاقی می‌افتد. به عبارت دیگر، اگر فوتون‌ها را با فونون‌ها (کوانتای ارتعاشات مکانیکی) جایگزین کنیم، چه اتفاقی می‌افتد. تحقق این چنین برهم‌کنشی نتیجه پیشرفت‌های چشمگیر در خنک کردن لیزری یون‌ها (واتم‌های خنثی) در دهه گذشته است.

1. Brune

روش‌های خنک کردن لیزری را در اینجا مورد بحث قرار نمی‌دهیم و خواننده را به مقالات فهرست‌شده در کتاب‌شناسی ارجاع می‌دهیم.

فرض می‌کنیم یک یون به جرم M با لیزر خنک شده و در نوعی تله الکترومغناطیسی قرار گرفته است. دو نوع تله عموماً مورد استفاده قرار می‌گیرد: یکی تله پنینگ^۱ که از ترکیب میدان مغناطیسی یکنواخت و میدان چهارقطبی الکتریکی در آن استفاده می‌شود و دیگری تله پُل^۲ (تله $r.f.$) است که در آن از میدان‌های الکتریکی با فرکانس رادیویی برای در تله انداختن یون‌ها استفاده می‌شود. البته نمی‌توان بر طبق قضیهٔ ارنشاو^۳ [۲۰]، یون‌ها را با میدان‌های الکتریکی استاتیک به تله انداخت. در اینجا وارد جزئیات تله‌ها نمی‌شویم (مرجع هوروات^۴ و همکاران [۲۱] را ببینید). در نوع آزمایشی که مورد نظر ما و شامل یک یون به تله افتاده است، تله پُل مورد استفاده قرار می‌گیرد. طرح این آزمایش در شکل ۱۰-۱۱ آمده است.



شکل ۱۰-۱۱ طرح‌وارهٔ یک تله $r.f.$ پُل خطی؛ محور x در امتداد محور تله قرار دارد و نقطهٔ سیاه نشان‌دهندهٔ یک یون در تله افتاده است. شکل کوچک‌تر معرف یک تصویر جانبی است. سپس میدان $r.f.$ مشترک به الکترودهای با رنگ تیره اعمال می‌شود، درحالی‌که سایر الکترودها در پتانسیل‌های ثابت الکتریکی قرار دارند.

در شروع کار، یک یون دوترازی با ترازهای انرژی الکتریکی داخلی که معمولاً ترازهای بالا ریز هستند و با $|g\rangle$ و $|e\rangle$ نمایش داده می‌شوند و در داخل تله قرار دارند را در نظر می‌گیریم. یک لیزر با فرکانس ω_L را به سمت محور تله که محور x فرض می‌شود، هدایت می‌کنیم. این میدان لیزری قابل تنظیم فرض می‌شود. خود تله با یک نوسانگر هماهنگ با فرکانس ν تقریب زده می‌شود. مقدار این فرکانس با توجه به پارامترهای متعدد تله تعیین می‌شود. مکان مرکز جرم یون را با عملگر $\hat{x}$ مشخص می‌کنیم که آن را بر حسب عملگرهای نابودی و خلق $\hat{a}$

1. Penning
2. Paul

3. Earnshaw
4. Horvath

و $\hat{a}^\dagger$ خواهیم نوشت. در اینجا این عملگرها کوانتاهای حرکت ارتعاشی مرکز جرم یون را نابود و خلق می‌کنند (در این مسئله هیچ میدان تابشی کوانتیده‌ای وجود ندارد). هامیلتونی این سیستم عبارت است از

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + [\mathcal{D}E^{(-)}(\hat{x}, t)\hat{\sigma}_- + H.c.], \quad (61-10)$$

که در آن

$$\hat{H}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\hat{\sigma}_3 + \hbar\nu\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \quad (62-10)$$

هامیلتونی آزاد است و $\mathcal{D}$ گشتاور دوقطبی گذار $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ ، $E^{(-)}(\hat{x}, t)$ قسمت فرکانس منفی میدان لیزری است که به صورت زیر داده می‌شود:

$$E^{(-)}(\hat{x}, t) = E_0 \exp[i(\omega_L t - k_L \hat{x} + \phi)], \quad (63-10)$$

که در آن E_0 دامنه میدان لیزری، $k_L = 2\pi/\lambda$ بردار موج میدان و ϕ یک فاز است. عملگر مکان را مطابق معمول به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\nu M}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger). \quad (64-10)$$

با قرار دادن در معادله ۶۳-۱۰ داریم:

$$E^{(-)}(\hat{x}, t) = E_0 e^{i(\phi + \omega_L t)} e^{-i\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}, \quad (65-10)$$

که در آن $\eta \equiv k_L(\hbar/2\nu M)^{1/2}$ پارامتر لمب-دیک^۱ نامیده می‌شود. این پارامتر کوچک است، $1 \gg \eta$ و این دامنه به رژیم لمب-دیک موسوم است. در این رژیم، دامنه ارتعاشی یون به مراتب کوچک‌تر از طول موج میدان نور لیزر است. حال با استفاده از $\hat{U} = \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar)$ به تصویر برهم‌کنش می‌رسیم و هامیلتونی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} + i\hbar \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} \hat{U}, \\ &= \mathcal{D}E_0 e^{i\phi} e^{i\omega_L t} \exp[-i\eta(\hat{a} e^{i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\nu t})] \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t} + H.c. \end{aligned} \quad (66-10)$$

چون η کوچک است، با بسط تا مرتبه اول داریم:

$$\exp[-i\eta(\hat{a} e^{i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\nu t})] \approx 1 - i\eta(\hat{a} e^{i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{-i\nu t}), \quad (67-10)$$

و بنابراین تا این مرتبه به دست می‌آوریم:

1. Lamb-Dicke

$$\hat{H}_I \approx DE_0 e^{i\phi} [e^{i(\omega_L - \omega_0)t} - i\eta(\hat{a} e^{i(\omega_L - \omega_0 + \nu)t} + \hat{a}^\dagger e^{i(\omega_L - \omega_0 - \nu)t})] \hat{\sigma}_- + H.c. \quad (68-10)$$

حال فرض کنید لیزر طوری تنظیم شده است که $\omega_L = \omega_0 + \nu$ باشد؛ در این صورت داریم:

$$\hat{H}_I \approx DE_0 e^{i\phi} [e^{i\nu t} - i\eta(\hat{a} e^{i2\nu t} + \hat{a}^\dagger)] \hat{\sigma}_- + H.c. \quad (69-10)$$

جملاتی که شامل فرکانس‌های ν و 2ν هستند، در مقایسه با جملات باقی‌مانده خیلی سریع‌تر نوسان می‌کنند و بنابراین به‌طور میانگین صفر می‌شوند. با حذف این جملات (که اساساً تقریب موج چرخان نامیده می‌شوند)، به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{H}_I \approx -i\hbar\eta\Omega e^{i\phi} \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + H.c., \quad (70-10)$$

که همان برهم‌کنش جیتز-کامینگز و $\Omega = DE_0/\hbar$ فرکانس رابی وابسته به برهم‌کنش نیمه کلاسیکی لیزر-اتم است. اما در ارتباط با برهم‌کنش جیتز-کامینگز، مهم است که توجه کنیم حالت‌های داخلی یون به حرکت ارتعاشی مرکز جرمش پیوند دارند. به‌علاوه، توجه کنید که این برهم‌کنش، تنها برهم‌کنش ممکن نیست. اگر لیزر مطابق $\omega_L = \omega_0 - \nu$ تنظیم شده باشد، برهم‌کنش زیر را داریم:

$$\hat{H}_I \approx -i\hbar\eta\Omega e^{i\phi} \hat{a} \hat{\sigma}_- + H.c., \quad (71-10)$$

که شامل برهم‌کنشی است که بقای انرژی را به‌صورت $\hat{a} \hat{\sigma}_-$ حفظ نمی‌کند. این برهم‌کنش مدل پاد جیتز-کامینگز نامیده می‌شود، چیزی که در برهم‌کنش اتم با میدان کوانتیده محقق نمی‌شود. با حفظ جملات بیشتر در بسط $10-67$ ، برهم‌کنش‌های مرتبه بالاتر جیتز-کامینگز تولید می‌شوند. به‌عنوان مثال، فرض کنید جملات تا مرتبه دوم را حفظ کنیم و قرار دهیم $\omega_L = \omega_0 \pm 2\nu$. به‌سادگی می‌توان نشان داد که برهم‌کنش‌های به‌دست آمده به‌شکل زیرند:

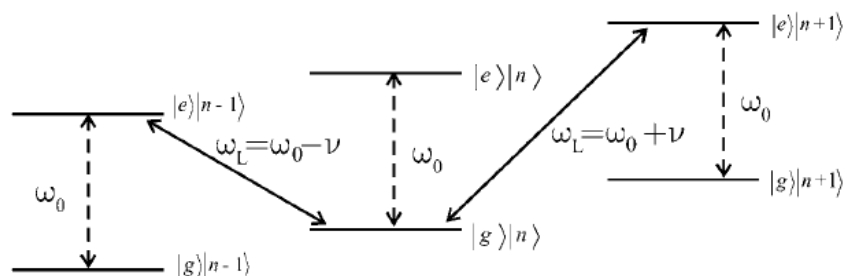
$$\begin{aligned} \hat{H}_I &\sim \eta^2 \hat{a}^{\dagger 2} \hat{\sigma}_- + H.c., \quad \text{for } \omega_L = \omega_0 + 2\nu, \\ \hat{H}_I &\sim \eta^2 \hat{a}^2 \hat{\sigma}_- + H.c., \quad \text{for } \omega_L = \omega_0 - 2\nu. \end{aligned} \quad (72-10)$$

اگر لیزر با فرکانس‌های $\omega_L = \omega_0 \pm l\nu$ ، $l = 0, 1, 2, \dots$ تنظیم شده باشد، واضح است که برهم‌کنش‌هایی از نوع

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &\sim \eta^l \hat{a}^{\dagger l} \hat{\sigma}_- + H.c., \quad \text{for } \omega_L = \omega_0 + l\nu, \\ \hat{H}_I &\sim \eta^l \hat{a}^l \hat{\sigma}_- + H.c., \quad \text{for } \omega_L = \omega_0 - l\nu, \end{aligned} \quad (73-10)$$

ممکن است، هرچند η^l به‌ازای $l > 2$ ممکن است در عمل خیلی کوچک باشد. فرکانس‌های $\omega_L = \omega_0 \pm l\nu$ فرکانس‌های «باند جانبی»^۱ نامیده می‌شوند و در شکل $10-12$ برای حالت‌های $l = 0$ و $l = 1$ نشان داده شده‌اند.

1. Side-band



شکل ۱۰-۱۲ نمودار ترازهای انرژی برای یک یون در تله افتاده که گذارهای باند جانبی را نشان می‌دهد.

انواع مختلف حالت‌های حرکتی غیر کلاسیکی یک یون منفرد در تله افتاده و انواع مختلف پیوندهای یون-فونون به‌طور تجربی مورد مطالعه قرار گرفته است. میخوف^۱ و همکاران [۲۲] در ۱۹۹۶ توانستند حالت‌های گرمایی، فوک، همدوس و فشرده را در حرکت یک ${}^9\text{Be}^+$ که در تله افتاده و ابتدا توسط لیزر تا انرژی نقطه صفر خنک شده بود، ایجاد کنند. آن‌ها توانستند برهم کنش جینز-کامینگز را مهندسی و پدیده‌های فروپاشی و احیا در این سیستم را مشاهده کنند. در واقع فروپاشی و احیاها در این سیستم، از آزمایش CQED که مدل اولیه یک اتم دوترازی در برهم کنش یک میدان تک‌مدی [۱۳] را محقق می‌کرد، واضح‌تر بود. علاوه بر این، توانستند برهم کنش‌های پاد-جینز-کامینگز و دوفونونی را بسازند. در کارهای بعدی [۲۳]، این گروه توانستند حالت‌های گریه شرویدینگرمانند بسازند که شامل یک تک یون به تله افتاده باشد و این یون از برهم‌نهی دو بسته موج گاوسی که چند نانومتر با یکدیگر فاصله داشتند، تشکیل شده بود. البته این فاصله دقیقاً ماکروسکوپی نیست، ولی در مقیاس اتمی بزرگ و یک حالت مزوسکوپ است.

۱۰-۸ نتیجه‌گیری نهایی

این فصل عمدتاً به تحقق الکتروپدینامیک کوانتومی کاواک از طریق برهم کنش یک میدان تابشی کوانتیده با یک اتم دوترازی اختصاص یافته است. لیکن برای میدان‌های کاواک، به جای میدان‌های اپتیکی از میدان‌های میکروویو استفاده شد؛ زیرا از نظر عملی ساده‌تر است که با استفاده از حالت‌های ریدبرگ دایره‌ای که گذارهای آن‌ها در قسمت میکروویو طیف است، تقریب دوترازی برای اتم‌ها به دست آورد. سرچشمه اصلی اتلاف‌ها در آزمایش‌های میکروویو جذب فوتون‌ها توسط دیواره‌های کاواک است. اما کاواک QED در محدوده طیف اپتیکی نیز یک حوزه فعال تحقیقاتی است. یک اختلاف اساسی بین کاواک ED میکروویو و اپتیکی این است که در مورد اخیر، با فرض اینکه کاواک باز است، باید اتلاف ناشی از گسیل خودبه‌خودی به مدهای خارج کاواک را به حساب آورد. این امر ایجاب می‌کند یک جمله اتلافی دیگر در معادله اصلی وارد کنیم که در آن عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ به ترتیب با عملگرهای گذار اتمی $\hat{\sigma}_-$ و $\hat{\sigma}_+$ جایگزین شوند. اثرات این اتلاف‌های اضافی در پدیده‌های فروپاشی و احیا توسط کوانگ، نایت و بوزک [۲۴] مورد مطالعه قرار گرفته است.

1. Meekhof

2. Quang, Knight, Buzek

بالاخره مسئله دیگری را که نادیده گرفته‌ایم، موردی است که بیش از یک اتم در کاواک وجود داشته باشد [۲۵]. رفتار جمعی، مجموعه‌اتم‌های دوترازی را که همه در داخل حجم $V < \lambda^3$ قرار دارند، مورد مطالعه قرار داده است. این اتم‌ها مستقیماً با یکدیگر برهم‌کنش ندارند، ولی می‌توانند از طریق پیوندشان با یک مد میدان مشترک، به‌طور جمعی عمل کنند. پدیده «برتابش»^۱ پیش‌بینی می‌کند وقتی یک حالت از مجموعه N اتم به‌طور مناسب فراهم شده باشد، به‌طور جمعی با شدتی متناسب با N^2 تابش می‌کند، درحالی‌که چنانچه این اتم‌ها به‌طور مستقل تابش می‌کردند، شدت آن‌ها با N متناسب می‌بود. تعمیم این مدل به مورد یک میدان کوانتیده ابتدا توسط تاویس^۲ و کامینگز [۲۶] بررسی شد. ریاضیات عملگرهایی که مجموعه N اتم دوترازی را توصیف می‌کنند، آن‌گونه که ابتدا توسط دیک نشان داده شد [۲۵]، با جبر تکانه زاویه‌ای یکسان است و حالت‌های جمعی اتمی را می‌توان به حالت‌های تکانه زاویه‌ای $|J, M\rangle$ نگاشت کرد که در آن $J = N/2$ است. حالت $|J, -J\rangle = |g\rangle_1 |g\rangle_2 \dots |g\rangle_N$ عبارت است از حاصل ضرب حالت‌های همه اتم‌ها که در حالت پایه قرار دارند و به‌طور مشابه $|J, J\rangle = |e\rangle_1 |e\rangle_2 \dots |e\rangle_N$. لیکن حالت‌های تکانه زاویه‌ای برای سایر مقادیر M ، حالت‌های حاصل ضربی نیستند [۲۷]. با این پایه می‌توان یک مجموعه حالت‌های هم‌دوس اتمی [۲۸] ساخت که حالت‌های هم‌دوس/سپینی [۲۹] نامیده می‌شوند و مشابه با حالت‌های هم‌دوس میدان هستند. بررسی مسئله چنداتمی خارج از بحث این کتاب است و خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند به مراجع و کتاب‌شناسی آخر فصل مراجعه کنند.

مسائل

- ۱- این ادعای معادله ۱۰-۲ را که بنابر آن، برای حالت‌های مجاور ریدبرگ دایره‌ای، اعداد کوانتومی اصلی n و $n-1$ گشتاور دوقطبی به‌صورت $\sim n^2$ رفتار می‌کنند، اثبات کنید.
- ۲- ویژه‌مقدارهای ماتریس $10-18$ را به‌دست آورید.
- ۳- فرض کنید یک اتم که در برهم‌نهی زیر آماده شده است

$$|\psi_{\text{atom}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + e^{i\varphi}|g\rangle), \quad (10-74)$$

- به یک کاواک که میدان آن ابتدا در حالت خلأست، تزریق شود. تحول زمانی برای جمعیت حالت برانگیخته را با فرض Q ی پایین و همچنین Q ی بالا به‌دست آورید. اثر فاز نسبی φ چیست؟
- ۴- برای یک میدان کاواک که ابتدا در یک حالت هم‌دوس با تعداد میانگین فوتون $\bar{n} = 5$ قرار دارد و شامل یک اتم در حالت برانگیخته است، مجموعه معادلات وابسته به معادله اصلی $10-16$ مدل جینز-کامینگز را برای (أ) $\kappa = 0$ (ب) $\kappa = 0.01\lambda$ و (ج) $\kappa = 0.03\lambda$ به‌طور عددی حل کنید. برای هر مورد، وارونی اتمی را به‌صورت تابعی از λt رسم کنید. همین‌طور میانگین عدد فوتونی را به‌صورت تابعی از زمان مقیاس‌شده رسم کنید. نتایج خود را با نتایج مراجع [۳۰] مقایسه کنید.

1. superradiance

2. Tavis

۵- حالت برهم‌نهی گریه‌مانند زیر را در نظر بگیرید:

$$|sup\rangle \sim |\alpha e^{i\phi}\rangle + |\alpha e^{-i\phi}\rangle. \quad (۷۵-۱۰)$$

این حالت را بهنجار کنید. آهنگ واهمدوسی اولیه این حالت نسبت به زاویه ϕ چگونه تغییر می‌کند؟
 ۶- امکان انجام اندازه‌گیری QND عدد فوتونی برای میدان‌های اپتیکی را بررسی کنید. از روش کاواک QED که در بالا توصیف شد، به‌عنوان راهنما و از برهم‌کنش کر-صلیب فصل ۷ استفاده کنید.
 ۷- برای یک تک یون در تله‌افتاده، برهم‌کنش را برای موردی که در آن لیزر با گذارهای حالت‌های داخلی یون، $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ ، در حالت تشدید تنظیم شده است، به‌طوری‌که $\omega_L = \omega_0$ است و در حالتی که جملات تا مرتبه دوم نسبت به η را نگه داشته‌اید، به‌دست آورید. به‌علاوه، اگر حالت داخلی یون ابتدا حالت پایه، یعنی $|g\rangle$ و اگر حرکت مرکز جرم در یک حالت همدوس باشد، تحول سیستم را بررسی کنید. آیا درجات آزادی داخلی و ارتعاشی درهم‌تنیده‌اند؟
 (واهنمایی- حالت‌های پوشیده‌هاملتونی برهم‌کنش مؤثر را به‌دست آورید.)

مراجع

- [1] Haroche S. (1984). in *New Trends in Atomic Physics*, G. Grynberg and R. Stora (editors) (Amsterdam: Elsevier), p. 193.
- [2] Hulet R. G. and Kleppner D. (1983). *Phys. Rev. Lett.*, 51, 1430.
- [3] Nussenzweig P., Bernardot F., Brune M., Hare J., Raimond J. M., Haroche S. and Gawlik W. (1993). *Phys. Rev. A*, 48, 3991.
- [4] Cohen-Tannoudji C., Diu B. and Lalöe F. (1977). *Quantum Mechanics*, volume 2 (New York: Wiley Interscience).
- [5] Bloch F. (1946). *Phys. Rev.*, 70, 460.
- [6] See Allen L. and Eberly J. H. (1975). *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (New York: Wiley Interscience) and (Mineola: Dover, 1987), chapter 2.
- [7] Purcell E. M. (1946). *Phys. Rev.*, 69, 681.
- [8] Kleppner D. (1981). *Phys. Rev. Lett.*, 47, 233.
- [9] Hulet R. G., Hilfer E. S. and Kleppner D. (1985). *Phys. Rev. Lett.*, 55, 2137.
- [10] Ramsey N. F. (1990). *Rev. Mod. Phys.*, 62, 541; *Molecular Beams* (New York: Oxford University Press, 1985).
- [11] Kim I. I., Fonseca Romero K. M., Horiguti A. M., Davidovich L., Nemes M. C. and de Toledo Piza A. F. R. (1999). *Phys. Rev. Lett.*, 82, 4737.
- [12] Rempe G., Walther H. and Klein N. (1987). *Phys. Rev. Lett.*, 58, 353.
- [13] Brune M., Schmidt-Kaler F., Maali A., Dreyer J., Hagley E., Raimond J. M. and Haroche S. (1996). *Phys. Rev. Lett.*, 76, 1800.
- [14] JCirac . I. and Zoller P. (1994). *Phys. Rev. A*, 50, R2799. See also Phoenix S. J. D. and Barnett S. M. (1993). *J. Mod. Opt.*, 40, 979; Kudryavtsev I. K. and Knight P. L., (1993). *J. Mod. Opt.*, 40, 1673; M. Freyberger, P. K. Aravind, M. A. Horne and A. Shimony, (1996). *Phys. Rev. A*, 53, 1232; Beige A., Munro W. J. and Knight P. L., (2000). *Phys. Rev. A*, 62, 052102.
- [15] Hagley E., Maître X., Nogues G., Wunderlich C., Brune M., Raimond J. M. and Haroche S. (1997). *Phys. Rev. Lett.*, 79, 1.
- [16] Davidovich L., Brune M., Raimond J. M. and Haroche S. (1996). *Phys. Rev. A*, 53, 1295.
- [17] Brune M., Hagley E., Dreyer J., Maître X., Maali A., Wunderlich C., Raimond J. M. and Haroche S. (1996). *Phys. Rev. Lett.*, 77, 4887.

- [18] See the review articles by Rangier P., Levensen J. A. and Poizat J.-P. (1998). *Nature*, 396, 537; Braginsky V. B., Vorontsov V. B. and Thorne K. S. (1980). *Science*, 209, 547. An example of an optical application can be found, for example, in Kärtner F. X. and Haus H. A. (1993). *Phys. Rev. A*, 47, 4585.
- [19] Brune M., Nussenzveig P., Schmidt-Kaler F., Bernardot F., Raimond J. M. and Haroche S. (1994). *Phys. Rev. Lett.*, 72, 3339.
- [20] See Lorrain P., Corson D. R., and Lorrain F. (2000). *Fundamentals of Electromagnetic Phenomena* (New York: W. H. Freeman), p. 57.
- [21] Horvath G. Sz. K., Thompson R. C. and Knight P. L. (1997). *Contemp. Phys.*, 38, 25.
- [22] Meekhoff D. M., Monroe C., King B. E., Itano W. M. and Wineland D. J. (1996). *Phys. Rev. Lett.*, 76, 1796.
- [23] Monroe C., Meekhoff D. M., King B. E. and Wineland D. J. (1996). *Science*, 272, 1131.
- [24] Quang T., Knight P. L. and Bužek V. (1991). *Phys. Rev. A*, 44, 6092.
- [25] Dicke R. H. (1954). *Phys. Rev.*, 93, 99. See also. Rehler N. E and Eberly J. E., (1971). *Phys. Rev. A*, 3, 1735, and Eberly J. H. (1972). *Am. J. Phys.*, 40, 1374.
- [26] Tavis M. and Cummings F. W. (1968). *Phys. Rev.*, 170, 379.
- [27] For an elementary account of the mapping of the atomic states onto angular momentum states see Sargent M., III, Scully M. O. and Lamb W. E., Jr. (1974). *Laser Physics* (Reading: Addison-Wesley), appendix G.
- [28] Arrechi F. T., Courtens E., Gilmore R. and Thomas H. (1972). *Phys. Rev. A*, 6, 2211.
- [29] Radcliffe J. M. (1971). *J. Phys. A: Gen. Phys.*, 4, 313.
- [30] Barnett S. M. and Knight P. L. (1986). *Phys. Rev. A*, 33, 2444; Puri R. R. and Agarwal G. S. (1986). *Phys. Rev. A*, 33, R3610 and (1977) *Phys. Rev. A*, 35, 3433

کتاب‌شناسی

دو کتاب مناسب در مورد اتم‌های ریدبرگ عبارت‌اند از:

- Gallagher, *Rydberg Atoms* (Cambridge: Cambridge University Press, 1994).
 - Connerade J. P., *Highly Excited Atoms* (Cambridge: Cambridge University Press, 1998).
- چند مقاله مروری درباره کاواک QED با تأکید بر کاواک‌های میکروبیو عبارت‌اند از:
- Hinds E. A., Cavity Quantum Electrodynamics, in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 28 (1991), 237.
 - Meschede D., Radiating atoms in confined spaces: from spontaneous emission to micromasers, *Phys. Rep.*, 211 (1992).
 - Meystre P., Cavity quantum optics and the quantum measurement process, in *Progress in Optics XXX*, edited by E. Wolf (Amsterdam: Elsevier, 1992).
 - Raimond J. M., Brune M. and Haroche S., Manipulating quantum entanglement with atoms and photons, *Rev. Mod. Phys.*, 73 (2003), 565.
 - Haroche S., Entanglement experiments in cavity QED, *Fortschr. Phys.*, 51 (2003), 388.
- مجموعه‌ای از مقالاتی که بیشترین جنبه‌های کاواک‌های QED را می‌پوشاند، عبارت است از:
- Berman P. (editor) *Cavity Quantum Electrodynamics* (New York: Academic Press, 1994).
- چند مرجع درباره یون‌های در تله افتاده و فیزیک یون‌های در تله افتاده عبارت‌اند از:
- Ghosh P. K., *Ion Traps* (Oxford: Oxford University Press, 1995).
 - Cirac J. I., Parkins A. S., Blatt R. and Zoller P., Nonclassical states of motion in trapped ions, in *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 37 (1996), 237.
 - Liebfried D., Blatt R., Monroe C. and Wineland D., Quantum dynamics of single trapped ions, *Rev. Mod. Phys.*, 75 (2003), 281
- یک مقاله مروری که همه جنبه‌های کاواک QED را می‌پوشاند و شامل کاواک‌های اپتیکی و رفتار جمعی سیستم‌های چنداتمی است عبارت است از
- Haroche S., Cavity Quantum Electrodynamics, in *Fundamental Systems in Quantum*

Optics, Les Houches Session LIII, edited by J. Dalibard, J. M. Raimond and J. Zinn-Justin
(Amsterdam: Elsevier, 1992).

برای بحث مفصل درباره‌ی ابر تابش، مقاله‌ی زیر را ببینید:

- Benedict M. G., Ermolaev A. M., Malyshev V. A., Sokolov I. V. and Trifonov E. D.,
Superradiance (Bristol: Institute of Physics, 1996).

press.um.ac.ir

کاربردهای درهم تنیدگی: تداخل سنجی محدود شده هایزنبرگ^۱ و پردازش اطلاعات کوانتومی

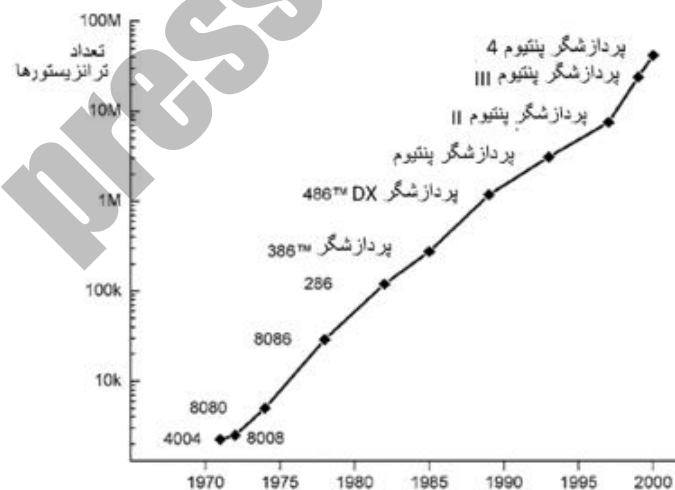
«همه اطلاعات فیزیکی است» شعاری که برای سال‌های متمادی توسط رولف لاندائر^۲ از آی‌بی‌ام^۳ عنوان می‌شد، اخیراً منجر به تغییرات مهمی در روشی که به ارتباطات، محاسبات و رمزنگاری نگاه می‌شد، گردیده است. با به کارگیری فیزیک کوانتومی، چندین موضوع که در جهان کلاسیک غیرممکن تصور می‌شدند، اکنون ممکن شده‌اند. به عنوان مثال، ورود به اطلاعات کوانتومی برای یک جاسوس بدون اینکه ردیابی شود، غیرممکن شد. محاسبات کوانتومی توانستند بعضی از الگوریتم‌ها را که برای ماشین‌های کلاسیک (هرقدر قدرتمند باشند) در رده «سخت» طبقه‌بندی می‌شدند، به «ساده» تبدیل کنند. جزئیات آنچه «سخت» و «ساده» را تشکیل می‌دهند، موضوع نظریه پیچیدگی ریاضیاتی است، ولی ذکر یک مثال، این نکته را روشن می‌کند و نشان می‌دهد که پردازشگرهای اطلاعات کوانتومی چه تأثیری روی همه ما می‌گذارند؟ امنیت بسیاری از اشکال رمزگذاری^۴ به سخت بودن تجزیه اعداد بزرگ بستگی دارد. مدت زمان لازم برای تجزیه یک عدد ۱۰۲۴ رقمی با یک کامپیوتر که براساس قوانین فیزیک کلاسیک طراحی شده است، از عمر جهان طولانی‌تر است. اما این عمل با یک کامپیوتر کوانتومی در یک چشم‌برهم زدن انجام می‌شود. اما به این شرط که بتوانیم آن را بسازیم که خود یک چالش بزرگ است. تاکنون ساخت یک دستگاه کوانتومی با اندازه لازم یا گیت^۵ کوانتومی با دقت مورد نیاز تحقق نیافته است. با وجود این، ارزش دنبال کردن را دارد؛ زیرا یک کامپیوتر کوانتومی با ثبات^۶ با اندازه متوسط می‌تواند کار هر ماشین کلاسیک را انجام دهد و علاوه بر آن، مکانیک کوانتومی این امکان را فراهم می‌کند که تعدادی فناوری غیر کلاسیکی جدید بسازیم که همان‌طوری که خواهیم دید، ابزار تحقق یافتن آن‌ها موجود است.

1. Heisenberg-limited interferometry
2. Rolf Landauer
3. IBM

4. encryption
5. gate
6. Register

پردازش اطلاعات کوانتومی راه کیفی متفاوتی درباره نگرش کار با اطلاعات فراهم می‌کند. ممکن است وقتی منابع کلاسیکی رو به اتمام بگذارند، مجبور به پذیرفتن این راه جدید شویم و فناوری اطلاعات متداول را وارد حوزه کوانتومی کنیم. بنابر یکی از قوانین مور^۱ [۱] که با استفاده از داده‌های تاریخی، توسط بنیان‌گذار INTEL بیان شده است، تعداد ترانزیستور بر هر تراشه (پیچیدگی^۲ کامپیوترها) به‌طور نمایی با زمان افزایش می‌یابد. به عبارت دقیق‌تر، هر یک سال و نیم دو برابر می‌شود، شکل ۱۱-۱ را ببینید.

این قانون تقریباً به‌طور دقیق در سی سال گذشته برقرار بوده است. اگر این افزایش نمایی به سال‌های نزدیک آینده برون‌یابی شود، مشاهده می‌کنیم که براساس قانون مور، تا سال ۲۰۱۷ یک بیت اطلاعات باید در یک تک اتم کدگذاری شود. درواقع حتی قبل از آن، تا سال ۲۰۱۲ اثرات کوانتومی خیلی مهم خواهند بود؛ زیرا به‌طور قابل ملاحظه‌ای در محاسبات تأثیرگذارند و نمی‌توان از آن‌ها چشم‌پوشی کرد. نه تنها کنجکاوی‌های نظری، بلکه پیشرفت‌های فناوری ایجاب می‌کنند که پردازش اطلاعات کوانتومی را بفهمیم. اما در این فصل آنچه مورد نظر ماست این است که بفهمیم مکانیک کوانتومی امکان چه کارهایی را فراهم می‌کند که با آنچه فیزیک کلاسیک انجام می‌دهد، متفاوت است. از قانون مور چنین استنباط می‌شود که تا سال ۲۰۱۷ برای هر ترانزیستور، یک الکترون داشته باشیم و این الکترون، تنها خواهد توانست به ناحیه آن‌قدر کوچک مقید شود که نظیر یک ذره کوانتومی رفتار کند، نه مانند یک توپ بیلیارد باردار کلاسیک. خوشبختانه در این مرحله، فیزیک کوانتومی نه تنها از کامپیوترهای کلاسیکی مهم‌تر خواهد بود، بلکه یک حوزه کاملاً جدید محاسبات کوانتومی با ذهنیت کاملاً متفاوت فراهم خواهد کرد.



شکل ۱۱-۱ قانون مور؛ نمودار داده‌های تاریخی تعداد ترانزیستورهای هر تراشه نسبت به زمان که نشان‌دهنده رشد فزاینده آن است.

1. Moore

2. complexity

۱-۱۱ مزیت درهم‌تنیدگی

در فصل‌های گذشته و در پیوست «ا» به ماهیت درهم‌تنیدگی و بعضی از نتایج آن، نظیر نقض نامساوی بل پرداخته‌ایم. درهم‌تنیدگی را می‌توان به‌طور تقریبی نوعی هم‌بستگی تعریف کرد. اما بیش از آن است و به‌علاوه سیستم‌های کلاسیکی نیز می‌توانند هم‌بستگی داشته باشند. هم‌بستگی بین دو سیستم را می‌توان این‌طور بیان کرد که اگر یک اندازه‌گیری روی یکی از سیستم‌ها نتیجه A را بدهد، اندازه‌گیری روی سیستم دوم با یک احتمال نتیجه B را خواهد داد. هم‌بستگی کامل وقتی اتفاق می‌افتد که وقتی نتیجه سیستم اول را بدانیم، نتیجه سیستم دوم با قطعیت معلوم باشد. بعضی از خوانندگان ممکن است با مقاله جان بل تحت‌عنوان «جواب‌های برتلن و ماهیت واقعیت»^۱ آشنا باشند [۲]. برتلن که یک پروفیسور غیرعادی بود، همواره دو جوراب با رنگ‌های مختلف می‌پوشید که یکی از آن‌ها همواره صورتی بود. اگر یک ناظر تنها به یکی از پاهای وی توجه می‌کرد و متوجه جوراب صورتی می‌شد، می‌دانست که جوراب دیگر یقیناً صورتی نیست. از طرف دیگر، اگر ناظر مثلاً جوراب سبز می‌دید، مطمئن بود که جوراب دیگر صورتی است. هم‌بستگی‌ها در این مورد کاملاً ماهیت کلاسیکی دارند و چیز اسرارآمیزی در این مثال وجود ندارد. حاصل ضرب‌های حالت‌های اسپینی از نوع $|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$ و $|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ دارای هم‌بستگی هستند. هرچند حالت‌های اسپینی هر ذره کوانتومی است، ولی هم‌بستگی‌های بین این حالت‌ها صرفاً کلاسیکی است. حالت‌های بل از نوع

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2), \quad (1-11)$$

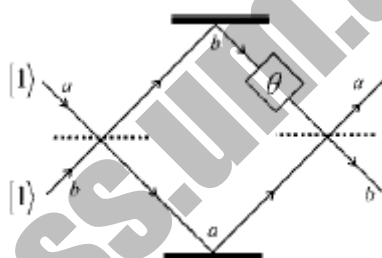
از این نظر که اندازه‌گیری مؤلفه Z ام اسپین یک ذره مؤلفه Z ام اسپین ذره دیگر را تعیین می‌کند نیز دارای هم‌بستگی‌های کلاسیک‌مانند هستند. هرچند در مورد حالت‌های بل یک عنصر احتمال وجود دارد: ۵۰ درصد احتمال برای اینکه آزمایش حالت $|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$ را بدهد و ۵۰ درصد برای احتمال حالت $|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ و از این‌رو، نتیجه اندازه‌گیری‌های اسپین در امتداد Z همواره هم‌بسته‌اند. اما اگر اندازه‌گیری اسپین در راستاهای دیگر را در نظر بگیریم، حالت‌های حاصل ضربی هیچ هم‌بستگی بین اندازه‌گیری‌های ذرات مختلف نشان نمی‌دهند، در حالی که حالت‌های بل انواع معینی از هم‌بستگی‌ها را نشان می‌دهند، هم‌بستگی‌هایی که به نقض نامساوی بل منجر می‌شوند. نامساوی بل، همان‌طوری که از بحث فصل ۹ نتیجه می‌شود، تنها توسط حالت‌هایی که درهم‌تنیده هستند، نقض می‌گردد.

همان‌طوری که قبلاً گفتیم، تاکنون اغلب (اگر نه همه) تست‌های آزمایشگاهی نامساوی بل، مکانیک کوانتومی را تأیید می‌کنند. اما امروزه درهم‌تنیدگی نه صرفاً به‌عنوان یک جنبه رازآلود مکانیک کوانتومی است که تنها برای تدبیر متافیزیکی و تست نظریه‌های متغیر نهان موضعی مناسب است، بلکه اساس یک فناوری جدید را تشکیل می‌دهد. هم‌بستگی‌های غیر کلاسیکی قوی که حالت‌های درهم‌تنیده دارند، دقیقاً چیزی هستند که در تعدادی از فناوری‌های کوانتومی از آن‌ها استفاده می‌شود که در ادامه به آن‌ها می‌پردازیم.

1. Bertlmann's Socks and the Nature of Reality

۱۱-۲ درهم‌تنیدگی و اندازه‌گیری‌های تداخلی

نکته کلیدی در اینکه از توانایی‌های ذاتی درهم‌تنیدگی بتوان استفاده کرد، به توانایی ما از شمارش تعداد ذرات سیستم بستگی دارد. برای نشان دادن این نکته، مسئله اندازه‌گیری فاز تقویت‌شده کوانتومی^۱ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید می‌خواهیم انتقال فاز القاشده توسط یک عنصر اپتیکی روی یک باریکه را تعیین کنیم. یک راه این است که آن عنصر را در یکی از بازوهای تداخل‌سنج قرار دهیم و نور را به ورودی تداخل‌سنج بتابانیم. در این صورت، وقتی فاز تغییر کند، اندازه‌گیری اختلاف جریان‌های فوتونی از دو آشکارساز که در قسمت‌های خروجی تداخل‌سنج قرار دارند، یک الگوی فرانتز سینوسی نشان می‌دهد. یک فاز به‌خصوص را می‌توان با مقایسه اختلاف جریان فوتونی با ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های فوتوالکترن‌های معلوم به‌دست آورد. دقت اندازه‌گیری فاز توسط افت‌وخیزهای جریان فوتونی تعیین می‌شود. اگر نور ورودی کلاسیکی باشد، این افت‌وخیزها در حد نوفه شلیک^۲ خواهند بود. یعنی اگر تابش فرودی دارای عدد فوتونی متوسط $\bar{n}$ باشد، همان‌طوری که در فصل ۶ دیدیم، دقت اندازه‌گیری فاز برابر $\Delta\theta = 1/\sqrt{\bar{n}}$ خواهد بود.



شکل ۱۱-۲ طرح‌واره اندازه‌گیری تداخل‌سنجی انتقال فاز با ورودی حالت‌های تک‌فوتونی دوقلو؛ اندازه‌گیری‌های پارینه باید روی یکی از باریکه‌های خروجی انجام شوند.

اگر نور غیر کلاسیک به تداخل‌سنج بتابد، می‌توان دقت اندازه‌گیری فاز را اصلاح کرد. یادآور می‌شویم که وقتی نور در یک حالت همدوس (نور کلاسیکی) به یک تداخل‌سنج تابانده شود، نور داخل را همواره می‌توان با حالت‌های جداپذیر تشریح کرد؛ حالت‌های نور در امتداد دو باریکه هرگز درهم‌تنیده نمی‌شوند. ولی حالتی را در نظر بگیریم که دقیقاً یک فوتون به هر یک از دو قسمت ورودی a و b تداخل‌سنج وارد شود، حالت ورودی سیستم را می‌توان با $|1\rangle_a |0\rangle_b$ نشان داد. پس از عبور از تقسیم‌کننده باریکه، سیستم در حالت درهم‌تنیده $(|2\rangle_a |0\rangle_b + |0\rangle_a |2\rangle_b)/\sqrt{2}$ قرار می‌گیرد که به‌جز در یک ضریب فاز، مطابق فرمول ۶-۱۷ است. اگر آن‌طوری که در شکل ۱۱-۲ نشان داده شده است، انتقال‌دهنده فاز در بازوی b ی تداخل‌سنج باشد، درست قبل از تقسیم‌کننده باریکه دوم، حالت سیستم $(|2\rangle_a |0\rangle_b + e^{2i\theta}|0\rangle_a |2\rangle_b)/\sqrt{2}$ و بعد از آن، حالت سیستم به‌صورت زیر خواهد بود:

1. Quantum-enhanced phase

2. shot noise

$$|out\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - e^{2i\theta})(|2\rangle_a |0\rangle_b - |0\rangle_a |2\rangle_b) + \frac{i}{2}(1 + e^{2i\theta})(|1\rangle_a |1\rangle_b). \quad (2-11)$$

حال برای اندازه‌گیری انتقال فاز می‌توان از روش به‌کاررفته درمورد ورودی حالت همدوس یا حتی مانند فصل ۶ از روشی که برای ورودی $|1\rangle_a |0\rangle_b$ به‌کار رفت، استفاده کرد. در آن موارد یک تابع نوسانی برای انتقال فاز θ به‌دست آوردیم، اما درمورد اخیر با یک مشکل مواجه می‌شویم. اگر میانگین عدد فوتونی در هریک از باریکه‌های خروجی را محاسبه کنیم، یعنی $\langle \hat{a}_{out}^\dagger \hat{a}_{out} \rangle$ و $\langle \hat{b}_{out}^\dagger \hat{b}_{out} \rangle$ ، مشاهده می‌کنیم که برای هر دو مقدار یک به‌دست می‌آید و به θ بستگی ندارد. بدیهی است که اختلاف آن‌ها صفر خواهد شد (توجه کنید که حاصل جمع این دو، همان‌طوری که انتظار می‌رفت، برابر ۲ است که تعداد کل فوتون‌هاست). بنابراین اندازه‌گیری‌های استاندارد برای به‌دست آوردن θ جواب نمی‌دهد. اما می‌توان از مشاهده‌پذیر دیگری برای اندازه‌گیری استفاده کرد. مشاهده‌پذیری که مناسب به‌نظر می‌رسد، عملگر پاریت (زوجیت یا فردیت تعداد فوتون‌ها) تنها در یکی از باریکه‌های خروجی است. فرض کنید بخواهیم پاریت خروجی مد b را اندازه‌گیری کنیم [۳]. عملگر پاریت این مد عبارت است از

$$\hat{\Pi}_b = (-1)^{\hat{b}^\dagger \hat{b}} = \exp(i\pi \hat{b}^\dagger \hat{b}). \quad (3-11)$$

مقدار چشمداشتی این عملگر نسبت به حالت ۲-۱۱ برابر است با

$$\langle \hat{\Pi}_b \rangle = \langle out | \hat{\Pi}_b | out \rangle = \cos(2\theta) \quad (4-11)$$

که به‌جای θ به 2θ بستگی دارد. اگر بار دیگر از محاسبهٔ انتشار خطا استفاده کنیم، عدم قطعیت در اندازه‌گیری فاز به‌صورت

$$\Delta\theta = \Delta\Pi_b / \left| \frac{\partial \langle \hat{\Pi}_b \rangle}{\partial \theta} \right|, \quad (5-11)$$

را به‌دست می‌آوریم که در آن $\Delta\Pi_b = \sqrt{1 - \langle \Pi_b \rangle^2}$ است و از این واقعیت که $\hat{\Pi}_b^2 = \hat{I}$ عملگر واحد است، استفاده کرده‌ایم. در این مورد به‌خصوص به‌دست می‌آوریم $\Delta\theta = 1/2$ اگر این نتیجه را با نتیجهٔ بهینهٔ حالت همدوس برای همان تعداد میانگین فوتون ورودی، $\Delta\theta = 1/\sqrt{2}$ برای $\bar{n} = 2$ مقایسه کنیم، بهبودی را با ضریب $1/\sqrt{2}$ در حساسیت فاز، یعنی قدرت تفکیک، مشاهده می‌کنیم. این پیشرفت نتیجهٔ درهم‌تنیدگی حالت در داخل تداخل‌سنج است. درواقع این حالت، حالت ۶-۱۷، نوع خاصی از حالت‌ها موسوم به حالت‌های درهم‌تنیدهٔ ماکزیمال (MES) است. ماکزیمال به‌این مفهوم که این حالت یک برهم‌نهی از حالت‌هایی است که تمام فوتون‌ها در یک باریکه یا در باریکهٔ دیگر قرار دارند و هم‌بستگی‌های بین مدها ماکزیمم است. شکل کلی چنین حالتی با تعداد کل N فوتون عبارت است از

$$|\psi_N\rangle_{\text{MES}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|N\rangle_a |0\rangle_a + e^{i\Phi_N} |0\rangle_a |N\rangle_a), \quad (6-11)$$

که در آن Φ_N یک ضریب فاز است که به N بستگی دارد. اگر چنین حالت‌هایی را بتوان تولید کرد و این یک «اگر» بزرگ است، می‌توان نشان داد قدرت تفکیک فاز مقدار دقیق $\Delta\theta = 1/N$ به دست می‌آید که پیشرفتی است در نتیجه حالت همدوس بهینه با نوری که هم‌ارز با عدد فوتونی میانگین $\bar{n} = N$ است. این در واقع دقیق‌ترین سنج‌های است که مکانیک کوانتومی برای اندازه‌گیری انتقال فاز امکان‌پذیر می‌کند [۴] و به حد هاینبرگ ($\Delta\theta_{\text{HL}} \equiv 1/N$) موسوم است.

البته حالت‌های درهم‌تنیده ماکزیمال که گاهی حالت‌های NOON نامیده می‌شوند، باید به‌نحوی به‌طور تجربی محقق شوند. برای مورد $N=2$ ، همان‌طوری که دیدیم، حالت‌های فوتونی دوگانه در ورودی یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰، برای تولید حالت دوفوتونی درهم‌تنیده ماکزیمال کافی هستند. اما برای مورد دلخواه $N > 2$ ، یک تقسیم‌کننده باریکه نمی‌تواند حالت‌های درهم‌تنیده ماکزیمال تولید کند. اما الگوهای برای تولید چنین حالت‌هایی پیشنهاد شده‌اند که بعضی از آن‌ها شامل انواع اندازه‌گیری‌های تقلیل‌دهنده حالت و سایرین شامل محیط‌های غیرخطی با پذیرفتاری بسیار بالا هستند [۶]. لیکن اندازه‌گیری‌های لازم برای پاریته به آشکارسازی‌های فوتونی نیاز دارند که بتوانند عدد فوتونی را در حد یک تک‌فوتون تشخیص دهند. اما آشکارسازهای با چنین دقتی در هنگام نوشتن این متن در دسترس قرار دارند [۷]. به‌عنوان یک راه دیگر، به‌جای تولید حالت‌های درهم‌تنیده ماکزیمال می‌توان از حالت‌های عددی دوقلوی $|N >_a|N >_b\rangle$ در یک تداخل‌سنج ماخ-زندر استفاده کرد [۸]. در قسمت خروجی مانند مورد حالت درهم‌تنیده ماکزیمال، اختلاف میانگین عدد فوتونی صفر می‌شود، اما بار دیگر می‌توان اندازه‌گیری پاریته روی یکی از باریکه‌های خروجی انجام داد. نشان داده شده است که حد هاینبرگ به‌صورت $\Delta\theta_{\text{HL}} \equiv 1/2N$ (در این مورد تعداد کل فوتون‌ها برابر $2N$ است)، در حد N های بزرگ و حداقل وقتی انتقال‌های فاز کوچک باشد [۹]، به‌ازای تمام N ها، پایین‌تر از حد استاندارد کوانتومی $\Delta\theta_{\text{SQL}} \equiv 1/\sqrt{2N}$ است. اما علاوه بر تمام این جزئیات که خارج حوصله این کتاب است، باید گفت نکته اساسی در این بحث این است که درهم‌تنیدگی یک کنجکاو صرف نیست، بلکه کاربردهای عملی دارد که در اینجا اصلاح اندازه‌گیری‌های تداخل‌سنجی است.

۱۱-۳ دوربری^۱ کوانتومی

کاربرد دیگر درهم‌تنیدگی که بیشتر در زمینه فرایندهای اطلاعات کوانتومی است، دوربری کوانتومی است که به‌وسیله آن یک حالت کوانتومی نامعلوم را می‌توان از یک نقطه به نقطه دیگر که می‌تواند از یکدیگر بسیار دور باشند، منتقل کرد. باید تأکید کنیم که این حالت کوانتومی نامعلوم است که منتقل می‌شود، نه ذره یا ذرات آن حالت‌ها. خود را به یک مثال ساده و توضیح نسبتاً اساسی از دوربری کوانتومی محدود می‌کنیم که ابتدا توسط

1. teleportation

بنت^۱ و همکاران [۱۰] انجام شد. مطابق معمول، حالت‌ها را با $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نشان می‌دهیم و لزوماً نباید آن‌ها را حالت‌های عددی فوتون در نظر بگیریم، بلکه می‌توانند نوعی سیستم دوترازی نظیر حالت‌های قطبش تک فوتون‌ها باشند. به‌علاوه در چهارچوب اطلاعات کوانتومی، نمادهای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ و برهم‌نهی‌های این حالت‌ها معرف بیت‌های کوانتومی اطلاعات، کیوبیت، هستند. کیوبیت‌ها نام‌گذاری نظری اطلاعات کوانتومی برای هر سیستم دو-ترازی هستند و یک «تک کیوبیت» به سیستمی اطلاق می‌شود که حالت‌های آن را بتوان با برهم‌نهی‌های حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نشان داد. کیوبیت‌ها می‌توانند با اتم‌های دوترازی نیز محقق شوند. از آنجا که این کتاب عمدتاً با فوتون‌ها سروکار دارد، ممکن است بخواهیم حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را به ترتیب به‌عنوان حالت‌های قطبیده عمودی و افقی فوتون، $|V\rangle$ و $|H\rangle$ ، در نظر بگیریم، ولی روش توصیف کلی است.

معمولاً در روند (پروتکل) دوربری دو نفر مشارکت دارند که آن‌ها را معمولاً آلایس (A) و باب (B) می‌نامند. فرض کنید آلایس یک مد فوتونی در حالت کوانتومی $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ در اختیار دارد و می‌خواهد این حالت را به باب بفرستد (دوربری کند)، به‌طوری که باب بتواند این حالت را در یک مد فوتونی که در اختیار دارد، بازیابی کند. این حالت برای آلایس نامعلوم است، یعنی وی ضرائب c_0 و c_1 را نمی‌داند. درواقع اگر می‌دانست، این پروتکل ضروری نبود؛ زیرا می‌توانست با یک کانال کلاسیکی (به‌عنوان مثال، تلفن) این اطلاعات را به باب بدهد. علاوه‌براین، فرض می‌کنیم یک چشمه نوری بتواند حالت درهم‌تنیده‌ای به‌صورت

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B), \quad (7-11)$$

تولید کند که برطبق اندیس‌های رابطه بالا بین آلایس و باب به اشتراک بگذارد. بنابراین، تا اینجا آلایس یک حالت $|\psi\rangle$ که می‌خواهد آن را دوربری کند و یک بخش از حالت به اشتراک گذاشته $|\Psi_{AB}\rangle$ را در اختیار دارد، درحالی که باب تنها بخش دیگر $|\Psi_{AB}\rangle$ را در اختیار دارد. بنابراین می‌توان حالت کل برای آلایس و باب را به‌صورت

$$|\Phi_{AB}\rangle := |\psi\rangle |\Psi_{AB}\rangle = (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B)/\sqrt{2}. \quad (8-11)$$

نوشت. اگر این حالت را بسط دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} |\Phi_{AB}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(c_0|0\rangle|0\rangle_A|0\rangle_B + c_0|0\rangle|1\rangle_A|1\rangle_B + c_1|1\rangle|0\rangle_A|0\rangle_B + c_1|1\rangle|1\rangle_A|1\rangle_B) \\ &= \frac{1}{2}[\Phi^+(c_0|0\rangle_B + c_1|1\rangle_B) + \Phi^-(c_0|0\rangle_B - c_1|1\rangle_B) \\ &\quad + \Psi^+(c_0|1\rangle_B + c_1|0\rangle_B) + \Psi^-(c_0|1\rangle_B - c_1|0\rangle_B)], \end{aligned} \quad (9-11)$$

که در آن حالت‌های بل زیر را وارد کرده‌ایم:

1. Bennett

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle_A + |1\rangle|1\rangle_A), \quad (10-11)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle_A - |1\rangle|1\rangle_A), \quad (11-11)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle_A + |1\rangle|0\rangle_A), \quad (12-11)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle_A - |1\rangle|0\rangle_A), \quad (13-11)$$

این حالت‌ها دوبه‌دو متعامدند و از این رو، یک پایه در فضای چهاربعدی هیلبرت تشکیل می‌دهند. این حالت‌ها از حالت‌های پایه حالت نامعلومی که باید ترابرد^۱ شود و آن بخشی از حالت درهم‌تنیده که در اختیار آلین است، ساخته شده‌اند. هریک از حالت‌های بل در ۹-۱۱ با یک درهم‌تنه متفاوت از حالت‌هایی از حالت درهم‌تنیده که در اختیار باب است، هم‌بسته شده‌اند. تا اینجا از نظر فیزیکی، هیچ چیزی اتفاق نیفتاده است؛ تنها حالت حاصل ضربی بخشی از حالت درهم‌تنیده و حالتی را که باید ترابرد کنیم، بازنویسی کرده‌ایم. گام بعدی در پروتکل این است که آلین اندازه‌گیری تصویری روی پایه بل انجام دهد. هریک از حالت‌های چهارگانه بل، $|\Phi^\pm\rangle$ و $|\Psi^\pm\rangle$ ، به‌طور تصادفی و با احتمال $1/4$ به‌دست می‌آیند. فرض کنید آلین حالت $|\Phi^+\rangle$ را به‌دست آورد و بداند که این حالت را در اختیار دارد؛ در این صورت، حالت فوتونی باب به حالت $(c_0|0\rangle_B + c_1|1\rangle_B)$ تصویر خواهد شد. سپس آلین از طریق یک کانال کلاسیکی به باب اطلاع می‌دهد که وی حالت $|\Phi^+\rangle$ را آشکار کرده و بنابراین هردو می‌دانند که باب همان حالت ترابردشده را در اختیار دارد و بنابراین هیچ کاری لازم نیست انجام دهد. توجه کنید که نه آلین و نه باب نمی‌دانند که این حالت چیست؟ از طرف دیگر، اگر آلین اعلام کند که حالت $|\Phi^-\rangle$ را آشکار کرده است، حالتی که در اختیار باب است، $c_0|0\rangle_B - c_1|1\rangle_B$ خواهد بود که با حالت اولیه در علامت جمله دوم اختلاف دارد. بنابراین برای اینکه حالت اولیه را به‌دست آورد، باید تبدیل $|1\rangle_B \rightarrow -|1\rangle_B$ ، $|0\rangle_B \rightarrow |0\rangle_B$ را انجام دهد. اگر آلین حالت $|\Psi^+\rangle$ را آشکار کند، باب حالت $c_0|1\rangle_B + c_1|0\rangle_B$ را خواهد داشت و لازم است که عمل «برگردان^۲» $|0\rangle_B \rightarrow |1\rangle_B$ ، $|1\rangle_B \rightarrow |0\rangle_B$ را انجام دهد که هم‌ارز گیت NOT است. بالاخره اگر آلین حالت $|\Psi^-\rangle$ را آشکار کند، حالت باب $(c_0|1\rangle_B - c_1|0\rangle_B)$ خواهد بود و باید تبدیل $|1\rangle_B \rightarrow -|1\rangle_B$ ، $|0\rangle_B \rightarrow |0\rangle_B$ را اعمال کند. بدین ترتیب، پروتکل دوربری کامل می‌شود.

عملیات بالا را می‌توان در پایه دوبعدی $(|0\rangle_B, |1\rangle_B)$ برحسب ماتریس‌های 2×2 $\{I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

1. teleport

2. flip

نوشت که I_2 ماتریس واحد دوبعدی و بقیه ماتریس‌های پاولی هستند. بالاخره توجه کنید که در طول این عملیات، هرگز هیچ کدام از اینکه حالت اولیهٔ تراپردشده چه بوده است، اطلاعی ندارند. در انجام این عملیات و اندازه‌گیری‌های بل، حالت اصلی از بین می‌رود.

به‌نظر می‌رسد که در دوربری کوانتومی، عنصری از جادوگری وجود دارد و اگر چنین به‌نظر می‌رسد، دلیل آن این است که حالت به‌اشتراک گذاشته‌شده توسط آلیس و باب یک حالت درهم‌تنیده است. اگر می‌خواستیم دوربری یک حالت را با اشتراک گذاشتن مخلوط آماری

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{2} (|0\rangle_A |0\rangle_B \langle 0|_B \langle 0|_A + |1\rangle_A |1\rangle_B \langle 1|_B \langle 1|_A), \quad (11-14)$$

بین آلیس و باب انجام دهیم، همان‌طور که خواننده می‌تواند کنترل کند، دوربری ممکن نبود. باوجوداین، توجه کنید که حالت مخلوط بالا نشان‌دهندهٔ هم‌بستگی است، ولی این هم‌بستگی‌ها کاملاً ماهیت کلاسیکی دارند. دوربری کوانتومی یک کنجکاوی نظری صرف نیست، بلکه یک واقعیت تجربی است. اولین آزمایش‌های دوربری حالت‌های کیوبیت که در آن کیوبیت‌ها حالت‌های قطبش فوتونی بودند، توسط گروه‌هایی در رم [۱۱] و ایشبورگ [۱۲] انجام شد. بعد از آن یک گروه در کلنک^۱، یک حالت با متغیرهای پیوسته، یعنی حالتی که از حالت‌های فشرده تشکیل شده بود را تراپرد کردند [۱۳].

۱۱-۴ رمزنگاری^۲

در عصر اطلاعات، ارتباطات امن از اهمیت بالایی برخوردار است. یک چنین ارتباطاتی روی سیستم‌های رمزنگاری اعمال می‌شود که امنیت آن‌ها به مسائلی که حل آن‌ها بسیار مشکل است، مخصوصاً تجزیهٔ اعداد، متکی است. یک جایگزین، رمزنگاری کوانتومی است که براساس قوانین مکانیک کوانتومی بنا شده است و امنیت آن به‌خاطر ماهیت اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی تضمین می‌شود.

توسعهٔ بسیار سریع ارتباطات الکترونیکی و بازرگانی، نگرانی در امنیت و صحت پیام‌های الکترونیکی را افزایش داده است. البته این مشکل جدیدی نیست؛ از ابتدا بشر نیاز داشته است که پیام‌های محرمانه بین افراد مبادله شود. برای هزاران سال الگوهای طراحی شده بود که به‌وسیلهٔ آن بتوان صحت پیام‌ها (با امضا) و امنیت آن‌ها را از دسترسی‌های غیرمجاز مصون نگه داشت (رمزنگاری). در روش‌های جدید برای ارتباطات امن همواره ابتدا بین طرفین یک عدد تصادفی یا یک رشتهٔ دوتایی (باینری) مبادله می‌گردد که کلید نامیده می‌شود. اگر طرفین مبادله‌کننده این عدد را بین خودشان نگه دارند و هیچ‌کس دیگر از آن مطلع نشود، پیام‌ها می‌توانند به‌طور امن رمزگذاری و رمزگشایی^۳ شوند. لیکن، این روش وقتی فرد سومی به کلید دسترسی پیدا کند، در معرض آسیب قرار می‌گیرد. مکانیک کوانتومی دو طرف را قادر می‌سازد تا کلیدی امن به اشتراک بگذارند و مطمئن باشند که جاسوس به کلید دسترسی پیدا نکرده است. رمزنگاری کوانتومی را در این بخش مرور می‌کنیم.

1. Caltech

2. cryptography

3. decode

مکانیک کوانتومی دارای این پتانسیل است که در پردازش اطلاعات، حداقل در دو روش تقریباً مکمل، انقلاب ایجاد کند. یکی اینکه وقتی محاسبه کوانتومی محقق شد، می‌تواند اعداد بزرگ را که در توان هیچ کامپیوتر کلاسیکی نیست، تجزیه کند. چون (همان‌طوری که خواهیم دید) مشکل بودن تجزیه اعداد اساس امنیت در ارتباطات کلاسیکی را تشکیل می‌دهد، یک چنین کامپیوتر کوانتومی کلید امنیت رمزنگاری‌های موجود را تهدید می‌کند. اما همان‌طوری که مکانیک کوانتومی می‌تواند امنیت رمزنگاری را از بین ببرد، می‌تواند آن را نجات نیز بدهد. نشان خواهیم داد که قوانین پایه مکانیک کوانتومی به ما این امکان را می‌دهد تا پروتکل‌های رمزنگاری‌ای بسازیم که در مقابل استراق‌سمع ایمن باشند.

ساختار این بخش به شرح زیر است: ابتدا با مقدمه‌ای بر کلیدهای خصوصی و عمومی سیستم‌های رمزنگاری شروع می‌کنیم. سپس چند پروتکل کوانتومی و تحقق آزمایشگاهی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. اما قبل از ادامه بیشتر، بهتر است چند اصطلاح و مفهوم را تعریف کنیم.

آلیس و باب: آلیس فردی است که می‌خواهد یک پیام خصوصی به باب بفرستد.

ایو: جاسوسی است که می‌خواهد پیام ارسال شده توسط آلیس به باب را استراق‌سمع کند و آن را بخواند. فرض می‌کنیم ایو دسترسی کامل به کانال ارتباطی به کاررفته در انتقال پیام دارد.

کانال عمومی: یک کانال ارتباطی که اطلاعات از طریق آن از یک نقطه به نقطه دیگر منتقل می‌شود. جاسوس به اطلاعات منتقل شده توسط این کانال دسترسی کامل دارد.

کانال خصوصی: یک کانال امن که جاسوس به آن دسترسی ندارد. فرض بر این است که غیرممکن است اطلاعات منتقل شده از این کانال را استراق‌سمع کرد. این کانال اغلب کانال مورداعتماد نامیده می‌شود.

مواد کلید: یک رشته از اعداد تصادفی که تنها برای آلیس و باب معلوم‌اند.

الگوریتم متقارن: عنوان کلید متقارن از این جهت مورد استفاده قرار گرفته است که کلید رمزگذاری را می‌توان از کلید رمزگشایی محاسبه کرد و برعکس. در اغلب موارد کلید رمزگذاری و کلید رمزگشایی یکی است.

الگوریتم کلید عمومی: الگوریتم‌های کلید عمومی نامتقارن هستند و طوری طراحی شده‌اند که کلید به کاررفته برای رمزگذاری با کلید رمزگشایی متفاوت باشد. به علاوه، نمی‌توان کلید رمزگشایی را با صرف مدت زمان معقولی از کلید رمزگذاری محاسبه کرد.

۱۱-۵ کلید خصوصی سیستم‌های رمزگذار^۲

تا حدود ۱۹۷۰ تمام سیستم‌های رمزگذاری عموماً براساس کلید خصوصی کار می‌کردند. در این شرایط دو نفری که می‌خواستند با یکدیگر ارتباط برقرار کنند (آلیس و باب)، می‌بایست قبلاً یک کلید خصوصی بین خود

1. Eve

2. Crypto-systems

به اشتراک بگذارند. اگر آلیس بخواهد پیامی به باب بفرستد، با یک کلید رمزگذاری پیام را رمزگذاری می‌کند. این پیام رمزگذاری شده به‌طور علنی (از طریق یک کانال عمومی) به باب منتقل می‌شود. سپس باب با استفاده از کلید رمزگذاری (که قبلاً با آلیس مقرر شده است) پیام را رمزگشایی و بدین ترتیب، مطابق شکل ۳-۱۱ پیام اصلی را دریافت می‌کند.



شکل ۳-۱۱ طرح یک سیستم رمزنگار

یکی از قدیمی‌ترین نمونه‌های سیستم رمزگذاری موسوم به سیستم رمزگذاری سزار^۱ است که در آن اعداد را جایگزین الفبای معمولی می‌کند. ساده‌ترین راه این است که ۲۶ حرف الفبا ($A - Z$) را هم‌ارز با اعداد صفر تا ۲۵ برای مثال ($A = 0, B = 1, \dots, Z = 25$) بگیریم و به هر کدام یک عدد ثابت دیگر (به‌عنوان مثال ۱۰) اضافه کنیم. برای انجام این عمل تابع

$$f(x) = \begin{cases} x + 10, & x < 15 \\ x - 15, & x \geq 15 \end{cases} \quad (11-15)$$

یا به‌شکل فشرده‌تر

$$f(x) = x + 10 \pmod{26}. \quad (11-16)$$

را معرفی می‌کنیم. به‌عنوان مثال، فرض کنید آلیس می‌خواهد کلمه "HELLO" را به باب بفرستد. برای این کار، ابتدا کلمه "HELLO" را به هم‌ارز عددی آن که عبارت است از «۱۴ ۱۱ ۱۱ ۵ ۷» تبدیل می‌کند. سپس تابع بالا را اعمال می‌کند تا پیام رمزگذاری شده «۲۴ ۲۱ ۲۱ ۱۵ ۱۷» را به‌دست آورد و از طریق یک کانال باز به باب بفرستد. با توجه به اینکه قبلاً ماهیت رمزگذاری بین باب و آلیس مشخص شده است، باب وارون تابع $f^{-1}(x)$ را می‌داند و بنابراین پیام «۲۴ ۲۱ ۲۱ ۱۵ ۱۷» را به «۱۴ ۱۱ ۱۱ ۵ ۷» رمزگشایی می‌کند و سپس اعداد را به حروف الفبا برمی‌گرداند و کلمه "HELLO" را به‌دست می‌آورد.

در پروتکل بالا لازم است آلیس و باب هر دو شکل تابع رمزگذاری را بدانند (این کار قبلاً باید به طریق امنی انجام شود). آلیس یک تابع رمزگذاری را به کار می‌برد و باب تابع رمزگشایی را که وارون تابع رمزگذاری است، استفاده می‌کند. یک نسخه پیچیده رمزگذاری می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$f(x) = ax + b \pmod{N}, \quad (11-17)$$

1. caesar

که در آن a و b مقادیر ثابتی هستند. مشکل با این نوع رمزگذاری این است که وقتی جاسوس (ایو) شکل تابع را بداند، می‌تواند همانند باب آن را رمزگشایی کند. اگر یک رمزگذاری مکرراً مورد استفاده قرار گیرد، ایو می‌تواند به پیام حمله کند و پیام را در اختیار بگیرد.

یک اصلاح در کدگذاری پیشنهادشده بالا امکان رمزگذاری امن را فراهم می‌کند. یک کلید خصوصی بسیار مشهور رمزورنام^۱ است (که به پد یک بار مصرف^۲ موسوم است). این الگوبین آلیس و باب که قبلاً یک رشته کلید بین خود به اشتراک گذاشته‌اند، انجام می‌شود. این عمل باید به‌طور خصوصی و محرمانه انجام شود. وقتی آلیس و باب بخواهند یک پیام مبادله کنند، آلیس با افزودن رشته کلید به پیام، آن را کدگذاری می‌کند. سپس این پیام از طریق یک کانال عمومی به باب ارسال می‌شود. پد یک بار مصرف یک کلید امن سیستم رمزنگاری است که خیلی زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طوری که از اسمش پیداست، «پد یک بار مصرف» وقتی امن است که از یک کلید بیش از یک بار استفاده نشود. درواقع برای اینکه پیام کاملاً امن باشد، تعداد عناصر کلید حداقل باید به اندازه پیام باشد.

یکی از مشکلات عمده با پد یک بار مصرف این است که باید تعداد بسیار زیادی از عناصر کلید بین کسانی که می‌خواهند ارتباط برقرار کنند، به مشارکت گذاشته شود. این کار نمی‌تواند از طریق کانال عمومی انجام شود؛ زیرا در این صورت استفاده از آن غیرعملی خواهد بود. ولی هنوز هم امروزه در مواردی که به امنیت کامل نیاز باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل‌های معینی از بانکداری هنوز از رمزورنام و اغلب سیستم‌های رمزنگاری^۳ از تنظیمات کلید عمومی استفاده می‌کنند.

۱۱-۶ سیستم‌های رمزنگاری کلید عمومی

سیستم‌های رمزنگاری کلید خصوصی که در بالا بررسی کردیم، براساس توزیع عناصر کلید بنا شده‌اند. روش دیگری وجود دارد که تحت عنوان سیستم‌های رمزنگاری کلید عمومی شناخته می‌شود که به اشتراک گذاری امن عناصر کلید قبل از ارتباط نیازی ندارد. سیستمی که احتمالاً بیشترین کاربرد را دارد، سیستم RSA (برگرفته از اسمای ریوست، شامیر، ادلمن^۴) است. سیستم رمزنگاری RSA براین اساس بنا شده است که تعداد گام‌های لازم برای تجزیه یک عدد N رقمی در کامپیوترهای کلاسیکی، سریع‌تر از چندجمله‌ای نسبت به N افزایش می‌یابد. تجزیه دو عدد ۲۱ و ۱۰۷۳ را اگر بخواهید با دست انجام دهید، تجزیه ۲۱ به آسانی معلوم است، ولی تجزیه ۱۰۷۳ قدری طول می‌کشد. در کامپیوترها نیز چنین است. هرچه N بزرگ‌تر شود، تجزیه با یک کامپیوتر کلاسیکی مشکل‌تر می‌شود و درواقع تعداد گام‌های لازم به‌طور نمایی با N افزایش می‌یابد. از اینجاست که امنیت کلید حاصل می‌شود. اگر این اعداد بزرگ را بتوان تجزیه کرد، یک جاسوس می‌تواند پیام را کشف کند. حال پروتکل RSA را بررسی می‌کنیم. این پروتکل به باب امکان می‌دهد به‌طور عمومی یک کلید را (کلید

1. Vernam cipher
2. One - time pad

3. Crypto-system
4. Rivest, Shamir, Adleman

عمومی) اعلام کند، به‌طوری‌که آلیس بتواند از کلید استفاده نماید و یک پیام را کدگذاری و از کانال عمومی به باب ارسال کند. در این پروتکل تنها باب می‌تواند پیام را رمزگشایی کند. پروتکل RSA به‌صورت زیر است:

- ابتدا باب دو عدد اول بسیار بزرگ p و q (که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از 10^{1000} باشد) انتخاب و عدد $N = pq$ (بدیهی است که $N > 10^{2000}$) و $(p-1)(q-1) = \phi(N)$ را محاسبه می‌کند. سپس یک عدد صحیح $e < N$ انتخاب می‌کند، به‌طوری‌که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک بین e و $\phi(N)$ برابر ۱ باشد (یعنی نسبت به هم اول باشند). پس از آن، باب عدد $d = e^{-1}(\text{mod } \phi(N))$ را محاسبه می‌کند.

- سپس باب کلید عمومی (e, N) را از طریق یک کانال عمومی به آلیس می‌فرستد.

- حال آلیس متن اصلی خود، m ، را برحسب قاعده $c = m^e(\text{mod } N)$ کدگذاری و نتیجه c را به باب ارسال می‌کند.

- وقتی باب پیام رمزگذاری‌شده c را دریافت کرد، $c^d(\text{mod } N)$ را محاسبه و پیام اصلی m را بازیابی می‌کند.

جالب‌توجه است که اکثر کارها در این پروتکل توسط باب (و نه آلیس) انجام می‌شوند. کار اصلی آلیس این است که پیام m را که می‌خواهد بفرستد، کدگذاری و همراه با کلید عمومی (e, N) به باب ارسال کند.

حال که تمام ارتباطات تنها از طریق کانال عمومی اتفاق می‌افتد، مکانیسمی که یک جاسوس بتواند این سیستم رمزگذاری را بشکند چیست؟ جاسوس می‌تواند به‌سادگی به این سیستم رمزگذاری حمله کند. برای این کار، باید $d = e^{-1}(\text{mod } \phi(N))$ را که در آن تنها e و N معلوم است، محاسبه کند. برای انجام این کار، باید بتواند عدد N را تجزیه کند. وقتی توانست با تجزیه اعداد p و q را به‌دست آورد، می‌تواند $\phi(N)$ را محاسبه کند. با وجودی‌که این کار ساده به‌نظر می‌رسد، ولی اینکه بتوان عددی مانند $N > 10^{2000}$ را روی یک کامپیوتر کلاسیکی با فناوری موجود در زمان معقولی تجزیه کرد، عملی نیست (درواقع برای تجزیه اعدادی که در حال حاضر در سیستم رمزگذاری RSA استفاده می‌شوند، با یک ابرکامپیوتر بسیار بزرگ سال‌های سال طول می‌کشد). اما پیشنهاد اخیر برای یک نوع جدید از معماری کامپیوترها، کامپیوتر کوانتومی، این امکان که این اعداد بسیار بزرگ در زمان بسیار کوتاهی تجزیه شوند، وجود دارد.

البته کامپیوتر کوانتومی هنوز محقق نشده است، ولی این پتانسیل را دارد که به‌دلیل فضای حالت فوق‌العاده بزرگ‌ترش نسبت به ماشین کلاسیکی، در فرایند اطلاعات انقلاب ایجاد کند و این به‌نوبه خود طبقه‌بندی پیچیدگی‌ها را که براساس آن سخت بودن محاسبات تعیین می‌شود، تغییر می‌دهد، به‌طوری‌که بعضی کارها که در ماشین‌های کلاسیک فوق‌العاده سخت‌اند (یعنی به منابع نمایی نیاز دارند) در ماشین‌های کوانتومی آسان می‌شوند (تنها به منابع چندجمله‌ای نیاز دارند). این اتفاق به‌دلیل وجود دو جنبه فیزیکی کوانتومی است: درهم‌تنیدگی و تداخل کوانتومی که ظرفیت انجام پردازش‌های موازی را دارد.

در ۱۹۸۵ دیوید دویچ^۱ [۱۵] (با یک تعمیم در ۱۹۹۲ همراه با ریچارد جوزا^۲ [۱۶]) ثابت کرد که در مکانیک

کوانتومی درجه پیچیدگی بعضی مسائل به‌طور چشمگیری تغییر می‌کند. این کار راه را برای پیشرفت‌هایی در الگوریتم‌های کوانتومی از جمله الگوریتم تجزیه اعداد بزرگ توسط پیتر شور^۱ فراهم کرد. در ۱۹۹۴ پیتر شور [۱۷] یک الگوریتم کوانتومی ساخت که امکان می‌داد اعداد بزرگ را با زمان چندجمله‌ای تجزیه کند. بنابراین اگر کسی یک کامپیوتر کوانتومی در اختیار داشته باشد، تجزیه مانند ضرب آسان خواهد شد. اخیراً توانسته‌اند با یک ماشین کوانتومی عدد ۱۵ را تجزیه کنند [۱۸]. هرچند این موفقیت گامی کوچک به جلو است، ولی پتانسیل کامپیوتر کوانتومی را در اجرای الگوریتم‌های مشکل نشان می‌دهد. نکته اساسی در اینجا این است که اگر الگوی محاسبات کوانتومی تا مقیاسی پیش رود که بتوان اعداد بسیار بزرگ را تجزیه کرد، سیستم رمزنگاری RSA در مقابل رمزگشایی آسیب‌پذیر خواهد بود. البته الگوی NMR تا مرتبه لازم مقیاس‌پذیر نیست.

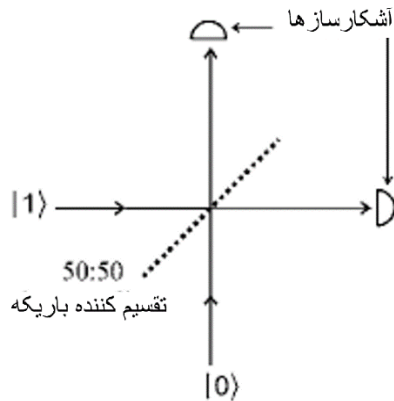
۱۱-۷ مولد اعداد تصادفی کوانتومی

اغلب لازم است در کامپیوترهای کلاسیکی رشته‌ای از اعداد تصادفی تولید شود. اما اعداد تولیدشده تنها شبه تصادفی هستند؛ زیرا همواره الگوریتم‌های جبرگرایانه^۲ در آن دخیل‌اند. در بسیاری از پروتکل‌های رمزنگاری کلید خصوصی، لازم است دسترسی موضعی به یک منبع واقعی (و نه شبه واقعی) اعداد تصادفی داشته باشیم. این نکته برای الگوهای رمزنگاری کوانتومی که در زیر آن‌ها را توضیح می‌دهیم نیز صادق است. درحالی که اعداد شبه تصادفی که به‌طور جبرگرایی تولید می‌شوند می‌توانند کاملاً تصادفی به‌نظر برسند، اگر کسی الگوریتم را بداند و پیگیر باشد، این امکان وجود دارد که بتواند این رشته اعداد را بازتولید کند. علاوه بر این، تعدادی مولد اعداد تصادفی سخت‌افزاری وجود دارند که براساس پیچیدگی افت‌وخیزهای نوفه گرمایی بنا شده‌اند و می‌توانند رفتارهای آشوبی در سیستم به‌وجود آورند. مشکل پیش‌بینی نتیجه فرایند آشوبی مشابه با فرایند تصادفی است. در شرایط ایدئال این روش منبع خوبی برای اعداد تصادفی است. لیکن یک مشکل بالقوه این است که نوفه‌های گرمایی می‌توانند توسط کسی که قادر به مداخله در محیط اطراف است، تأثیرپذیرد و به‌طور مؤثر کنترل شود. در سال‌های اخیر راه‌حل ساده و ظریفی که بر اصول مکانیک کوانتومی بنا شده پیدا شده است (شکل ۱۱-۴ را ببینید).

ابزاری که در شکل ۱۱-۴ نشان داده شده براساس خواص یک تقسیم‌کننده باریکه^{۵۰:۵۰} که در فصل ۶ دیدیم، بنا شده است. ورودی‌های آن یک حالت تک‌فوتونی و خلأ هستند. آشکارسازهایی که در خروجی‌ها قرار گرفته‌اند، اطلاعات کدام مسیر را می‌دهند. اگر فوتون مسیر بازگشتی را انتخاب کند، عدد صفر و اگر مسیر عبوری را انتخاب کند، عدد یک را به آن منتسب می‌کنیم. از آنجا که احتمال هر مسیر ۵۰ درصد است، با احتمال ۵۰٪ عدد یک یا صفر را خواهیم داشت؛ این همان بیت تصادفی ماست. با انجام چندین بار این عمل، رشته‌ای از بیت‌های واقعاً تصادفی تولید می‌شود.

1. Peter Shor

2. deterministic



شکل ۴-۱۱ طرح‌واره یک مولد کوانتومی اعداد تصادفی؛ این دستگاه از یک حالت تک‌فوتونی که به یک تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ می‌تابد، تشکیل شده است. یک خال به قسمت دیگر تقسیم‌کننده باریکه وارد می‌شود. با فرض اینکه تقسیم‌کننده باریکه ۵۰:۵۰ باشد، تک‌فوتون با احتمال ۵۰٪ از آن عبور می‌کند و با احتمال ۵۰٪ منعکس می‌شود. با اندازه‌گیری اینکه آیا فوتون منعکس شده یا عبور کرده است، یک بیت تصادفی تولید می‌شود.

۸-۱۱ رمزنگاری کوانتومی

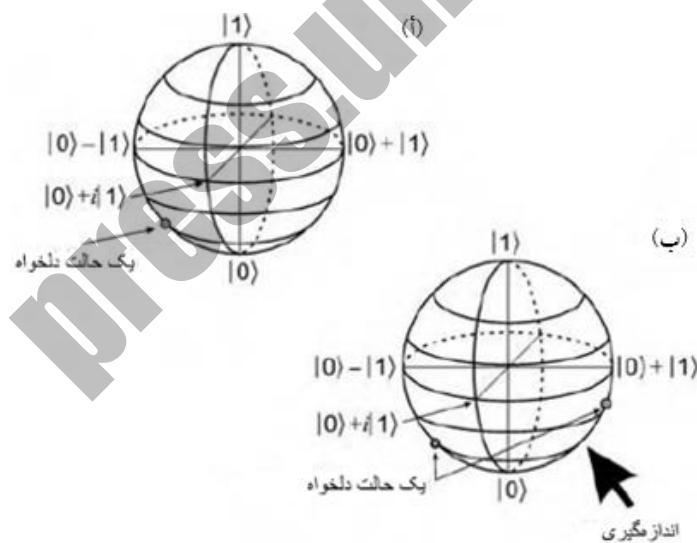
با توجه به اینکه کامپیوتر کوانتومی (که هنوز باید ساخته شود) می‌تواند به سیستم‌های رمزنگاری کلید عمومی (نظیر RSA) حمله کند، چه ابزارهایی برای ارتباطات مطلقاً امن ممکن است؟ می‌دانیم که یک سیستم رمزنگاری کلید خصوصی (پد یک‌بار مصرف) نسبت به معماری محاسبات کوانتومی توصیف‌شده در بالا آسیب‌پذیر نیست. لیکن الگوهای کلاسیکی به مقدار زیادی مواد کلید نیاز دارند که باید بین آلیس و باب به مشارکت گذاشته شوند. این کار از طریق کانال‌های خصوصی باید انجام شود که جاسوس به آن دسترسی نداشته باشد. راه‌های مختلفی برای حل این مشکل وجود دارد. از جمله اینکه آلیس یک جعبه در بسته که در آن مواد کلید قرار داده شده است را با پیک به باب ارسال کند. در اینجا آلیس و باب باید به پیک اطمینان داشته باشند که مواد کلید را نخواند و یا از آن نسخه‌برداری نکند. راه دیگر بر اصول مکانیک کوانتومی بنا شده است و توزیع کلید کوانتومی^۱ (QKD) نامیده می‌شود. در این روش مکانیسمی برای آلیس و باب فراهم می‌شود که بتوانند یک کلید تولید کنند و از طریق کانال‌های عمومی به اشتراک بگذارند. وقتی هر دو طرف این مواد کلید را داشته باشند، ارتباطات امن می‌تواند انجام شود. در تمام اشکال QKD، وجود یک منبع اعداد تصادفی حیاتی است.

۸-۱۱-۱ توزیع کلید کوانتومی

توزیع کلید کوانتومی راهی برای دو طرف-آلیس و باب-ارائه می‌دهد که بدون نیاز به اینکه به‌طور فیزیکی با یکدیگر ملاقات کنند یا لازم باشد با یک پیک مطمئن مواد کلید را ارسال نمایند، یک کلید امن بین خودشان مبادله کنند. امنیت QKD وابسته به اصول مکانیک کوانتومی است، نظریه‌ای که کاملاً تست شده و تصوّر می‌شود صحیح است.

1. Quantum Key Distribution

ایده اصلی پشت توزیع کلید کوانتومی این است که برای جاسوس دسترسی به تمام اطلاعات از حالت کوانتومی انتقال یافته غیرممکن است. این عبارت به چه معنی است؟ یک کیوبیت به صورت برهم‌نهی $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ در نظر بگیرید (در اینجا بار دیگر نمادهای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به طور کلی پایه‌های کیوبیت را نشان می‌دهند، به طور مشخص حالت‌های قطبش متناظر $|0\rangle = |V\rangle$ و $|1\rangle = |H\rangle$ را در نظر می‌گیریم). با یک اندازه‌گیری، وقتی c_0 و c_1 معلوم نباشند، غیرممکن است حالت $|\psi\rangle$ را دقیقاً تعیین کنیم. به عنوان مثال، اگر در یک اندازه‌گیری نتیجه «صفر» به دست آمد، نمی‌توان تعیین کرد که ضریب c_0 چه مقداری داشته است (شکل ۵-۱۱ را ببینید). در یک اندازه‌گیری که تنها نتیجه «صفر» را بدهد، تشخیص بین $|0\rangle$ ، $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ یا $(|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ و بسیاری حالت‌های دیگر غیرممکن است. در تعداد بسیار زیادی آزمایش که روی نسخه‌های یکسان حالت انجام شود، ممکن است حالت دقیق را تعیین کرد. اما در QKD، هرگز از یک کیوبیت دوبار استفاده نمی‌شود و بنابراین اگر از چند حالت غیرمتعامد استفاده شود، امکان ندارد که جاسوس بتواند به طور کامل حالت را تعیین کند. نکته کلیدی در QKD این است که از حالت‌های غیرمتعامد استفاده می‌شود. چند پروتکل QKD وجود دارد که در ادامه آن‌ها را بررسی خواهیم کرد. ابتدا با اولین پروتکل کشف شده، پروتکل BB84، شروع می‌کنیم.



شکل ۵-۱۱ نمایش یک کیوبیت روی سطح یک کره: ا. حالت پایه $|0\rangle$ در قطب جنوب کره قرار دارد. حالت برانگیخته $|1\rangle$ در قطب شمال کره قرار دارد. برهم‌نهی‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ در جایی روی سطح کره بین شمال و جنوب قرار دارند. برهم‌نهی‌های یکسان $|0\rangle$ و $|1\rangle$ روی خط استوا هستند. یک حالت دلخواه می‌تواند در هر جایی از سطح کره قرار گیرد. ب. در شکل دوم اندازه‌گیری یک نقطه روی کره را نشان داده‌ایم. روی کره دو حالت دلخواه را مشخص کرده‌ایم. این دو حالت متعامد نیستند و بنابراین یک اندازه‌گیری نمی‌تواند بگوید کدام یک از دو حالت را در اختیار داشته‌ایم. این همان نکته کلیدی است که در توزیع کلید کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱۱-۸-۲ پروتکل BB84

پروتکل BB84 بیت^۱ و براسارد^۲ [۱۹] از اینجا شروع می‌شود که آلیس یک مجموعه تصادفی از کیوبیت‌ها را ایجاد و به باب ارسال می‌کند. این کیوبیت‌ها از مجموعه زیر انتخاب می‌شوند:

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= |0\rangle, \\ |\psi_1\rangle &= |1\rangle, \\ |\psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ |\psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned} \quad (11-18)$$

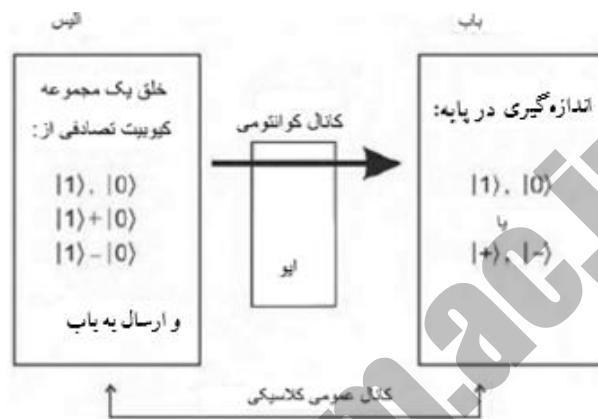
توجه کنید که $\langle\psi_0|\psi_1\rangle = 0$ و $\langle\psi_+|\psi_-\rangle = 0$. دو حالت اول یک پایه و دو کت دیگر یک پایه دیگر تشکیل می‌دهند. برحسب حالت‌های قطبش یک فوتونی، دو حالت دوم نسبت به دو حالت اول زاویه $\pm 45^\circ$ دارند. بدیهی است که چهار حالت ۱۱-۱۸ همه بر یکدیگر عمود نیستند: $\langle\psi_{0,1}|\psi_{+,-}\rangle \neq 0$. بنابراین هیچ پروتکل اندازه‌گیری که بتواند با قطعیت ۱۰۰٪ تعیین کند که کدام حالت را آلیس به باب فرستاده است وجود ندارد. باب به‌طور تصادفی در یکی از دو پایه «۰» و «۱» یا «+» و «-» اندازه‌گیری‌هایی انجام می‌دهد (در اینجا «+» نماینده $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ و «-» نماینده $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ است). بعد از انجام اندازه‌گیری‌ها، آلیس و باب از طریق یک کانال عمومی با یکدیگر ارتباط برقرار و پایه‌ای را که در آن اندازه‌گیری کرده‌اند، اعلام می‌کنند. به عبارت دقیق‌تر، آلیس اعلام می‌کند که آیا از مجموعه ۰، ۱ استفاده کرده است یا از پایه +، - ولی اینکه دقیقاً کدام حالت را فرستاده است ذکر نمی‌کند. سپس باب اعلام می‌کند که اندازه‌گیری وی در کدام پایه بوده است بدون اینکه نتیجه را اعلام کند. سپس چنانچه پایه‌هایی که هر دو انتخاب کرده‌اند یکسان باشد، نتیجه اندازه‌گیری را یادداشت می‌کنند. این عمل یک زیرمجموعه کوچک‌تر از کیوبیت‌ها (نصف) را می‌دهد که در آن آلیس و باب می‌دانند چه فرستاده شده و چه اندازه‌گیری شده است بدون اینکه دقیقاً با یکدیگر ارتباط داشته باشند. بدین ترتیب، یک کلید تثبیت می‌شود.

وقتی آلیس کیوبیت‌ها را به باب می‌فرستد، این امکان وجود دارد که جاسوس بعضی یا تمام کیوبیت‌های انتقال‌یافته را استراق‌سمع و در آن‌ها دخالت کند. حال عمل جاسوس چیست؟ اساساً جاسوس باید در فاصله زمانی بین فرستادن حالت کوانتومی توسط آلیس و دریافت آن توسط باب، عملی روی آن انجام دهد. این عمل می‌تواند هر عمل اندازه‌گیری یا غیراندازه‌گیری باشد. فرض کنید جاسوس یک اندازه‌گیری تصویری معین انجام دهد. ایو (جاسوس) نمی‌داند کدام حالت فرستاده شده است (و این را در موقع اندازه‌گیری نمی‌تواند تعیین کند) و بنابراین نمی‌داند که باید در پایه ۰ و ۱ یا - و + اندازه‌گیری انجام دهد. اگر پایه را درست حدس زده باشد (و

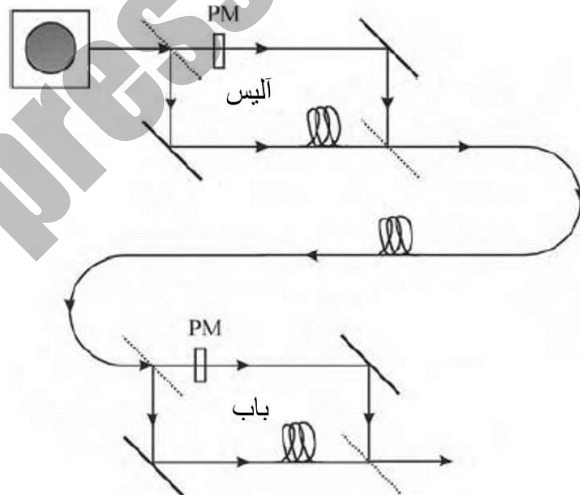
1. Bennett

2. Brassard

این تا قبل از اینکه باب و آلیس با یکدیگر تماس نگرفته‌اند، معلوم نمی‌شود، می‌تواند همان حالت صحیح را به باب بفرستد (در این صورت، باب هم متوجه استراق‌سمع نمی‌شود). ولی اگر ایو پایه اشتباه را انتخاب کرده باشد، حالتی که به باب می‌فرستد، اشتباه است و آن چیزی که باب باید دریافت می‌کرد، نیست. اگر باب بررسی خطا انجام دهد، حالت‌های اشتباه را خواهد دید و در نتیجه متوجه خواهد شد که جاسوس استراق‌سمع کرده است.



شکل ۱۱-۶ خلاصه‌ای از فرایند اجرای پروتکل BB84: پس از اندازه‌گیری توسط باب، آلیس و باب ارتباط برقرار و اعلام می‌کنند که در کدام پایه $|0\rangle, |1\rangle$ یا $|+\rangle, |-\rangle$ فرستاده و اندازه‌گیری کرده‌اند. تنها وقتی پایه‌های ارسالی و اندازه‌گیری یکسان بود، نتیجه را نگه می‌دارند. سپس از بخشی از این داده‌هایی که از پایه‌های یکسان به‌دست آورده‌اند، برای تست کردن حضور ایو استفاده می‌کنند.



شکل ۱۱-۷ طرح ارائه‌شده برای تحقق پروتکل BB84 با استفاده از تداخل‌سنج: در این شکل مسیرهای کوتاه‌تر و بلندتر از تداخل‌سنج، حالت‌های ۰ و ۱ را نشان می‌دهند (به‌جای استفاده از قطبش که حفظ آن در فیبرهای تجاری سخت‌تر است). مدولاتورهای فاز (PM) در بازوهای بالایی تداخل‌سنج‌های باب و آلیس قرار دارند.

در نیمهٔ دوم پروتکل، آلیس و باب پایه‌های حالت‌های ارسالی و اندازه‌گیری‌شده را به‌طور علنی اعلام و به‌این ترتیب، یک مقدار اولیه برای مواد کلید مشترک تولید می‌کنند. اما همان‌طور که در بالا گفتیم، ابو ممکن است دخالت کرده باشد و بعضی از کلیدها را بداند. ازطرفی چون 50% احتمال وجود دارد که وی در پایهٔ اشتباه اندازه‌گیری کرده و بنابراین حالت اشتباه را به باب فرستاده باشد، بین بیت‌های کلید آلیس و باب توافق کامل وجود نخواهد داشت. درهرحال، آلیس و باب با انتخاب یک زیرمجموعه از بیت‌های کلید و مقابله با یکدیگر می‌توانند به حضور یک جاسوس پی ببرند. اگر این میزان خطا خیلی بالا نباشد، آلیس و باب می‌توانند با انجام تقویت حریم خصوصی کلاسیکی روی بیت‌های باقی‌مانده یک کلید امن بسازند. این پروتکل را در شکل ۱۱-۶ خلاصه کرده و در شکل ۱۱-۷ اجرای آن را شرح داده‌ایم.

۱۱-۸-۳ پروتکل BB84

پروتکل BB84 جهت استفاده از سایر حالت‌ها و پایه‌ها تعمیم داده شد. یکی از مشهورترین آن‌ها پروتکل B92 است [۲۰] که به‌جای چهار حالت، از دو حالت غیرمتعادل استفاده می‌کند. این پروتکل به‌صورت زیر است. آلیس یک بیت تصادفی a (۰ یا ۱) ایجاد می‌کند. سپس کیوبیت زیر را به باب می‌فرستد:

$$|\psi\rangle = \begin{cases} |0\rangle, & \text{if } a = 0, \\ |+\rangle, & \text{if } a = 1. \end{cases} \quad (11-19)$$

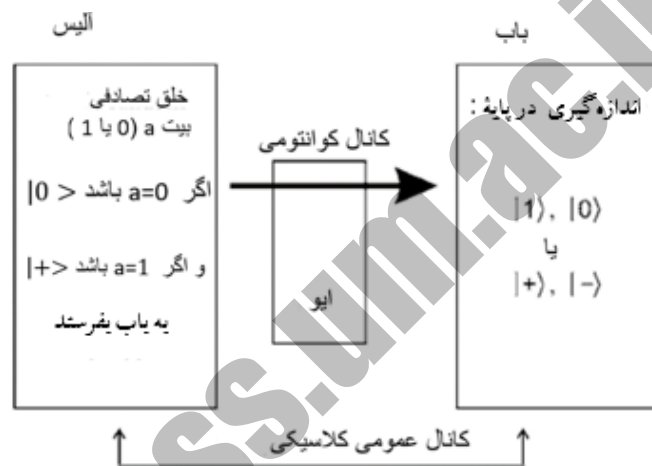
حال، باب یک بیت تصادفی a' (۰ یا ۱) ایجاد می‌کند. اگر بیت برابر a باشد، باب در پایه $(0, 1)$ و اگر بیت برابر a نباشد، در پایه $(+, -)$ اندازه‌گیری می‌کند. باب در اندازه‌گیری b ، نتیجه 0 و یا 1 را به‌دست می‌آورد که آن را از طریق یک کانال عمومی به آلیس اطلاع می‌دهد. باب و آلیس هر دو بیت‌های تصادفی a و a' را به‌طور سری نگه می‌دارند. مواد کلید اولیه آن‌ها از زیرمجموعه‌ای تشکیل می‌شود که نتیجهٔ اندازه‌گیری b برابر با a باشد. این تنها زمانی اتفاق می‌افتد که آلیس $a = 0$ داشته باشد و باب $a' = 1 - a$ یا برعکس، هرکدام با احتمال $\frac{1}{4}$. کلید برای آلیس a و برای باب a' است. حال اگر بخواهند اثر جاسوس را ارزیابی کنند، می‌توانند از چند کلید برای بررسی خطا استفاده کنند و سپس در صورتی که خطا خیلی بالا نباشد، کلید را بسازند. به‌این ترتیب، یک مواد کلید مشترک که امن است به‌دست می‌آورند. این پروتکل را در شکل ۱۱-۸ خلاصه کرده و عملیات اجرایی آن را در شکل ۱۱-۹ ارائه داده‌ایم.

۱۱-۸-۴ پروتکل اکرت^۱

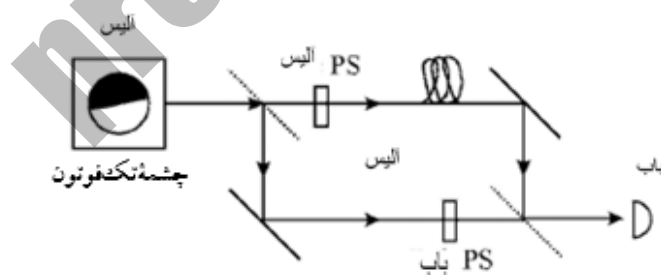
در پروتکل‌هایی که تا به‌حال موردبحث قرار دادیم، چنین بود که آلیس تک‌فوتون‌هایی را که در یک قطبش یا پایهٔ تداخل‌سنجی فراهم آورده بود، ارسال می‌کرد. آرتور اکرت در ۱۹۹۱ یک پروتکل رمزنگاری کوانتومی

1. Ekert

پیشنهاد کرد [۲۱] که از درهم‌تنیدگی کوانتومی و نامساوی بل استفاده می‌کرد
فرض کنید در خلال یک مدت‌زمان، یک چشمه کوانتومی دو فوتون در یک حالت درهم‌تنیده گسیل کند؛
به‌عنوان مثال، این فوتون‌ها می‌توانند از نظر جهت یا قطبش درهم‌تنیده باشند. از این رو، می‌توان همان‌طوری که
نشان خواهیم داد، از آن‌ها در یک سیستم ارتباطی امن استفاده کرد. ایده اصلی در پروتکل اکرت نسبت به
پروتکل‌های BB84 و B92 این است که کانال کوانتومی‌ای که کیویت‌ها را از آلیس به باب منتقل می‌کند، با
یک کانال که دو کیویت درهم‌تنیده (یکی به آلیس و یکی به باب) را از یک چشمه مرکزی مشترک می‌گیرد،
جایگزین می‌کند. حال به این منبع کوانتومی بدیع می‌پردازیم.



شکل ۸-۱۱ خلاصه پروتکل B92 که از پایه‌های غیرمتعامد استفاده می‌کند

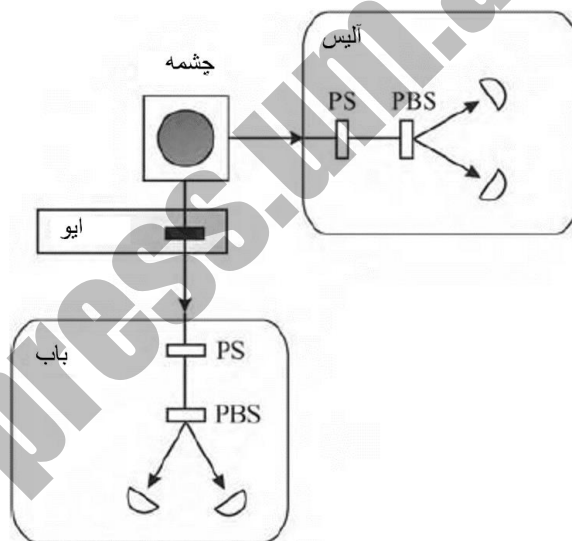


شکل ۸-۱۱ الگوی نشان‌دهنده تحقق اپتیکی پروتکل B92: در اینجا کل انتقال‌ها بین باب و آلیس در بازوهای یک تداخل‌سنج اتفاق می‌افتد.

فرض کنید آلیس و باب یک مجموعه از n زوج کیویت درهم‌تنیده به صورت

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle). \quad (۲۰-۱۱)$$

به اشتراک گذاشته باشند. کیویت سمت چپ متعلق به آلیس و کیویت سمت راست متعلق به باب است. حال روش به اشتراک گذاشتن یک بیت را مشخص می‌کنیم. آلیس و باب زوج درهم‌تنیده را به اشتراک می‌گذارند (هر کدام یک کیویت) و هر کدام یک عدد تصادفی (۰ یا ۱) را به‌طور مستقل انتخاب می‌کنند؛ به‌عنوان مثال، a (توسط آلیس) و a' (توسط باب). اگر عدد تصادفی آلیس ۰ باشد، کیویت خود را در پایه (۰، ۱) اندازه‌گیری می‌کند؛ در غیر این صورت، از پایه (+، -) استفاده می‌کند. وی سپس نتیجهٔ اندازه‌گیری b خود را ثبت می‌کند. به‌طور مشابه، باب همین کار را با کیویت خود انجام می‌دهد. یعنی اگر عدد تصادفی وی ۰ بود، در پایه (۰، ۱) و در غیر این صورت، در پایه (+، -) اندازه‌گیری می‌کند. وی نیز نتیجهٔ اندازه‌گیری b' خود را یادداشت می‌کند. سپس آلیس و باب نتایج (b, b') خود را به‌طور عمومی به اطلاع هم می‌رسانند. اگر $b = b'$ باشد، نتیجه را نگه می‌دارند که در این صورت، بیت کلید (a, a') حاصل می‌شود. با انجام این عمل با n زوج درهم‌تنیده، کلید موردنظر برقرار می‌گردد. در شکل ۱۰-۱۱ طرح این پروتکل را نشان داده‌ایم. تحقق آزمایشگاهی این الگوها به تفصیل توسط گیزین^۱ و همکاران [۲۲] آمده است.



شکل ۱۰-۱۱ نمایش پروتکل اکرت: چشمهٔ یک زوج EPR صادر می‌کند که یکی از آن‌ها در اختیار آلیس و دیگری در اختیار باب قرار می‌گیرد. تقسیم‌کننده‌های قطبشگر (PBS) فوتون‌ها را به سمت آشکارسازها هدایت می‌کنند.

۱۱-۹ چشم‌اندازهای آیندهٔ ارتباطات کوانتومی

فیزیک کوانتومی آن‌چنان که تا به حال توصیف کردیم، فرصت‌ها و تهدیدهای جهان ارتباطات را بیان می‌کند. فرصت به‌خاطر ماهیت تجربه‌ناپذیری کوانتاها و عدم توانایی ما در کپی کردن آن‌هاست و تهدیدها از این جهت

1. Gisin

است که آیا می‌توان بر این پتانسیل محاسبات کوانتومی در ایجاد واهمدوسی غلبه کرد، به‌طوری که بتوان در سیستم‌های بزرگ مقیاس کوانتومی آن‌ها را به‌کار بست. در اینجا روی توزیع کلید امن برای رمزنگاری تمرکز کردیم؛ زیرا این بخش توسعه‌یافته‌ترین فناوری کوانتومی است. در QKD اطلاعات کلاسیکی با استفاده از منابع کوانتومی انتقال داده می‌شوند. البته اطلاعات کوانتومی هم می‌توانند انتقال یابند: به‌عنوان مثال، حالت کوانتومی یک سیستم را می‌توان از آلایس به باب منتقل کرد، در صورتی که آن‌ها یک چشمه کوانتومی درهم‌تنیدگی در اشتراک داشته باشند. این اساس دوربری کوانتومی است که قبلاً مورد بحث قرار دادیم. این زمینه به یکی از حوزه‌های توسعه فیزیک مدرن تبدیل شد و انتظار می‌رود در دهه‌های آینده شاهد پیشرفت‌هایی در نگرش و ایجاد کاربردها و فناوری‌های نو باشیم.

۱۰-۱۱ گیت‌ها در محاسبات کوانتومی

بحث کامل محاسبات کوانتومی در حوصله این کتاب نیست، اما ارزش این را دارد که بعضی از جنبه‌های محاسبات کوانتومی، به‌خصوص مفهوم ثبات کوانتومی، گیت‌های کوانتومی و تحقق‌های اپتیک کوانتومی آن‌ها را مورد بحث قرار دهیم.

ابتدا در مورد ثبات‌های کوانتومی بحث می‌کنیم. کیوبیت‌ها را در پایه‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ که پایه‌های محاسباتی نامیده می‌شوند، نشان می‌دهیم. کلی‌ترین حالت خالص یک کیوبیت برهم‌نهی زیر است:

$$|\psi_1\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle, \quad |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1. \quad (11-21)$$

یک ثبات کوانتومی عبارت است از مجموعه‌ای از کیوبیت‌ها، مثلاً N کیوبیت. به‌عنوان مثال، یک ثبات سه کیوبیتی در حالت

$$|1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |101\rangle = |5\rangle \quad (11-22)$$

نمایش عدد ۵ در پایه ۲ است، $(101)_2 = (5)_{10}$ ، حال فرض کنید کیوبیت اول ثبات در حالت برهم‌نهی متوازن $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ نوشته شود. در این صورت، حالت این ثبات به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle + |101\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |5\rangle). \end{aligned} \quad (11-23)$$

این بدان معنی است که ثبات کوانتومی ۳- کیوبیتی به‌طور هم‌زمان نشان‌دهنده اعداد ۵ و ۱ در پایه ۱۰ است. اگر هر سه کیوبیت در حالت‌های برهم‌نهی متوازن نوشته شوند، ثبات در حالت زیر قرار دارد:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2^{3/2}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle) \quad (24-11) \\ &= \frac{1}{2^{3/2}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle + |5\rangle + |6\rangle + |7\rangle), \end{aligned}$$

و بنابراین یک ثابت ۳- کیوبیتی می‌تواند به‌طور هم‌زمان نشان‌دهندهٔ ۸ عدد صفر تا هفت (۰-۷) در پایهٔ ۱۰ باشد. در این صورت، هر عدد a در پایهٔ ۱۰ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \dots + a_{N-1} 2^{N-1}$$

که در آن ضرایب a_j ، $j = 0, 1, \dots, N$ ، برابر ۰ یا ۱ هستند. در این صورت، می‌توان نوشت:

$$|a\rangle = |a_{N-1}\rangle \otimes |a_{N-2}\rangle \otimes \dots \otimes |a_1\rangle \otimes |a_0\rangle \equiv |a_{N-1}a_{N-2}\dots a_0\rangle. \quad (25-11)$$

کلی‌ترین حالت ثابت کوانتومی N کیوبیتی عبارت است از

$$|\psi_N\rangle = \sum_{a=0}^{2^N-1} c_a |a\rangle. \quad (26-11)$$

با یک ثابت N کیوبیتی، تمام اعداد از ۰ تا $2^N - 1$ در پایهٔ ۱۰ که تعدادشان 2^N عدد است را می‌توان به‌طور هم‌زمان در یک حالت به شکل ۲۶-۱۱ نمایش داد.

برای انجام هرگونه پردازشی، مشابه کامپیوتر کلاسیکی به گیت‌های منطقی نیاز داریم. اختلاف مهم بین گیت‌های منطقی کوانتومی و کلاسیکی این است که گیت‌های منطقی کوانتومی همواره برگشت‌پذیرند، از این نظر که خروجی‌ها به‌طور منحصر به فردی به ورودی بستگی دارند، چیزی که برای گیت‌های کلاسیکی برقرار نیست. علت این برگشت‌پذیری برای گیت‌های کوانتومی این است که با تبدیلات یکانی انجام می‌گیرند. ابتدا با گیت‌های تک کیوبیتی شروع می‌کنیم و سپس به گیت‌های دو کیوبیتی می‌پردازیم.

اولین گیتی که بررسی می‌کنیم، گیت هادامارد^۱ است. این گیتی است که یک برهم‌نهی متوازن از حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ ایجاد می‌کند و با H نشان داده می‌شود. با فرض $x \in \{0, 1\}$ گیت هادامارد که با عملگر یکانی $\hat{U}_H$ توصیف می‌شود، تبدیل زیر را انجام می‌دهد:

$$\hat{U}_H |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(-1)^x |x\rangle + |1-x\rangle]. \quad (27-11)$$

بنابراین $\hat{U}_H |0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ و $\hat{U}_H |1\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. توجه کنید که طرف چپ معادلهٔ ۲۴-۱۱ را می‌توان از تبدیلات هادامارد روی سه کیوبیت که هر کدام در حالت $|0\rangle$ قرار دارند، به‌دست آورد.

1. hadamard

اگر کیوبیت‌ها معرف حالت‌های پایه و برانگیخته یک اتم دوترازی باشند، تبدیل هادامارد، یک پالس $\frac{\pi}{2}$ است. نماد مداری برای گیت هادامارد در شکل ۱۱-۱۱ (ا) آمده است.

گیت تک کیوبیتی دوم، گیت فاز که با $\hat{U}_{PG}(\phi)$ نمایش داده می‌شود، تبدیل زیر را انجام می‌دهد:

$$\hat{U}_{PG}(\phi)|x\rangle = e^{ix\phi}|x\rangle \quad (11-28)$$

بنابراین $\hat{U}_{PG}(\phi)|0\rangle = |0\rangle$ و $\hat{U}_{PG}(\phi)|1\rangle = e^{i\phi}|1\rangle$. نماد مداری این گیت در شکل ۱۱-۱۱ (ب) نشان داده شده است. ترکیب گیت‌های هادامارد و فاز می‌تواند حالت‌های برهم‌نهی متعدد تک کیوبیتی را فراهم کند. رشته تبدیلات

$$\hat{U}_{PG}\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)\hat{U}_H\hat{U}_{PG}(2\theta)\hat{U}_H|0\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle \quad (11-29)$$

که در شکل ۱۱-۱۲ نشان داده شده است، کلی‌ترین حالت خالص تک کیوبیتی را می‌دهد. تا اینجا با ثبات‌های حالت‌های درهم‌تنیده مواجه نشدیم. یک حالت ثبات دو کیوبیتی درهم‌تنیده عبارت است از $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. اصولاً چگونه چنین حالتی را می‌توان ساخت؟ قبلاً در بخش‌های اولیه این کتاب، از طریق بعضی برهم‌کنش‌های خاص، به روش‌های تولید حالت‌های درهم‌تنیده اشاره کردیم. در حال حاضر آنچه مورد نظر ماست این است که یک روش نسبتاً عام فرمول‌بندی کنیم بدون اینکه به یک تحقق به‌خصوص آن پردازیم. بنابراین یک گیت دو کیوبیتی معرفی می‌کنیم که (C - NOT) نامیده و توسط عملگر یکانی $\hat{U}_{C-NOT}$ نمایش داده می‌شود. اگر کیوبیت اول را کیوبیت کنترل^۱ و کیوبیت دوم را کیوبیت هدف^۲ بنامیم، این گیت به‌طور نمادین به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{U}_{C-NOT}|x\rangle|y\rangle = |x\rangle|\text{mod}_2(x+y)\rangle \quad (11-30)$$

که در آن $x, y \in \{0, 1\}$ است. این گیت در مدار شکل ۱۱-۱۳ (ا) نشان داده شده است. اگر کنترل در حالت $|0\rangle$ و هدف نیز در حالت $|0\rangle$ باشد، هدف تغییر نمی‌کند. اما اگر کنترل در حالت $|1\rangle$ باشد، هدف از $|0\rangle$ به $|1\rangle$ تبدیل می‌شود. اما فرض کنید کیوبیت کنترل توسط تبدیل هادامارد به حالت برهم‌نهی $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ تبدیل شده باشد. در این صورت، برای هدفی که ابتدا در حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ باشد، به‌ترتیب خواهیم داشت:

$$\hat{U}_{C-NOT}\hat{U}_H|0\rangle|0\rangle = \hat{U}_{C-NOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (11-31)$$

$$\hat{U}_{C-NOT}\hat{U}_H|0\rangle|1\rangle = \hat{U}_{C-NOT}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

که در آن $H1$ به‌معنای این است که گیت هادامارد تنها روی کیوبیت اول عمل می‌کند. در هر دو مورد، به

1. Control qubit

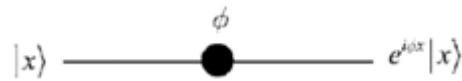
2. Target qubit

فصل ۱۱. کاربردهای درهم‌تنیدگی: تداخل‌سنجی محدودشدهٔ هایزنبرگ و پردازش اطلاعات کوانتومی ۳۳۱

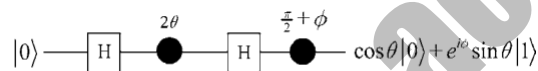
حالت‌های درهم‌تنیده می‌رسیم. کل فرایند برای هدفی که ابتدا در حالت $|0\rangle$ قرار دارد، در دیاگرام شکل ۱۱-۱۳ (ب) نشان داده شده است.



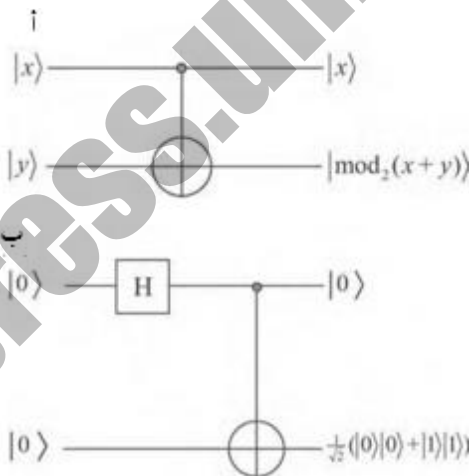
ب



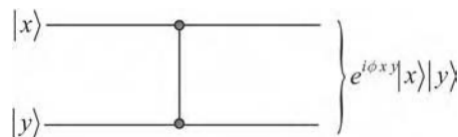
شکل ۱۱-۱۱. ا. نماد مداری گیت هادامارد، ب. نماد مداری گیت فاز یک‌کیوبیتی



شکل ۱۱-۱۲. نماد مداری که با استفاده از گیت‌های فاز و هادامارد، حالت ۱۱-۲۹ را تولید می‌کند.



شکل ۱۱-۱۳. ا. نماد مداری که معرف نماد یک C - NOT است. ب. مداری که با استفاده از یک هادامارد و یک C - NOT حالت درهم‌تنیدهٔ دوکیوبیتی را تولید می‌کند



شکل ۱۱-۱۴. نماد مداری برای یک گیت کنترل فاز

یک گیت دو کیوبیتی دیگر عبارت است از گیت کنترل فاز $\bar{U}_{PG}(\phi)$ که مطابق زیر عمل می‌کند:

$$\bar{U}_{CPG}(\phi) |x\rangle |y\rangle = e^{i\phi xy} |x\rangle |y\rangle \quad (۳۲-۱۱)$$

و در شکل ۱۱-۱۴ نمایش داده شده است. ضرب فاز $e^{i\phi}$ تنها وقتی ظاهر می‌شود که $x = 1 = y$ با ترکیب مناسب این گیت‌ها، هر الگوریتم محاسباتی کوانتومی را می‌توان اجرا کرد. شبکه‌هایی می‌توان طراحی کرد تا انواع معینی از خروجی‌ها را تولید کنند. یک مدار بسیار ساده قبلاً مورد بحث قرار گرفت و تعدادی دیگر در بخش مسائل آمده است.

یک تابع در کامپیوتر عبارت است از نگاشت یک مجموعه اعداد به یک مجموعه دیگر

$$f : \{0, 1, \dots, 2^m - 1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^n - 1\} \quad (۳۳-۱۱)$$

که در آن m و n اعداد صحیح هستند. یک کامپیوتر کلاسیکی یک تابع در هریک از ورودی‌های $0, 1, \dots, 2^m - 1$ را می‌گیرد و مجموعه اعداد $f(0), f(1), \dots, f(2^m - 1)$ را محاسبه می‌کند. اما این محاسبه عموماً برگشت‌ناپذیر است و بنابراین نمی‌توان یک خروجی را به یک ورودی خاص وابسته کرد. در مکانیک کوانتومی نمی‌توان با تحویل یک ثابت ورودی $|x\rangle$ با یک تبدیل یکانی به یک ثابت $|f(x)\rangle$ رسید. لیکن با استفاده از دو ثابت که یکی شامل خروجی است و دیگری ورودی را حفظ می‌کند، می‌توان تحویل کوانتومی یک تابع را به صورت یک تبدیل یکانی به صورت زیر اجرا کرد:

$$\bar{U}_f |x\rangle |0\rangle = |x\rangle |f(x)\rangle \quad (۳۴-۱۱)$$

که در آن حالت‌های ورودی مختلف و حالت‌های خروجی مختلف متعامند: $\langle f|f'\rangle = \delta_{ff'}$, $\langle x|x'\rangle = \delta_{xx'}$. به عنوان یک مثال ساده از محاسبات کوانتومی که با وجود سادگی در عین حال می‌تواند نشان‌دهنده توان بالقوه یک کامپیوتر کوانتومی با استفاده از درهم‌تنیدگی کوانتومی باشد، الگوریتم کوانتومی موسوم به مسئله دویچ [۱۵] را شرح می‌دهیم که اولین الگوریتم کوانتومی پیشنهاد شده و یکی از ساده‌ترین آن‌هاست. مسئله پیشنهاد شده توسط دویچ به صورت زیر است: یک تابع $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ را در نظر بگیرید. تنها چهار خروجی ممکن وجود دارد $f(0) = 0, f(0) = 1, f(1) = 0, f(1) = 1$. یک تابع نامعلوم f مفروض است. تنها با یک عمل تعیین کنید آیا تابع ثابت است، یعنی $f(0) = f(1)$ یا متغیر، $f(0) \neq f(1)$. کامپیوتر کوانتومی لازم خواهد داشت تبدیل زیر را اجرا کند:

$$|x\rangle |y\rangle \rightarrow |x\rangle |\text{mod}_2(y + f(x))\rangle \quad (۳۵-۱۱)$$

که در آن $|x\rangle$ کیوبیت ورودی و $|y\rangle$ معرف کیوبیت سخت‌افزار کامپیوتر کوانتومی است. ایده این است که با استفاده از گیت‌های هادامارد، این کیوبیت‌ها را در حالت حاصل ضرب فراهم کنیم.

$$\begin{aligned} |\Psi_{in}\rangle &= |x\rangle |y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) \end{aligned} \quad (۳۶-۱۱)$$

علامت‌های منفی در این معادلات مهم‌اند. اگر این حالت تحت تبدیل ۱۱-۳۵ قرار گیرد، حالت خروجی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} |\Psi_{out}\rangle &= \frac{1}{2}(|0\rangle|f(0)\rangle - |0\rangle|\bar{f}(0)\rangle + |1\rangle|f(1)\rangle - |1\rangle|\bar{f}(1)\rangle) \\ &= \frac{1}{2}[|0\rangle(|f(0)\rangle - |\bar{f}(0)\rangle) + |1\rangle(|f(1)\rangle - |\bar{f}(1)\rangle)] \end{aligned} \quad (۳۷-۱۱)$$

که در آن علامت - معنی وارون می‌دهد: $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$. توجه کنید که معادله ۱۱-۳۷ نتیجه انجام هم‌زمان و موازی روی هر دو حالت کیوبیت اول در برهم‌نهی $|1\rangle + |0\rangle \sim |x\rangle$ است. این، توان بالقوه کامپیوتر کوانتومی را نشان می‌دهد: توانایی انجام فرایندهای موازی. اگر f یک تابع ثابت باشد، خروجی برابر است با

$$|\Psi_{out}\rangle_{f \text{ const}} = \frac{1}{2}[|0\rangle + |1\rangle)(|f(0)\rangle - |\bar{f}(0)\rangle)] \quad (۳۸-۱۱)$$

درحالی که اگر f ثابت نباشد، داریم:

$$|\Psi_{out}\rangle_{f \text{ not const}} = \frac{1}{2}[|0\rangle - |1\rangle)(|f(0)\rangle - |\bar{f}(0)\rangle)] \quad (۳۹-۱۱)$$

توجه کنید که در دو مورد بالا حالت‌های کیوبیت اول متعامدند. اگر تبدیل هادامارد را به کیوبیت اول اعمال کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{H1}|\Psi_{out}\rangle_{f \text{ const}} &= |0\rangle(|f(0)\rangle - |\bar{f}(0)\rangle), \\ \hat{U}_{H1}|\Psi_{out}\rangle_{f \text{ not const}} &= |1\rangle(|f(0)\rangle - |\bar{f}(0)\rangle). \end{aligned} \quad (۴۰-۱۱)$$

بدین ترتیب، یک اندازه‌گیری منفرد روی کیوبیت اول تعیین می‌کند که آیا f ثابت است یا خیر.

الگوریتم دویچ به وضوح بسیار ساده است. تعمیم جزئی این الگوریتم توسط دویچ و جوزا [۲۳] در یک کامپیوتر کوانتومی یون درتله‌افتاده که شامل دو یون درتله‌افتاده بود، اجرا شده است.

یک الگوریتم بسیار پیچیده‌تر الگوریتم شور برای تجزیه اعداد بزرگ به اعداد اول است [۱۷]. در اینجا به این الگوریتم نمی‌پردازیم و خواننده را به مقالات مختص محاسبات کوانتومی ارجاع می‌دهیم. قابل ذکر است که هرچند الگوریتم شور، روی یک کامپیوتر کوانتومی تشدید مغناطیسی هسته‌ای (NMR) برای تجزیه عدد $3 \times 15 = 45$ اجرا شده است، نشان‌دهنده توان الگوریتم است، نه نشان‌دهنده توان کامپیوتر کوانتومی. متأسفانه روش NMR مقیاس‌پذیر نیست. یک الگوریتم مهم دیگر، الگوریتم جست‌وجوی گراور^۱ است [۲۴].

1. Grover

۱۱-۱۱ تحقق اپتیک چند گیت کوانتومی

طرح‌های پیشنهادی زیادی برای تحقق گیت‌های کوانتومی در سیستم‌های اپتیک کوانتومی نظیر فوتون‌های قطبیده، کاواک QED و سیستم‌های یون‌های در تله‌افزاده ارائه شده‌اند. در اینجا آن‌هایی را که براساس تقسیم‌کننده‌های باریکه، برهم‌کنش‌های کر^۱ و انتقال‌دهنده‌های فاز اپتیک بنا شده‌اند، مورد بحث قرار می‌دهیم. برای این کار، دو مد فوتونی لازم است که اساس یک «ریل دو گانه» را تشکیل می‌دهند و تحقق آن توسط چوانگ^۲ و یاماموتو^۳ [۲۵] بررسی شده است. تنها حالت‌های تک فوتونی دخیل‌اند و برای اینکه نگاشت واضحی از حالت‌های فوتون دو گانه به کیوبیت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ انجام شود، همان‌طوری که در شکل ۱۱-۱۵ (أ) نشان داده شده است، از تقسیم‌کننده باریکه $50:50$ به‌عنوان گیت هادامارد استفاده می‌کنیم. عملگرهای مد ورودی را $\hat{a}$ و $\hat{b}$ انتخاب می‌کنیم و تقسیم‌کننده باریکه طوری انتخاب می‌شود که از نوعی باشد که عملگرهای مد خروجی $\hat{a}'$ و $\hat{b}'$ برطبق تبدیل زیر به عملگرهای ورودی مرتبط باشند:

$$\hat{a}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{b}), \quad \hat{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{b}) \quad (41-11)$$

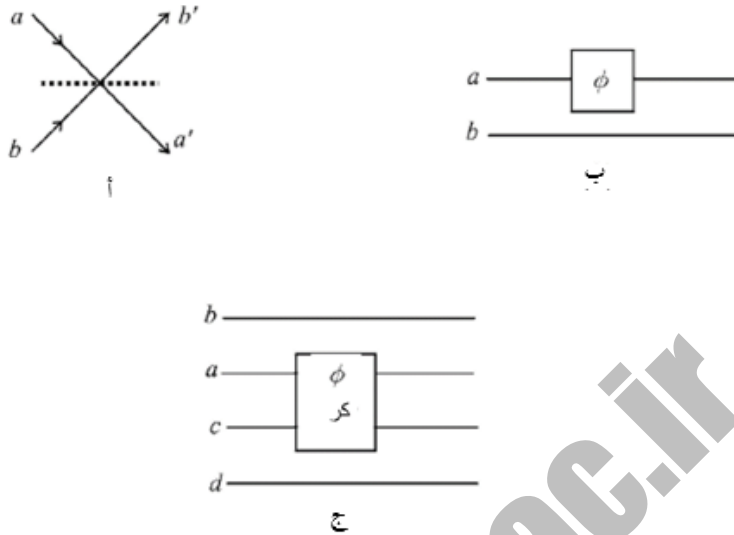
یا پس از معکوس کردن

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}' + \hat{b}'), \quad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}' - \hat{b}') \quad (42-11)$$

حالت محاسباتی $|0\rangle$ را به حالت حاصل ضربی ورودی $|0\rangle_a |1\rangle_b$ متناسب می‌کنیم، یعنی $|0\rangle \equiv |0\rangle_a |1\rangle_b$ و به‌طور مشابه $|1\rangle \equiv |1\rangle_a |0\rangle_b$. با استفاده از قواعد آمده در فصل ۶ و این فرض که $\hat{U}_{BS}$ نشان‌دهنده عملگر تبدیل تقسیم‌کننده باریکه است، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{BS} |0\rangle &= \hat{U}_{BS} |0\rangle_a |1\rangle_b \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_a |1\rangle_b + |1\rangle_a |0\rangle_b) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \\ \hat{U}_{BS} |1\rangle &= \hat{U}_{BS} |1\rangle_a |0\rangle_b \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_a |1\rangle_b - |1\rangle_a |0\rangle_b) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (43-11)$$

که از علامت‌های پریم برای حالت‌های پس از اندازه‌گیری صرف نظر کرده‌ایم. واضح است که این سیستم یک تحقق گیت هادامارد است. باید مشخص کرد که با وجود دو مد فوتونی که شامل خلأ یا یک تک فوتون هستند، این مدها پایه‌های کیوبیت‌ها نیستند. حالت‌های حاصل ضرب این دو مد به پایه‌های محاسباتی نگاشت می‌شوند. بنابراین هنوز با گیت تک کیوبیتی سروکار داریم.



شکل ۱۱-۱۵. طراحی مدهای ورودی و خروجی یک تقسیم‌کننده ۵۰:۵۰ در اجرای ریل دوگانه اپتیکی از تبدیل هادامارد، ب. اجرای ریل دوگانه اپتیکی از یک گیت فاز اپتیکی، ج. اجرای ریل دوگانه دوکیوبیتی گیت کنترل فاز

گیت فاز تک کیوبیتی را می‌توان با قرار دادن یک انتقال‌دهنده فاز در باریکه a محقق کرد؛ عملگر این وسیله $\hat{U}_{PG} = \exp(i\phi \hat{a}^\dagger \hat{a})$ است. به سادگی می‌توان دید که

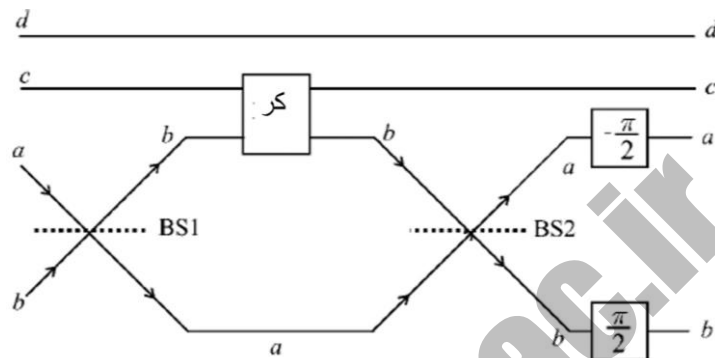
$$\begin{aligned}\hat{U}_{PG} |0\rangle &= \exp(i\phi \hat{a}^\dagger \hat{a}) |0\rangle_a |1\rangle_b = |0\rangle, \\ \hat{U}_{PG} |1\rangle &= \exp(i\phi \hat{a}^\dagger \hat{a}) |1\rangle_a |0\rangle_b = e^{i\phi} |1\rangle\end{aligned}\quad (۱۱-۴۴)$$

این وسیله در شکل ۱۱-۱۵ (ب) نشان داده شده است. برای گیت‌های دوکیوبیتی باید دو دسته مد فوتونی داشته باشیم، به عنوان مثال (a, b) و (c, d) . با قرار دادی که پذیرفته‌ایم، داریم:

$$\begin{aligned}|0\rangle |0\rangle &= |0\rangle_a |1\rangle_b |0\rangle_c |1\rangle_d, \\ |0\rangle |1\rangle &= |0\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_c |0\rangle_d, \\ |1\rangle |0\rangle &= |1\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_c |1\rangle_d, \\ |1\rangle |1\rangle &= |1\rangle_a |0\rangle_b |1\rangle_c |0\rangle_d.\end{aligned}\quad (۱۱-۴۵)$$

گیت کنترل فاز (CPG) را می‌توان همان‌طوری که در شکل ۱۱-۱۵ (ج) نشان داده شده است، با برهم‌کنش بین مدهای a و c محقق کرد. این برهم‌کنش با عملگر $\hat{U}_{CPG} = \exp(i\phi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{c}^\dagger \hat{c})$ نشان داده می‌شود. به سادگی می‌توان ثابت کرد که برای حالت‌های دوکیوبیتی، تنها حالت $|1\rangle |1\rangle$ انتقال فاز $e^{i\phi}$ را کسب می‌کند. اما برای تولید انتقال‌های فاز دلخواه، به خصوص انتقال‌های فاز بزرگ، با این روش با مشکلات مواجه می‌شویم. انتقال‌های

فاز بزرگ ϕ به پذیرفتاری‌های غیرخطی بزرگ $\chi^{(3)}$ نیاز دارند که عموماً در دسترس نیستند. از طرف دیگر، همان‌طوری که قبلاً بیان شد، تکنیک‌هایی برای تولید پذیرفتاری‌های کر بسیار بزرگ با شفافیت القایی الکترومغناطیسی^۱ به‌طور فعال در حال پیگیری است.



شکل ۱۱-۱۶ تحقق اپتیکی یک گیت C - NOT با استفاده از یک گیت فردکین^۲؛ حالت‌های مد (a, b) و (c, d) نماینده دو کیوبیت هستند. انتقال‌دهنده فاز در خروجی تداخل‌سنج ماخ-زندر عامل‌های فاز خروجی‌ها را تنظیم می‌کند.

بالاخره یک تحقق اپتیکی از گیت C - NO را بررسی می‌کنیم. این کار، حداقل دراصل می‌تواند با یک تداخل‌سنج ماخ-زندر که به یک مد خارجی که آن را در شکل ۱۱-۱۶ مد c نامیده‌ایم، از طریق برهم‌کنش کراس-کر^۳ انجام شود. «تحوّل» کر توسط عملگر یکانی زیر توصیف می‌شود:

$$\hat{U}_{\text{Kerr}}(\eta) = \exp(i\eta \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{d}^\dagger \hat{d}). \quad (46-11)$$

که در آن پارامتر η با پذیرفتاری غیرخطی $\chi^{(3)}$ متناسب است. اولین تقسیم‌کننده باریکه از نوعی که توسط تبدیل زیر توصیف می‌شود، انتخاب می‌گردد:

$$\hat{U}_{\text{BS1}} = \exp\left[i\frac{\pi}{4}(\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger)\right] \quad (47-11)$$

و تقسیم‌کننده باریکه دوم را مزدوج اولی انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که $\hat{U}_{\text{BS2}} = \hat{U}_{\text{BS1}}^\dagger$ باشد. بنابراین عملگری که این تحوّل را توصیف می‌کند، بلافاصله بعد از تقسیم‌کننده باریکه دوم به‌صورت زیر است:

$$\hat{U}_F(\eta) = \hat{U}_{\text{BS1}}^\dagger \hat{U}_{\text{Kerr}}(\eta) \hat{U}_{\text{BS1}}, \quad (48-11)$$

که در آن اندیس F معرف فردکین است. ابزاری که با این عملگر نمایش داده می‌شود، شکل اپتیک کوانتومی گیت فردکین است [۲۶] تحقق اپتیک کوانتومی گیت فردکین ابتدا توسط ملبورن^۴ [۲۷] بررسی شد. پس از

1. Electromagnetically transparency

2. Fredkin
3. Cross-Kerr

4. Milburn

کمی عملیات جبری به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{U}_F(\eta) = \exp\left[i\frac{\eta}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})\right] \exp\left[\frac{\eta}{2}\hat{c}^\dagger\hat{c}(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{a})\right]. \quad (49-11)$$

جمله اول، بسته به اینکه مد c شامل یک فوتون باشد یا خیر، تنها یک ضریب فاز ایجاد می‌کند. درحالی که جمله دوم یک تبدیل شرطی است. اگر مد c در خلأ باشد، هیچ تبدیلی اتفاق نمی‌افتد، ولی اگر یک فوتون منفرد در مد c وجود داشته باشد، این تبدیل باید صورت بگیرد. برای آنچه موردنظر ماست، $\eta = \pi$ انتخاب می‌کنیم. با استفاده از معادله ۴۵-۱۱ و با در نظر گرفتن اینکه کیویتهای مدهای $c - d$ کنترل و کیویتهای $a - b$ هدف باشند که در مقایسه با بحث بالا به‌طور وارون عمل می‌کنند، می‌توان به‌سادگی نشان داد که

$$\begin{aligned} \hat{U}_F(\eta)|0\rangle|0\rangle &= |0\rangle|0\rangle, \\ \hat{U}_F(\eta)|1\rangle|0\rangle &= |1\rangle|0\rangle, \\ \hat{U}_F(\eta)|0\rangle|1\rangle &= i|1\rangle|1\rangle, \\ \hat{U}_F(\eta)|1\rangle|1\rangle &= -i|0\rangle|1\rangle, \end{aligned} \quad (50-11)$$

که از تبدیل زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\exp\left[\frac{\pi}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{b} - \hat{b}^\dagger\hat{a})\right] \begin{cases} |0\rangle_a|1\rangle_b = i|1\rangle_a|0\rangle_b, \\ |1\rangle_a|0\rangle_b = -i|0\rangle_a|1\rangle_b, \end{cases} \quad (51-11)$$

برای اینکه ضرایب i و $-i$ را در صورت لزوم حذف کنیم، می‌توانیم انتقال‌دهنده‌های فاز مناسب را در باریکه‌های خروجی وارد کنیم. بدین ترتیب، عملگر یکانی‌ای که $C - NOT$ اپتیک کوانتومی را توصیف می‌کند، عبارت است از

$$\hat{U}_{C-NOT} = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) \exp\left(i\frac{\pi}{2}\hat{b}^\dagger\hat{b}\right) \hat{U}_F(\pi) \quad (52-11)$$

متأسفانه، همان‌طوری که قبلاً تذکر دادیم، برای تحقق این گیت‌ها به محیط‌های کر با خاصیت غیرخطی بالا نیاز داریم. اخیراً یک گیت $C - NOT$ به‌طور آزمایشگاهی با فوتون‌های قطبیده ساخته شده است [۲۸]. نیل^۱ و همکارانش [۲۹] روش متفاوتی با استفاده از اپتیک خطی پیشنهاد کرده‌اند، ولی در این پیشنهاد تقلیل حالت یک جزء اساسی درحین محاسبات است، نه در خروجی.

برهم‌کنش‌های ممکن زیادی وجود دارند که می‌توان از آن‌ها برای ساخت یک گیت $C - NOT$ کوانتومی استفاده کرد، از جمله کاواک [30] QED، یون‌های در تله‌افتاده با خنک کردن لیزری [۳۱]، اتم‌ها در شبکه‌های اپتیکی که از طریق برخورد برهم‌کنش دارند [۳۲] و مانند آن. تمام این‌ها دارای این جنبه هستند که برهم‌کنش یک کیویته با کیویته دیگر مشروط به حالت کیویته شریک است. به‌عنوان مثال، اگر یک اتم واقع در تله

1. knill

شبکه اپتیکی نزدیک به اتم دیگر در چاه مجاور شبکه برده شود، ترازهای انرژی الکترون‌های ظرفیت در هریک از اتم‌ها به‌خاطر افت‌وخیزهای گشتاور دوقطبی اتم دیگر جابه‌جا می‌شوند. این انتقال‌ها برای ترازهای بالاتر بزرگ‌ترند. بنابراین فاز یک الکترون در حالت برانگیخته نسبت به فاز الکترون در حالت پایه کندتر افزایش می‌یابد. این انتقال فاز شرطی (یعنی اینکه مقدار فاز به حالت الکترون کنترل بستگی دارد) اساس این نوع تغییر حالت شرطی است که توسط یک گیت $C - NOT$ کوانتومی انجام می‌شود.

با وجود این، اتم‌ها باید با دقت زیادی کنترل شوند. معلوم می‌شود که وفاداری^۱ (فیدلیتی) عمل گیت باید یک در هزار یا بیشتر باشد تا یک کامپیوتر کوانتومی واقعی باشد. اما این تنها یکی از موانع در سر راه استفاده پتانسیل بلامنازع مکانیک کوانتومی است.

۱۱-۱۲ واهمدوسی و تصحیح خطای کوانتومی

همدوسی کوانتومی شکننده است. به‌دلایلی که در فصل ۸ و جاهای دیگر گفتیم، نگه‌داشتن حالت‌های برهم‌نهی تعداد زیادی ذرات که هر کدام از آن‌ها ممکن است به‌طور فیزیکی از سایرین جدا باشند، مشکل است. درهم‌تنیدگی حساس است. دلیل این امر این است که تمام سیستم‌ها، چه کلاسیکی و چه کوانتومی منزوی نیستند. این سیستم‌ها با آنچه در اطراف آن‌ها وجود دارد، برهم‌کنش دارند: افت‌وخیزهای موضعی میدان‌های الکترومغناطیسی، وجود ناخالصی‌های یونی، پیوند درجات آزادی مشاهده‌نشده با سیستم شامل کیوبیت‌ها و غیره. این افت‌وخیزها تداخل کوانتومی را از بین می‌برند. یک مثال ساده تداخل امواج اپتیکی در آزمایش دوشکاف ینگ است. در این دستگاه امواج حاصل از دو نقطه جدا از هم یک باریکه به یکدیگر می‌رسند. اگر دو قسمت باریکه دارای یک فاز باشند، الگوی فرانتز پایدار باقی می‌ماند. اما اگر فاز یک قسمت از باریکه نسبت به دیگری انحراف پیدا کند، الگوی فرانتز از بین خواهد رفت. هر چه تعداد شکاف‌های پرده بیشتر باشد، قابلیت دید برای همان مقدار تصادفی بودن فاز بر زوج شکاف‌ها کمتر می‌شود.

ممکن است چنین به‌نظر برسد که شرایط ناامیدکننده است: چگونه می‌توان امیدوار بود که دامنه‌ها و فازهای برهم‌نهی تعداد زیادی از کیوبیت را کنترل کرد؟ اما به‌طور شگفت‌آوری، مکانیک کوانتومی راهی برای حل این مسئله و حتی در درجات بالاتر درهم‌تنیدگی فراهم می‌کند. در پردازش اطلاعات کلاسیکی، نطفه اجتناب‌ناپذیر محیط توسط تصحیح خطا رفع می‌شود. ساده‌ترین شکل این کار این است که انتقال پیام یا محاسبه را چندین بار تکرار کنیم تا نتیجه اکثریت انتخاب شود. اما راه‌های مؤثری وجود دارد؛ به‌عنوان مثال، از طریق استفاده تست پارینه روی یک بلوک از بیت‌ها. مفهوم مشابهی برای یک ثبات کوانتومی وجود دارد که در آن «۱» ها و «۰» های منطقی را در بلوک‌هایی از کیوبیت‌ها کدگذاری و با انجام تست پارینه خطاها را مشخص کنیم [۳۳]. اما در این کار، یک مشکل وجود دارد: وقتی ثبات را اندازه‌گیری می‌کنیم، حالت برهم‌نهی کدگذاری شده در آن را از بین می‌بریم. بنابراین چگونه می‌توان بدون نگاه کردن به کیوبیت‌های ثبات، درستی یا نادرستی آن را

1. fidelity

تعیین کرد؟ انجام این کار ساده است: کافی است آن‌ها را با یک ثابت کمکی درهم‌تنیده کنیم و سپس ثابت کمکی را اندازه‌گیری نماییم. چون دو ثابت هم‌بسته هستند، نتایج اندازه‌گیری ثابت کمکی این امکان را فراهم خواهد کرد که بدون از بین بردن هرگونه هم‌دوسی برهم‌نهی، در پردازش ثابت اصلی، خطاهای آن را برطرف کنیم. راه دیگر برای حفظ هم‌دوسی ثابت این است که درباره‌ی نوع نوفه‌ای که روی آن عمل می‌کند، کمی اطلاعات داشته باشیم. اگر نوفه دارای مؤلفه‌های بسیار کند یا دارای طول‌موج بسیار بلند باشد، گاهی می‌توان ترکیب‌های معینی از حالت‌های کیوبیت را انتخاب کرد که در آن‌ها نوفه‌ها روی یک کیوبیت دقیقاً نوفه‌ی روی کیوبیت دیگر را خنثی کنند. این حالت‌های کیوبیتی یک «زیر فضای عاری از واهمدوسی»^۱ یا [35] DFS تشکیل می‌دهند. اگر بتوان تنها از حالت‌های محاسباتی که در این DFS وجود دارند استفاده کرد، کامپیوتر شما در مقابل اختلالات محیطی مصون خواهد بود.

امکان ترکیب این ابزار برای مقابله با نوفه‌ها وجود دارد و محققان را به این باور می‌رساند که باوجود اینکه واهمدوسی همیشه وجود دارد، می‌توان یک کامپیوتر کوانتومی ساخت.

مسائل

۱- با استفاده از حالت خروجی ۱۱-۲ تداخل‌سنج ماخ-زندر شکل ۱۱-۲ با دو فوتون دوگانه ورودی، رابطه ۱۱-۱۴ را اثبات کنید.

۲- با فرض اینکه ورودی‌های تداخل‌سنج ماخ-زندر حالت‌های دوفوتونی $|2\rangle_a |2\rangle_b$ باشند، عدم قطعیت در اندازه‌گیری فاز را به دست آورید.

۳- فرض کنید اولین تقسیم‌کننده باریکه تداخل‌سنج ماخ-زندر با یک وسیله «جادویی» که بتواند به نحوی حالت درهم‌تنیده ماکزیمال ۱۱-۶ را تولید کند، جایگزین شود. نشان دهید عدم قطعیت در اندازه‌گیری فاز برای تمام N ها دقیقاً برابر $\Delta\theta = 1/N$ است.

تذکره- باید اثر انتقال‌دهنده فاز در تداخل‌سنج را مشخص کنید و تقسیم‌کننده باریکه دوم را در نظر داشته باشید.

۴- این بیان را که در بخش ۱۱-۴ گفته شد که دوربری یک حالت با اشتراک گذاری مخلوط آماری

$$\hat{\rho}_{AB} = \frac{1}{2} (|0\rangle_A |0\rangle_B A|0\rangle_B |0\rangle + |1\rangle_A |1\rangle_B A|1\rangle_B |1\rangle)$$

غیرممکن است، ثابت کنید.

۵- فرض کنید آلیس، باب و کلر هر کدام یکی از «ذرات» A ، B یا C را که در یک حالت درهم‌تنیده سه‌ذره‌ای

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C - |1\rangle_A |1\rangle_B |1\rangle_C)$$

قرار دارند، به اشتراک گذاشته‌اند. فرض کنید آلیس حالت نامعلوم $c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ را در اختیار دارد. درمورد دوربری این حالت به هر دو نفر باب و کلر بحث کنید.

۶- نشان دهید عملگر یکانی

$$\hat{U}_H = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|].$$

معرف یک گیت هادامارد است.

۷- عملگر $\hat{X} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ معرف یک گیت منطقی NOT است (گاهی معکوس کننده نامیده می‌شود)؛ زیرا $|1\rangle = \hat{X}|0\rangle$ و $|0\rangle = \hat{X}|1\rangle$ نشان دهید گیت (C - NOT) با عملگر دو کیوبیتی

$$\hat{U}_{C-NOT} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X}.$$

نمایش داده می‌شود که در آن $|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \hat{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$ عملگر همانی است و کیوبیت اول نقش کنترل را ایفا می‌کند.

۸- گیت سه کیوبیتی

$$\hat{U}_{TG} |x_1\rangle |x_2\rangle |y\rangle = |x_1\rangle |x_2\rangle |\text{mod}_2(x_1 x_2 + y)\rangle$$

گیت تافولی^۱ نامیده می‌شود. نشان دهید این گیت یک گیت $C-C-Not$ است. مدار این گیت را رسم کنید. نمایش عملگر $\hat{U}_{TG}$ را بر حسب عملگر تصویری و وارونی سه کیوبیت به دست آورید.

۹- تحقق اپتیکی گیت تافولی آمده در مسئله قبل را طراحی کنید.

۱۰- فرض کنید $\hat{U}_{C1}$ معرف یک عملگر دو کیوبیتی باشد که هر حالت کوانتومی را مطابق $|\psi\rangle|\psi\rangle = \hat{U}_{C1}|\psi\rangle|0\rangle$ «کپی» می‌کند. نشان دهید چنین عملگری نمی‌تواند وجود داشته باشد.

مراجع

- [1]. Moore, G. E *Electronics*. (1965). 38, April 19 issue. This paper can be found at www.intel.com/research/silicon/mooreslaw/htm
- [2] Reprinted in Bell, J. S. (1987). *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press), p. 139.
- [3] Bollinger, J. J. Itano, W. M. Wineland, D. J. and Heinzen, D. J. (1996). *Phys. Rev. A*, 54, R4649; Gerry, C. C. (2000). *Phys. Rev. A*, 61, 043811.
- [4] Heitler, W. (1954). *The Quantum Theory of Radiation*, 3rd edition (London: Oxford University Press).
- [5] Kok, P. Lee, H. and Dowling, J. P. (2002). *Phys. Rev. A*, 65, 052104.
- [6] Gerry, C. C. and Campos, R. A. (2001). *Phys. Rev. A*, 64, 063814; C. C. Gerry, A. Benmoussa and Campos, R. A. (2002). *Phys. Rev. A*, 66, 013804.
- [7] See, for example, Banaszek, K. and Walmsley, I. A. (2003). *Opt. Lett.* 28, 52; Fitch, M. J. Jacobs, B. C. Pittman, T. B. and Franson, J. D. (2003). *Phys. Rev. A*, 68, 043814.
- [8] Holland, M. J. and Burnett, K. (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 71, 1355.
- [9] Campos, R. A. Gerry, C. C. and Benmoussa, A. (2003). *Phys. Rev. A*, 68, 023810.
- [10] Bennett, C. H. Brassard, G. Crepeau, C. Jozsa, R. Peres, A. and Wootters, W. K. (1993). *Phys. Rev. Lett.*, 70, 1895.
- [11] Boschi, D. Branca, S. De Martini, F. and L. Hardy, L. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 80, 1121.
- [12] Bouwmeester, D. Pan, J.-W. Mattle, K. Eibl, M. Weinfurter, H. and Zeilinger, A. (1997). *Nature*, 390, 575.
- [13] A. Furuwasa, J. Sørensen, S. L. Braunstein, L. Fuchs, C. A. Kimble, H. J. and Polzik, E. S. (1998). *Science*, 282, 706.
- [14] Rivest, R. Shamir A. and Adleman, On Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems. (1979). *MIT Laboratory for Computer Science Technical Report*, MIT/LCS/TR-212 (January).
- [15] Deutsch, D. (1985). *Proc. R. Soc. Lond. A* 400, 97.

- [16] Deutsch, D. and Jozsa, R. (1992). *Proc. R. Soc. Lond. A* 439, 553.
- [17] Shor, P. W. (1994). in *Proceedings of the 35th Symposium on Foundations of Computer Science, Los Alamitos*, edited by S. Goldwasser (IEEE Computer Society Press), p. 124.
- [18] Vandersypen, L. M. K. Steffen, M. Breyta, G. Yannoni, C. S. Sherwood, M. H. and Chuang, I. L. (2001). *Nature*, 414, 883.
- [19] Bennett, C. H. and Brassard, G. (1984). in *Proc. of IEEE Conference on Computers, Systems and Signal Processing* (New York: IEEE Press). See also Bennett, C. H. Besette, F. Brassard, G. Salvail, L. and Smolin, J. (1992). *J. Cryptol.*, 5, 3.
- [20] Bennett, C. H. (1992). *Phys. Rev. Lett.*, 68, 3121.
- [21] Ekert, A. K. (1991). *Phys. Rev. Lett.*, 67, 661.
- [22] Gisin, N. Ribordy, G. Tittel, W. and Zbinden, H. (2002). *Rev. Mod. Phys.*, 74, 145.
- [23] Guide, S. Riebe, M. Lancaster, G. P. T. Becher, C. Eschner, J. H'affner, H. Schmidt-Kaler, F. Chuang, I. L. and Blatt, R. (2003). *Nature*, 421, 48.
- [24] Grover, L. K. (1997). *Phys. Rev. Lett.*, 79, 325.
- [25] Chuang, I. L. and Yamamoto, Y. (1995). *Phys. Rev. A*, 52, 3489.
- [26] Fredkin, E. and Toffoli, T. (1982). *Int. J. Theor. Phys.*, 21, 219.
- [27] Milburn, G. J. (1989). *Phys. Rev. A*, 62, 2124.
- [28] O'Brien, J. L. Pryde, G. J. White, A. G. Ralph, T. C. and Branning, D. (2003). *Nature*, 426, 264.
- [29] Knill, E. Laflamme, R. and Milburn, G. (2001). *Nature*, 409, 46.
- [30] See Sleator, T. and Weinfurter, H. (1995). *Phys. Rev. Lett.*, 74, 4087; Domokos, P. Raimond, J. M. Brune, M. and Haroche, S. (1995). *Phys. Rev. A*, 52, 3554.
- [31] See Monroe, C. Meekhof, D. M. , King, B. E. , Itano, W. M. , and Wineland, D. J. (1995). *Phys. Rev. Lett.*, 75, 4714.
- [32] See Meacher, D. R. (1998). *Contemp. Phys.*, 39, 329; Deutsch, I. H and Brennen, G. K. (2000). *Forts. Phys.*, 48, 925.
- [33] Calderbank, A. and Shor P. (1995). *Phys. Rev. A*, 52, R2493; *Phys. Rev. A*, 54 (1996), 1098; Steane A. M. (1995). *Phys. Rev. Lett.*, 77, 793.
- [34] Palma, G. M., K.-A. Suominen and Ekert, A. K. (1996). *Proc. R. Soc. Lond.*, A 452, 567.
- [35] Lidar, D., Chuang I. L. and Whaley, B. (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 81, 2594

کتاب‌شناسی

یک کتاب که بسیاری از جنبه‌های رمزنگاری را می‌پوشاند:

- Garrett P., *Making and Breaking Codes: An Introduction to Cryptology* (Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001).

یک کتاب جالب در مورد تاریخچه رمزنگاری:

- Singh S., *The Code Book: The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography* (New York: Anchor Books, 1999).

چند کتاب و مقاله مفید در زمینه‌های مختلف اطلاعات کوانتومی:

- Lo H.-K., Popescu S. , and Spliller T. , (editors), *Introduction to Quantum Computation and Quantum Information* (Singapore: World Scientific, 1998).
- Bouwmeester D., A. Ekert K. and Zeilinger A (editors), *The Physics of Quantum Information* (Berlin: Springer, 2000).
- Nielsen M. and Chuang I. L., *Quantum Information and Quantum Computation* (Cambridge: Cambridge University Press, 2001).
- Braunstein S. L. and Lo H.-K., *Scalable Quantum Computers* (Berlin: Wiley-VCH, 2001).
- Barenco A., Quantum physics and computers, *Contemp. Phys.*, 37 (1996), 375.
- DiVincenzo D. P, Quantum Computation, *Science*, 270 (1995), 255.
- Hughes R. J., Alde D. M., Dyer P., Luther G. G., Morgan, G. L. and Schauer M., Quantum cryptography, *Contemp. Phys.*, 36 (1995), 149.
- Phoenix S. J. D. and Townsend P. D., Quantum cryptography: how to beat the code breakers using quantum mechanics, *Contemp. Phys.*, 36 (1995), 165.
- Plenio M. B. and Vedral V., Teleportation, entanglement and thermodynamics in the quantum world, *Contemp. Phys.*, 39 (1998), 431.

پیوست «أ»

عملگر چگالی، حالت‌های درهم‌تنیده، تجزیه اشمیت و آنتروپی فون‌نویمن

أ-۱ عملگر چگالی

بردار حالت $|\psi\rangle$ مکانیک کوانتومی بیشترین اطلاعاتی را که توسط قوانین مکانیک کوانتومی مجاز است، در مورد یک سیستم دربردارد. معمولاً اطلاعات از اعداد کوانتومی وابسته به یک مجموعه مشاهده‌پذیرهای جابه‌جاپذیر تشکیل شده است. به علاوه، اگر $\langle\psi_1|$ و $\langle\psi_2|$ دو حالت کوانتومی ممکن باشند، برهم‌نهی همدوس آن‌ها

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \quad (أ-۱)$$

در صورتی که ضرایب c_1 و c_2 معلوم باشد، یک حالت کوانتومی است. اگر حالت‌های $\langle\psi_1|$ و $\langle\psi_2|$ متعامد باشند، $\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$ ، باید داشته باشیم $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. اما اغلب وضعیت‌هایی است که بردار حالت را دقیقاً نمی‌دانیم. مواردی وجود دارد که به عنوان مثال، سیستم موردنظر با یک سیستم دیگر که ممکن است سیستم بسیار بزرگ‌تری باشد، مثل محیط اطراف آن که می‌تواند با آن درهم‌تنیده شود، برهم‌کنش دارد. ممکن است شرایطی باشد که در آن بتوان یک سیستم چندمؤلفه‌ای را با یک بردار حالت نشان داد، ولی نتوان برای زیرسیستم‌های آن بردار حالت تعریف کرد. به عنوان مثال، برای یک سیستم متشکل از دو ذره با اسپین‌های $1/2$ ، یک بردار حالت ممکن به صورت

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2], \quad (أ-۲)$$

است که در آن $|\uparrow\rangle$ و $|\downarrow\rangle$ ویژه‌حالت‌های مؤلفه z ام اسپین هر ذره در راستای مثبت و منفی است. این حالت، حالت یگانه نامیده می‌شود (تکانه زاویه‌ای کل صفر) و یکی از حالت‌های بل است. معادله أ-۲ نمونه‌ای از یک

حالت درهم تنیده است. یک حالت درهم تنیده را نمی‌توان در هیچ پایه‌ای به صورت یک حاصل ضرب از حالت‌های دو زیر سیستم نوشت، یعنی

$$|\psi\rangle \neq |\text{spin } 1\rangle |\text{spin } 2\rangle \quad (3-أ)$$

درهم تنیدگی، جدا از خود اصل برهم‌نهی، همان‌طوری که در ۱۹۳۵ توسط شرودینگر اشاره شد، یکی از اسرار مکانیک کوانتومی است. با وجود این، توجه کنید که درهم تنیدگی از اصل برهم‌نهی حاصل می‌شود و چیزی نیست که جداگانه به نظریه تحمیل شده باشد. بنابراین این نظر فاینمن که برهم‌نهی «تنها راز مکانیک کوانتومی» است، نیز درست است.

حالت‌های کوانتومی که توسط بردارهای حالت توصیف می‌گردند، حالت‌های خالص نامیده می‌شوند. حالت‌هایی که نتوان آن‌ها را توسط بردار حالت توصیف کرد، حالت‌های مخلوط هستند. حالت‌های مخلوط توسط عملگر چگالی توصیف می‌شوند.

$$\hat{\rho} = \sum_i |\psi_i\rangle p_i \langle\psi_i| = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|, \quad (4-أ)$$

که در آن جمع‌بندی روی یک آنسامبل است (به مفهوم مکانیک آماری) و p_i عبارت است از احتمال اینکه سیستم در حالت i ام آنسامبل، $|\psi_i\rangle$ ، باشد که در آن $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$. این احتمالات در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \sum_i p_i^2 \leq 1. \quad (5-أ)$$

در حالت خاصی که تمام p_i ها به جز احتمال i ام صفر باشند، $p_i = \delta_{ij}$ ، داریم:

$$\hat{\rho} = |\psi_j\rangle \langle\psi_j|, \quad (6-أ)$$

که عملگر چگالی برای حالت خالص $|\psi_j\rangle$ است. توجه کنید که عملگر چگالی در این مورد همان عملگر تصویری روی حالت $|\psi_j\rangle$ است و برای حالت کلی تر (4-أ) عملگر چگالی برابر است با مجموع عملگرهای تصویری روی آنسامبل که با احتمالات هر عضو در آنسامبل توزین شده باشد.

حال یک پایه کامل راست‌هنجار $(\hat{I} = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|)$ که ویژه‌حالت‌های یک مشاهده‌پذیر است را معرفی می‌کنیم؛ در این صورت، برای تأمین عضو آنسامبل می‌توان نوشت:

$$|\psi_i\rangle = \sum_n |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n | \psi_i\rangle = \sum_n c_n^{(i)} |\varphi_n\rangle, \quad (7-أ)$$

که در آن $c_n^{(i)} = \langle\varphi_n | \psi_i\rangle$. عنصر ماتریسی $\hat{\rho}$ بین ویژه‌حالت‌های n و n' عبارت است از

$$\langle\varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_{n'}\rangle = \sum_i \langle\varphi_n | \psi_i\rangle p_i \langle\psi_i | \varphi_{n'}\rangle = \sum_i p_i c_n^{(i)} c_{n'}^{(i)*}. \quad (8-أ)$$

کمیت‌های $\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle$ ، عناصر ماتریس چگالی را تشکیل می‌دهند. با گرفتن رد این ماتریس داریم:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{\rho} &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle = \sum_i \sum_n \langle \varphi_n | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_n p_i \langle \psi_i | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi_i \rangle = \sum_i p_i = 1. \end{aligned} \quad (9-أ)$$

چون $\hat{\rho}$ هرمیتی است، عناصر قطری $\langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle$ باید حقیقی باشند و در نتیجه از روابط بالا داریم:

$$0 \leq \langle \varphi_n | \hat{\rho} | \varphi_n \rangle \leq 1. \quad (10-أ)$$

حال مجذور عملگر چگالی را در نظر بگیرید: $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \cdot \hat{\rho}$ ، برای یک حالت خالص $|\varphi_n\rangle$ نتیجه می‌شود:

$$\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle \langle \psi | \psi\rangle \langle \psi| = |\psi\rangle \langle \psi| = \hat{\rho} \quad (11-أ)$$

و بنابراین

$$\text{Tr} \hat{\rho}^2 = \text{Tr} \hat{\rho} = 1. \quad (12-أ)$$

برای یک مخلوط آماری

$$\hat{\rho}^2 = \sum_i \sum_j p_i p_j |\psi_i\rangle \langle \psi_i | \psi_j\rangle \langle \psi_j|. \quad (13-أ)$$

با گرفتن رد داریم:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{\rho}^2 &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho}^2 | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i \sum_j p_i p_j \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_j p_i p_j |\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 \\ &\leq \left[\sum_i p_i \right]^2 = 1. \end{aligned} \quad (14-أ)$$

که تساوی وقتی برقرار است که برای هر $|\psi_i\rangle$ و $|\psi_j\rangle$ داشته باشیم $|\langle \psi_i | \psi_j \rangle|^2 = 1$ و این زمانی برقرار است که همه $|\psi_i\rangle$ ها در فضای هیلبرت هم‌خط^۱ باشند، یعنی به‌جز در یک ضریب فاز، هم‌ارز باشند. بنابراین ملاک زیر را برای حالت‌های خالص و مخلوط داریم:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{\rho}^2 &= 1, & \text{برای یک حالت خالص} \\ \text{Tr} \hat{\rho}^2 &< 1, & \text{برای یک حالت مخلوط} \end{aligned} \quad (15-أ)$$

1. colinear

برای یک حالت خالص بهتر است در اینجا یک مثال بیاوریم. برهم‌نهی یک حالت خلأ و حالت یک‌فوتونی را در نظر بگیرید.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\phi}|1\rangle), \quad (16-أ)$$

که در آن ϕ یک ضریب فاز است. عملگر چگالی وابسته به این حالت عبارت است از:

$$\hat{\rho}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 0| + e^{-i\phi}|0\rangle\langle 1|]. \quad (17-أ)$$

از طرف دیگر، عملگر چگالی برای یک مخلوط که به‌طور مساوی از خلأ و حالت‌های تک‌فوتونی تشکیل شده عبارت است از

$$\hat{\rho}_M = \frac{1}{2}[|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|]. \quad (18-أ)$$

این دو عملگر چگالی در جملات «غیر قطری» یا «همدوسی» اختلاف دارند. این جملات در مورد مخلوط آماری وجود ندارند. البته عدم وجود جملات همدوسی چیزی است که رفتار یک حالت کاملاً کوانتومی را با غیر کوانتومی متمایز می‌کند. به سادگی می‌توان نشان داد که $\text{Tr} \hat{\rho}_M^2 = 1/2$.

برای یکی از حالت‌های آنسامبل $|\psi_i\rangle$ که خود یک حالت خالص است، مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{O}$ برابر است با

$$\langle \hat{O} \rangle_i = \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle. \quad (19-أ)$$

برای مخلوط آماری، میانگین آنسامبل به صورت زیر داده می‌شود:

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle, \quad (20-أ)$$

که برابر است با میانگین مقادیر چشمداشتی کوانتومی که با احتمال‌های p_i توزین شده باشند. رابطه بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}) \quad (21-أ)$$

چون

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}) &= \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho} \hat{O} | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_n \sum_i p_i \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \hat{O} | \varphi_n \rangle \\ &= \sum_i \sum_n p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \varphi_n \rangle \langle \varphi_n | \psi_i \rangle \\ &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{O} | \psi_i \rangle. \end{aligned} \quad (22-أ)$$

۲- سیستم دوحالتی و کره بلاخ

برای یک سیستم دوحالتی که می‌تواند یک ذره با اسپین ۱/۲، یک اتم دوترازی یا قطبش یک تک‌فوتون باشد، می‌توان همواره توصیفی برحسب عملگرهای پاولی $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ که در روابط جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند، نوشت:

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k. \quad (۲۳-ا)$$

در پایه‌ای که $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2$ قطری هستند، این عملگرها را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (۲۴-ا)$$

هر ماتریس هرمیتی ۲×۲ ، از جمله ماتریس چگالی را می‌توان برحسب ماتریس‌های پاولی و ماتریس همانی ۲×۲ I_2 ، نوشت.

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+s_3 & s_1+is_2 \\ s_1-is_2 & 1-s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I_2 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (۲۵-ا)$$

که در آن بردار $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, s_3\}$ بردار بلاخ نامیده می‌شود. برای یک حالت خالص $|\varphi_n\rangle$ ، $\hat{\rho} = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ بردار بلاخ دارای طول واحد، $\sum_i |s_i|^2 = 1$ است و در یک نقطه از سطح کره سه‌بعدی اقلیدسی که با مختصات کروی θ و ϕ مشخص می‌شود، قرار دارد. حالت کوانتومی وابسته را می‌توان به صورت زیر برحسب این زوایا نوشت:

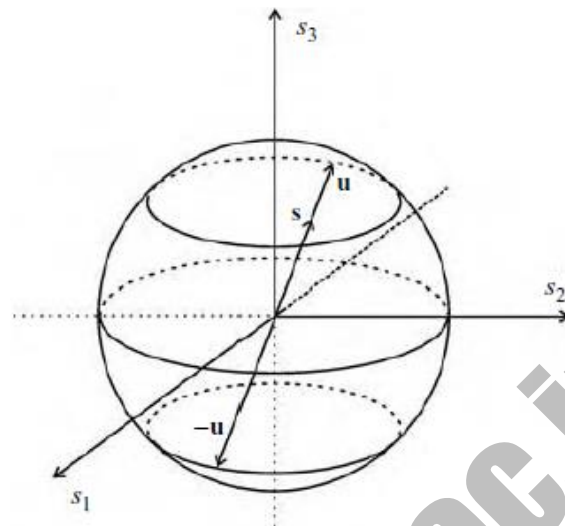
$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2}|\uparrow\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi/2}|\downarrow\rangle \quad (۲۶-ا)$$

به‌طور کلی، با در نظر گرفتن حالت‌های مخلوط که در آن $|\mathbf{s}| < 1$ است، عملگر چگالی $\hat{\rho}$ دارای دو ویژه‌مقدار زیر است:

$$g_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \right] = \frac{1}{2} [1 + |\mathbf{s}|],$$

$$g_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \right] = \frac{1}{2} [1 - |\mathbf{s}|], \quad (۲۷-ا)$$

که ویژه‌بردارهای مربوط توسط بردارهای u و $-u$ تعیین می‌شوند که در کره بلاخ شکل 1 - نشان داده شده‌اند. برای حالت‌های خالص که برای آن‌ها $|\mathbf{s}| = 1$ است، u و s هر دو برهم منطبق‌اند و روی سطح کره بلاخ قرار دارند. برای یک حالت مخلوط که برای آن $|\mathbf{s}| < 1$ است، u در همان راستای s قرار دارد و برخلاف s طولش برابر با 1 است. بنابراین همیشه روی سطح کره بلاخ قرار می‌گیرد. از معادله ۲۶ - همواره می‌توان استفاده و u و $-u$ را برحسب بردارها در فضای حالت بیان کرد.



شکل ۱- نمایش ماتریس چگالی یک سیستم دوحالتی برحسب کرهٔ بلاخ و بردار بلاخ؛ سه مؤلفهٔ بردار بلاخ $s = \{s_1, s_2, s_3\}$ عملگر چگالی را برطبق معادلهٔ ۲۶- مشخص می‌کنند. دو ویژه‌مقدار این عملگر عبارت‌اند از $(1 \pm |s|)/2$ و دو ویژه‌بردار مربوط توسط u و $-u$ مشخص می‌شوند.

۳-۱ حالت‌های درهم‌تنیده

حال یک سیستم دودره‌ای (دوئمدی که سیستم دوجزئی نیز نامیده می‌شود) را در نظر بگیرید. برای سهولت فرض کنید هر ذره در یکی از حالت‌های $|\psi_1\rangle$ یا $|\psi_2\rangle$ قرار داشته باشد. با استفاده از نمادهای زیر

$ \psi_1^{(1)}\rangle$	ذره ۱ در حالت ۱
$ \psi_2^{(1)}\rangle$	ذره ۱ در حالت ۲
$ \psi_1^{(2)}\rangle$	ذره ۲ در حالت ۱
$ \psi_2^{(2)}\rangle$	ذره ۲ در حالت ۲

یک حالت خالص برهم‌نهی از دو ذره را در نظر بگیرید (به‌طور کلی یک حالت خالص درهم‌تنیده).

$$|\Psi\rangle = C_1 |\psi_1^{(1)}\rangle \otimes |\psi_2^{(2)}\rangle + C_2 |\psi_2^{(1)}\rangle \otimes |\psi_1^{(2)}\rangle \quad (28-1)$$

بدیهی است که این رابطه را می‌توان به سیستم‌های چندذره‌ای تعمیم داد. برای چنین سیستم‌های چندذره‌ای می‌توان عملگرهای چگالی کاهش‌یافته را با گرفتن رد عملگر چگالی روی سایر اجزای سیستم تعریف کرد. درمورد بالا که عملگر چگالی سیستم دودره‌ای برابر با $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ است، عملگر چگالی کاهش‌یافته برای ذره ۱ عبارت است از

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(1)} &= \text{Tr}_2 \hat{\rho} = \langle \psi_1^{(2)} | \hat{\rho} | \psi_1^{(2)} \rangle + \langle \psi_2^{(2)} | \hat{\rho} | \psi_2^{(2)} \rangle \\ &= |C_1|^2 |\psi_1^{(1)}\rangle \langle \psi_1^{(1)}| + |C_2|^2 |\psi_2^{(1)}\rangle \langle \psi_2^{(1)}|.\end{aligned}\quad (29-ا)$$

وقتی $i = 1, 2$, $C_i \neq 0$ باشد، عملگر چگالی ذره ۱ به شکل یک حالت مخلوط است. به طور مشابه، برای ذره ۲ داریم:

$$\hat{\rho}^{(2)} = \text{Tr}_1 \hat{\rho} = |C_1|^2 |\psi_1^{(2)}\rangle \langle \psi_1^{(2)}| + |C_2|^2 |\psi_2^{(2)}\rangle \langle \psi_2^{(2)}|.\quad (30-ا)$$

بدیهی است وقتی حالت یکی از ذرات را بدون در نظر گرفتن ذره دیگر در نظر بگیریم، این حالت عموماً یک حالت مخلوط است. بنابراین می توان درجه درهم تنیدگی را بر حسب درجه خالص بودن یکی از زیر سیستم ها تعریف کرد. اگر $\text{Tr}[\hat{\rho}^{(2)}]^2 = 1$ باشد، حالت $|\Psi\rangle$ یک حالت درهم تنیده نیست. اما اگر $\text{Tr}[\hat{\rho}^{(2)}]^2 < 1$ باشد، می توان نتیجه گیری کرد که $|\Psi\rangle$ درهم تنیدگی بین زیر سیستم های ۱ و ۲ را نشان می دهد.

۴- تجزیه اشمیت

برای مشخص کردن درهم تنیدگی، حداقل برای موردی که تنها دو زیر سیستم وجود داشته باشد، راه مناسب دیگری داریم. این راه دیگر، استفاده از آنتروپی فون نویمان است که آن را در بخش بعدی معرفی خواهیم کرد. اما ابتدا بهتر است تجزیه اشمیت را معرفی کنیم [۱، ۲]. برای اینکه بحث کلی باشد، تعداد ابعاد فضاهای هیلبرت زیر سیستم ها را مشخص نمی کنیم.

فرض کنید $\{|a_i\rangle, i = 1, 2, 3, \dots\}$ و $\{|b_j\rangle, j = 1, 2, 3, \dots\}$ به ترتیب پایه های زیر سیستم های u و v را تشکیل دهند. اگر فضاهای هیلبرت این سیستم ها را به ترتیب $\mathcal{H}_u$ و $\mathcal{H}_v$ نشان دهیم، هر بردار $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_u \otimes \mathcal{H}_v$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle.\quad (31-ا)$$

در این پایه ها عملگر چگالی سیستم مرکب عبارت است از

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= |\Psi\rangle \langle \Psi| = \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |a_i\rangle \langle a_k| \otimes |b_j\rangle \langle b_l| \\ &= \sum_{i,j,k,l} \rho_{ij,kl} |a_i\rangle \langle a_k| \otimes |b_j\rangle \langle b_l|,\end{aligned}\quad (32-ا)$$

که در آن $\rho_{ij,kl} = c_{ij} c_{kl}^*$ عملگرهای چگالی هریک از این زیر سیستم ها با ردهای جزئی زیر داده می شوند:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_u &= \text{Tr}_v \hat{\rho} = \sum_j \langle b_j | \hat{\rho} | b_j \rangle = \sum_{i,j,k} \rho_{i,j,k,j} |a_i\rangle \langle a_k|, \\ \hat{\rho}_v &= \text{Tr}_u \hat{\rho} = \sum_i \langle a_i | \hat{\rho} | a_i \rangle = \sum_{i,j,k} \rho_{i,j,i,l} |b_j\rangle \langle b_l|.\end{aligned}\quad (33-ا)$$

ولی می‌توان برای هر سیستم دوجزئی در حالت خالص، حالت آن را به صورت زیر نوشت:

$$|\Psi\rangle = \sum_i g_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle \quad (۳۴-ا)$$

که در آن $\{|u_i\rangle\}$ و $\{|v_i\rangle\}$ به ترتیب پایه‌های راست‌هنگار $\mathcal{H}_u$ و $\mathcal{H}_v$ هستند و $\sum_i |g_i|^2 = 1$. این رابطه تجزیه اشمیت نامیده می‌شود. عملگر چگالی سیستم مرکب عبارت است از

$$\hat{\rho} = \sum_{i,k} g_i g_k^* |u_i\rangle \langle u_k| \otimes |v_i\rangle \langle v_k|. \quad (۳۵-ا)$$

اثبات این رابطه به صورت زیر است:

پایه‌های $\{|u_i\rangle\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\hat{\rho}_u$ در این پایه قطری باشد و فرض می‌کنیم که ابعاد $\mathcal{H}_u$ از ابعاد $\mathcal{H}_v$ بیشتر نباشد. فرض کنید $\{|v_i\rangle\}$ یک پایه دلخواه در $\mathcal{H}_v$ باشد. در این صورت، می‌توان نوشت:

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle \langle \Psi| = \sum_{i,j,k,l} c_{ij} c_{kl}^* |u_i\rangle \langle u_k| \otimes \left| \frac{v'_j}{v'_l} \right|. \quad (۳۶-ا)$$

اما $\hat{\rho}_u = \sum_{i,j,k} c_{ij} c_{kj}^* |u_i\rangle \langle u_k|$ باید قطری باشد. بنابراین $\delta_{ik} |g_i|^2 = \sum_j c_{ij} c_{kj}^*$. این شرط به ما امکان می‌دهد تا به پایه متعامد دیگری در $\mathcal{H}_u$ برویم. برای هر $|g_i| \neq 0$ و برای هر $|u_i\rangle$ می‌توان حالت نسبی زیر را تعریف کرد:

$$|v_i\rangle = \sum_j \left(\frac{c_{ij}}{g_i} \right) |v'_j\rangle \quad (۳۷-ا)$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, N$ و N از ابعاد $\mathcal{H}_u$ بیشتر نیست. عملگر چگالی سیستم مرکب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{i,j,k,l} g_i g_k^* |u_i\rangle \langle u_k| \otimes \left(\frac{c_{ij}}{g_i} \right) |v'_j\rangle \langle v'_l| \left(\frac{c_{kl}^*}{g_k^*} \right) \\ &= \sum_{i,k} g_i g_k^* |u_i\rangle \langle u_k| \otimes |v_i\rangle \langle v_k|, \end{aligned} \quad (۳۸-ا)$$

که در آن تنها N بردار پایه $\{|v_i\rangle\}$ از $\mathcal{H}_v$ برای بیان بردار حالت یا عملگر چگالی سیستم مرکب کافی است. قبل از ادامه چند تذکر لازم است:

- ۱- جمع‌بندی روی اندیس تجزیه اشمیت تا کوچک‌ترین ابعاد دو فضای هیلبرت $\mathcal{H}_u$ و $\mathcal{H}_v$ است.
- ۲- این تجزیه منحصر به فرد نیست و در حالت کلی نمی‌توان به سیستم‌های مرکب با بیش از دو زیرسیستم تعمیم داد.
- ۳- در پایه‌ای که برای تجزیه اشمیت استفاده شده است، $\hat{\rho}_u$ و $\hat{\rho}_v$ قطری و دارای طیف‌های مثبت یکسانی هستند.

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_u &= \sum_i |g_i|^2 |u_i\rangle \langle u_i|, \\ \hat{\rho}_v &= \sum_i |g_i|^2 |v_i\rangle \langle v_i|.\end{aligned}\quad (39-ا)$$

این جنبه از تجزیه اشمیت است که استفاده از آنتروپی فون نویمان (که در بخش ۵- معرفی خواهیم کرد) را برای مشخص کردن درهم تنیدگی یک سیستم دوجزئی تسهیل می‌کند. چون جمع‌بندی روی اندیس تجزیه اشمیت تا کوچک‌ترین بعد دو زیرفضای $\mathcal{H}_u$ و $\mathcal{H}_v$ است، اگر یک سیستم دوحالتی با یک سیستم N بعدی که در آن $N > 2$ است درهم تنیده باشد، تجزیه اشمیت تنها دوجمله دارد.

در اینجا به ذکر یک مثال از تجزیه اشمیت برای یک سیستم دوجزئی می‌پردازیم. یک حالت یگانه اسپینی (SS) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$|SS\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle_1 |\downarrow_z\rangle_2 - |\downarrow_z\rangle_1 |\uparrow_z\rangle_2), \quad (40-ا)$$

که در آن $|\uparrow_z\rangle_1$ حالت ذره ۱ با اسپین بالا در راستای z است و غیره. بدیهی است که این حالت به صورت یک تجزیه اشمیت نوشته شده است. ولی از آنجا که حالت یگانه اسپینی ناوردای دورانی است، به سادگی می‌توان تجزیه‌های اشمیت دیگری را نیز برای آن نوشت. به عنوان مثال،

$$|SS\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_x\rangle_1 |\downarrow_x\rangle_2 - |\downarrow_x\rangle_1 |\uparrow_x\rangle_2), \quad (41-ا)$$

یا به طور کلی تر

$$|SS\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_n\rangle_1 |\downarrow_n\rangle_2 - |\downarrow_n\rangle_1 |\uparrow_n\rangle_2), \quad (42-ا)$$

که در آن n یک بردار یکه در یک راستای دلخواه است.

۵- آنتروپی فون نویمان

با مفهوم آنتروپی از ترمودینامیک آشنایی داریم که معمولاً به عنوان اندازه بی‌نظمی در نظر گرفته می‌شود: هرچه بی‌نظمی در سیستم بیشتر باشد، آنتروپی آن بیشتر است. از نظر مکانیک آماری و نظریه اطلاعات، آنتروپی را می‌توان به عنوان درجه ازدست‌دادن اطلاعات تعبیر کرد، اطلاعاتی که اگر یک اندازه‌گیری کامل از سیستم انجام شود، به دست می‌آیند [۳].

تعریف فون نویمان از آنتروپی تقریباً به موازات تعریف مکانیک آماری است. برای یک عملگر چگالی $\hat{\rho}$ آنتروپی فون نویمان به صورت زیر تعریف می‌شود [۴]:

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \quad (43-ا)$$

برای یک حالت خالص $S(\hat{\rho}_{pure}) = 0$ است و بنابراین اندازه‌گیری‌های مکرر حالت موردنظر هیچ اطلاعات جدیدی نمی‌دهد. اما برای یک حالت مخلوط $S(\hat{\rho}_{mixed}) > 0$ است. در حالت کلی، محاسبه آنتروپی آسان نیست. اما در پایه‌ای که عملگر چگالی در آن قطری است، نظیر پایه‌های اشمیت، آنتروپی را می‌توان از عناصر قطری به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$S(\hat{\rho}) = - \sum_k \rho_{kk} \ln \rho_{kk}. \quad (44-ا)$$

چون تمام اعداد ρ_{kk} باید حقیقی باشند و $0 \leq \rho_{kk} \leq 1$ ، نتیجه می‌شود که $S(\hat{\rho})$ باید مثبت نیمه‌معین باشد. به‌عنوان مثال، حالت دوجزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 + \xi |1\rangle_1 |1\rangle_2), \quad (45-ا)$$

که به‌شکل یک تجزیه اشمیت است. عملگرهای چگالی برای زیر سیستم‌ها عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &= \frac{1}{(1+|\xi|^2)} [|0\rangle_{11}\langle 0| + |\xi|^2 |1\rangle_{11}\langle 1|], \\ \hat{\rho}_2 &= \frac{1}{(1+|\xi|^2)} [|0\rangle_{22}\langle 0| + |\xi|^2 |1\rangle_{22}\langle 1|]. \end{aligned} \quad (46-ا)$$

دراین صورت داریم:

$$\begin{aligned} S(\hat{\rho}_1) &= - \left\{ \frac{1}{(1+|\xi|^2)} \ln \left[\frac{1}{(1+|\xi|^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)} \ln \left[\frac{|\xi|^2}{(1+|\xi|^2)} \right] \right\} = S(\hat{\rho}_2). \end{aligned} \quad (47-ا)$$

برای موردی که $\xi = 0$ باشد، حالت غیر درهم‌تنیده $|0\rangle_1 |0\rangle_2$ را داریم و همان‌طوری که انتظار می‌رود، $S(\hat{\rho}_1) = S(\hat{\rho}_2) = 0$ اما به‌ازای $|\xi| = 1$ درهم‌تنیدگی ماکزیمال برای این حالت را نشان می‌دهد که به‌معنای هم‌بستگی‌های کوانتومی ماکزیمال است. با گرفتن رد روی یکی از این زیر سیستم‌ها اطلاعات درباره این هم‌بستگی‌ها از بین می‌رود.

بالاخره وقتی برای یک حالت خالص از یک سیستم دوجزئی، زیرسیستم‌ها دارای ابعاد متفاوتی باشند، همان‌طور که به‌سادگی می‌توان نشان داد، آنتروپی‌های زیرسیستم‌ها برابرند. این نتیجه پایه‌های اشمیت است که باعث می‌شود در آن پایه ابعاد همه زیرسیستم‌ها با هم برابر باشند. در انتهای فصل ۴ درمورد مدل جینز کامینگز یک چنین مثالی آمده است.

۶-۱ دینامیک عملگر چگالی

بالاخره در غیاب برهم‌کنش‌های اتلافی و برهم‌کنش‌های صریحاً وابسته به زمان، عملگر چگالی مطابق رابطه زیر تحول یکانی می‌یابد:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{\rho}, \hat{H}], \quad (48-1)$$

این رابطه به‌سادگی با استفاده از این واقعیت که هریک از حالت‌های $|\psi_i\rangle$ آنسامبل در معادله شرودینگر

$$i\hbar \frac{d|\psi_i\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi_i\rangle. \quad (49-1)$$

صدق می‌کنند، اثبات می‌شود یا به‌طور معادل می‌توان نوشت:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, 0) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t, 0) \quad (50-1)$$

که در آن عملگر تحول یکانی $\hat{U}(t, 0)$ در معادله

$$i\hbar \frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{H}\hat{U}. \quad (51-1)$$

صدق می‌کند. معادله ۴۸-۱ معادله فون‌نویمن نامیده می‌شود که مشابه مکانیک کوانتومی معادله لیوویل وابسته به تحول توزیع‌های احتمال در فضای فاز در مکانیک آماری است. این معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \equiv \mathcal{L}\hat{\rho}(t), \quad (52-1)$$

که در آن $\mathcal{L}$ ابرعملگر لیوویل نامیده می‌شود.

مراجع

- [1] Schmidt, E. (1907). *Math. Annalen*, 63, 433.
برای کاربرد اولیه در مکانیک کوانتومی، فصلی را که توسط «اورت» در مرجع زیر آمده است ببینید:
Everett, H. III, in *The Many Worlds Interpretation of Quantum Mechanics*, edited by DeWitt, B. S. and Graham, N. (Princeton: Princeton University Press, 1973), p. 3.
[2] Ekert, A. and Knight, P. L., (1995). *Am. J. Phys.*, 63, 415.
[3] See, for example, the discussion in Machta, (1999) *J. Am. J. Phys.*, 67, 1074.
[4] J. von Neumann, (1955). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton: Princeton University Press).

کتاب‌شناسی

دو مقاله مروری زیر درباره عملگر چگالی را توصیه می‌کنیم:

- Fano, U. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques, *Rev. Mod. Phys.*, 29 (1957), 74.
- Ter Haar, D. Theory and application of the density matrix, *Rep. Prog. Phys.*, 24 (1961), 304.

همین‌طور

- Weissbluth, M. *Atoms and Molecules* (New York: Academic Press, 1978), chapter 13.
یک مقاله مروری درباره درهم‌تنیدگی و مشخصه‌های آن:
- Bruß, D. Characterizing entanglement, *J. Math. Phys.*, 43 (2003), 4237.
یک مقاله مروری درباره آنتروپی و نظریه اطلاعات:
- Wehrl, A. General properties of entropy, *Rev. Mod. Phys.*, 50 (1978), 221.

پیوست «ب»

نظریه اندازه گیری کوانتومی به اختصار

آنچه به دنبال می آید، به هیچ وجه مرور جامعی بر نظریه اندازه گیری کوانتومی نیست. برای جزئیات بیشتر خواننده می تواند به قسمت کتاب شناسی مراجعه کند. در اینجا تنها جنبه هایی را از این نظریه ارائه می دهیم که برای فهم نتایج اندازه گیری های تقلیل حالت، به خصوص برای وضعیت هایی که شامل حالت های درهم تنیده است، لازم است.

فرض کنید عملگر $\hat{Q}$ یک عملگر هرمیتی باشد که متناسب به مشاهده پذیر Q است. به علاوه، فرض کنید حالت های $\{|q_n\rangle; n \text{ عدد صحیح}\}$ ویژه حالت های $\hat{Q}$ با ویژه مقدارهای q_n باشند:

$$\hat{Q}|q_n\rangle = q_n|q_n\rangle$$

این ویژه حالت ها یک مجموعه کامل تشکیل می دهند و در رابطه زیر صدق می کنند:

$$\sum_n |q_n\rangle \langle q_n| = \hat{I}. \quad (\text{ب-۱})$$

هر جمله $|q_n\rangle \langle q_n|$ یک عملگر تصویری روی حالتی با ویژه مقدار q_n است، $\hat{P}(q_n) = |q_n\rangle \langle q_n|$. یک حالت بهنجار $(\langle \psi | \psi \rangle = 1)$ را می توان بر حسب ویژه حالت های $\hat{Q}$ بسط داد.

$$|\psi\rangle = \hat{I}|\psi\rangle = \sum_n |q_n\rangle \langle q_n | \psi \rangle = \sum_n c_n |q_n\rangle \quad (\text{ب-۲})$$

که در آن $c_n = \langle q_n | \psi \rangle$ در حالت کلی یک عدد مختلط است و دامنه احتمال نامیده می شود. اگر $|\psi\rangle$ بردار حالت، درست قبل از اندازه گیری مشاهده پذیر Q باشد، احتمال خروجی q_n ، $P(q_n)$ ، برابر است با

$$P(q_n) = \langle \psi | \hat{P}(q_n) | \psi \rangle = |c_n|^2. \quad (\text{ب-۳})$$

بر طبق تعبیر رسمی مکانیک کوانتومی (کپنهاکی)، اگر سیستم قبل از اندازه گیری در حالت $|\psi\rangle$ که یک

ویژه حالت $\hat{Q}$ نیست، باشد، بر اثر اندازه‌گیری بردار حالت به یکی از ویژه‌حالت‌های آن فروپاشی می‌کند (تقلیل می‌یابد). این فرایند را به‌طور سمبلیک به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\hat{Q}]{\text{اندازه‌گیری}} |q_n\rangle \quad (\text{ب-۴})$$

قبل از اندازه‌گیری، مقدار مشاهده‌پذیر وابسته به عملگر $\hat{Q}$ در سیستمی که با بردار حالت $|\psi\rangle$ توصیف می‌شود، واقعاً نامعین است. مسئله صرفاً این نیست که مانند مورد مکانیک آماری، مقدار مشاهده‌پذیر را با احتمالی که توسط ب-۳ داده می‌شود بدانیم، بلکه اصولاً نمی‌توان مقادیر معینی به مشاهده‌پذیرهای سیستم‌هایی که در حالت برهم‌نهی قرار دارند، منتسب کرد بدون اینکه با مشاهدات تجربی در تناقض نباشند. فرایندهای تقلیل حالت، سیستم را به یک ویژه‌حالت مشاهده‌پذیر می‌برد و اندازه‌گیری‌های بعد آن مشاهده‌پذیر سیستم را در همان حالت نگه می‌دارد. معادلهٔ شرودینگر دینامیک تقلیل حالت را توصیف نمی‌کند. برهم‌کنش آشکارساز با ذره‌ای که حالت آن را اندازه‌گیری می‌کنیم، ممکن است ذره را نابود کند. به‌عنوان مثال، وقتی یک آشکارساز فوتونی «علامت» می‌دهد، این اتفاق می‌افتد؛ زیرا فوتون بر اثر این فرایند نابود (جذب) شده است.

گاهی می‌توان آزمایش‌هایی را ترتیب داد که اندازه‌گیری‌های گزینشی انجام دهند. این اندازه‌گیری‌ها تصویرسازی فون‌نویمن نامیده می‌شوند. در فصل ۹ این کتاب وقتی از فیلترهای قطبش استفاده کردیم و در فصل ۱۰ وقتی میدان یونش در زمینهٔ الکترودینامیک کوانتومی کاواک را مورد استفاده قرار دادیم، این نوع اندازه‌گیری‌ها را به کار بردیم. برای یک اندازه‌گیری تصویری روی یکی از ویژه‌حالت‌های $|q_n\rangle$ لازم است دیگر ویژه‌حالت‌های آن عملگر فیلتر شوند. به‌طور ریاضی، می‌توان این تصویر کردن را به‌صورت $\hat{P}(q_n)|\psi\rangle$ نشان داد که وقتی به‌نجار کنیم، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{تصویری}]{\text{اندازه‌گیری}} |q_n\rangle = \frac{P(q_n)|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{P}(q_n)|\psi\rangle^{1/2}} \quad (\text{ب-۵})$$

لزومی ندارد فیلتر کردن روی یک ویژه‌حالت $\hat{Q}$ باشد. فرض کنید به‌نحوی بتوانیم سیستم را طوری فیلتر کنیم که حالت برهم‌نهی $|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|q_1\rangle + |q_2\rangle)$ را اندازه‌گیری کند. عملگر تصویری وابسته به این حالت $|\psi_s\rangle$ است و تصویر زیر را داریم:

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{تصویری روی } |\psi_s\rangle]{\text{اندازه‌گیری}} e^{i\varphi} |\psi_s\rangle = \frac{\hat{P}_s |\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{P}_s|\psi\rangle^{1/2}} \quad (\text{ب-۶})$$

که $\langle\psi|\hat{P}_s|\psi\rangle = (|c_1 + c_2|^2)/2$ و $\hat{P}_s|\psi\rangle = |\psi_s\rangle \langle\psi_s|\psi\rangle = |\psi_s\rangle (|c_1 + c_2|e^{i\varphi})/\sqrt{2}$ و φ یک ضریب فاز کلی است که اهمیتی ندارد.

به‌عنوان یک مثال مشخص، یک فوتون را در حالت قطبش

$$|\theta\rangle = |H\rangle \cos \theta + |V\rangle \sin \theta \quad (\text{ب-۷})$$

در نظر بگیرید که در آن از قرارداد فصل ۹ استفاده کرده‌ایم. اگر یک فیلتر پلاروید در مسیر باریکه طوری قرار گیرد که در راستای افقی (عمودی) باشد، بردار حالت (ب-۷) به $|H\rangle$ ($|V\rangle$) تقلیل می‌یابد. از طرف دیگر، اگر بخواهیم آن را با قرار دادن فیلتر در راستای

$$|\theta^\perp\rangle = -|H\rangle \sin \theta + |V\rangle \cos \theta, \quad (\text{ب-۸})$$

تصویر کنیم که در آن $\theta^\perp = \theta + \pi/2$ است، مشاهده خواهیم کرد که هیچ فوتونی از آن عبور نخواهد کرد، $\langle \theta^\perp | \theta \rangle = 0$. اما اگر فیلتر را در امتداد ϑ نسبت به محور افقی قرار دهیم، فوتون به حالت قطبش

$$|\vartheta\rangle = |H\rangle \cos \vartheta + |V\rangle \sin \vartheta, \quad (\text{ب-۹})$$

تصویر خواهد شد.

حال به مورد حالت‌های دو مؤدی می‌پردازیم. اگر این دو مد را با برچسب‌های ۱ و ۲ مشخص کنیم، یک حالت دو مؤدی عام می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |q_n\rangle_1 |s_m\rangle_2, \quad (\text{ب-۱۰})$$

که در آن حالت‌های $|q_n\rangle_1$ ویژه حالت‌های $\hat{Q}_1$ که در فضای مد ۱ تعریف شده است و حالت‌های $|s_m\rangle_2$ ویژه حالت‌های یک عملگر دیگر $\hat{S}_2$ که در فضای هیلبرت مد ۲ تعریف شده است، هستند. انتخاب معین، ضرایب c_{nm} حالت را به یک حالت درهم‌تنیده تبدیل خواهند کرد. در هر مورد یک اندازه‌گیری بدون فیلتر مشاهده‌پذیرهای $\hat{Q}_1$ و $\hat{S}_2$ بردار حالت را به صورت زیر در خواهد آورد:

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\hat{S}_2 \text{ و } \hat{Q}_1]{\text{اندازه گیری}} |q_n\rangle_1 |s_m\rangle_2, \quad (\text{ب-۱۱})$$

در حالی که مثلاً یک اندازه‌گیری تصویری روی $|q_n\rangle_1$ بردار حالت ب-۱۰ را به صورت زیر درمی‌آورد:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle \xrightarrow[|q_n\rangle_1]{\text{تصویر روی}} |\psi, q_n\rangle &= \frac{\hat{P}_1(q_n)|\psi\rangle}{\langle \psi | \hat{P}_1(q_n) | \psi \rangle^{1/2}} \\ &= |q_n\rangle_1 \frac{\sum_m c_{nm} |s_m\rangle}{\sum_m |c_{nm}|^2}. \end{aligned} \quad (\text{ب-۱۲})$$

چه درهم‌تنیدگی وجود داشته باشد و چه وجود نداشته باشد، این تصویرسازی و همچنین تصویرسازی‌های عام از نوعی که در بالا آورده‌ایم، برقرارند. توجه کنید که اگر حالت اولیه درهم‌تنیده باشد، اندازه‌گیری تصویری یک حالت تجزیه‌شده تولید می‌کند. به عنوان مثال، حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1|V\rangle_2 - |V\rangle_1|H\rangle_2), \quad (\text{ب-۱۳})$$

که یکی از حالت‌های بل است. فرض کنید در مد ۱ یک فیلتر پلاروید تحت زاویه $\pi/4$ نسبت به افق قرار داده شود. این عمل باعث تصویر روی حالت

$$|\pi/4\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle_1 + |V\rangle_1) \quad (\text{ب-۱۴})$$

در آن مد می‌شود و بردار حالت اولیه به بردار حالت زیر تبدیل می‌گردد:

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{روی } |\pi/4\rangle]{\text{تصویر}} \frac{\hat{P}_1(\pi/4)|\psi\rangle}{\langle\psi|\hat{P}_1(\pi/4)|\psi\rangle^{1/2}} = |\pi/4\rangle_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_2 - |H\rangle_2). \quad (\text{ب-۱۵})$$

توجه کنید که اندازه‌گیری تصویری یک بخش از یک سیستم درهم‌تنیده، قسمت دیگر را به یک حالت به‌خصوص که کاملاً قابل‌پیش‌بینی است، می‌برد. هم‌بستگی‌هایی که توسط این تصویرسازی بروز می‌کنند، دارای ماهیت غیر کلاسیکی بالایی اند و در نهایت، همان‌طوری که در فصل ۹ آمده است، مسئول نقض نامساوی بل هستند.

کتاب‌شناسی

مباحث بسیار جالب درباره‌ی مطالب این پیوست را می‌توان در کتاب زیر یافت:

- Isham, *Lectures on Quantum Theory* (London: Imperial College Press, 1995).

مراجع زیر نیز مفیدند:

- Gottfried, K. *Quantum Mechanics Volume I: Fundamentals* (Reading: Addison-Wesley, (1989), chapter IV J

- von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton: Princeton University Press, 1955), especially chapter VI.

پیوست «ج»

روش به دست آوردن هامیلتونی مؤثر برای برهم کنش‌های پراکنده^۱ (دور از تشدید)

در اینجا هامیلتونی مؤثر برای برهم کنش‌هایی را که در آن‌ها واکوکی بالایی بین فرکانس‌های مربوط وجود دارد، به دست می‌آوریم. برای اینکه بحث تاحدودی کلی باشد، با هامیلتونی کل به صورت زیر شروع می‌کنیم:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (\text{ج-۱})$$

که در آن $\hat{H}_0$ هامیلتونی آزاد و $\hat{H}_1$ هامیلتونی برهم کنش است. هامیلتونی برهم کنش را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\hat{H}_1 = \hbar g (\hat{A} + \hat{A}^\dagger), \quad (\text{ج-۲})$$

که در آن $\hat{A}$ معرف حاصل ضرب عملگرهایی است که برهم کنش را توصیف می‌کنند و g ثابت پیوندی است. فرض می‌کنیم عملگر حاصل ضرب $\hat{A}$ به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد. در مورد برهم کنش‌های اتم-میدان $\hat{A} = \hat{a}\hat{\sigma}_+$ و $\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_0\frac{\hat{\sigma}_3}{2}$ است. این مورد، به خصوص توسط اشنایدر^۲ و همکاران [۱] بررسی شده است. معادله وابسته به زمان شرودینگر در تصویر شرودینگر (SP) عبارت است از

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_{\text{SP}}(t)\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{H}_1) |\psi_{\text{SP}}(t)\rangle \quad (\text{ج-۳})$$

که در آن $|\psi_{\text{SP}}(t)\rangle$ بردار حالت در آن تصویر است.

حال با استفاده از هامیلتونی آزاد و عملگر $\hat{U}_0 = \exp(-i\hat{H}_0 t/\hbar)$ به تصویر برهم کنش (IP) می‌رویم [۲]. بردار حالت در IP به صورت زیر است:

1. dispersive

2. Schneider

$$|\psi_{IP}(t)\rangle = \hat{U}_0^{-1} |\psi_{SP}(t)\rangle \quad (۴-ج)$$

و معادله شرو دینگر به صورت زیر درمی آید:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_{IP}(t)\rangle = \hat{H}_{IP}(t) |\psi_{IP}(t)\rangle, \quad (۵-ج)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \hat{H}_{IP}(t) &= \hat{U}_0^{-1} \hat{H} \hat{U}_0 - i\hbar \hat{U}_0^{-1} \frac{d\hat{U}_0}{dt} \\ &= \hbar g(\hat{A}e^{i\Delta t} + \hat{A}^\dagger e^{-i\Delta t}), \end{aligned} \quad (۶-ج)$$

و Δ واکوکی است که شکل آن به $\hat{A}$ بستگی دارد. برای برهم کنش اتم-میدان داریم $\Delta = \omega_0 - \omega$. به مفهومی که در زیر توضیح خواهیم داد، این واکوکی را بزرگ فرض می کنیم. جواب معادله ج-۵ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_{IP}(t)\rangle = \hat{T} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_{IP}(t') \right) \right] |\psi_{IP}(0)\rangle, \quad (۷-ج)$$

که در آن $|\psi_{IP}(0)\rangle = |\psi_{SP}(0)\rangle$ و $\hat{T}$ عملگر مرتب کننده زمانی^۱ است. با بسط اختلالی زیر داریم:

$$\begin{aligned} &\hat{T} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_{IP}(t') \right) \right] \\ &= \hat{T} \left[\hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_{IP}(t') - \frac{1}{2\hbar^2} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \hat{H}_{IP}(t') \hat{H}_{IP}(t'') + \dots \right] \\ &= \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_{IP}(t') - \frac{1}{2\hbar^2} \hat{T} \left[\int_0^t dt' \int_0^t dt'' \hat{H}_{IP}(t') \hat{H}_{IP}(t'') \right] + \dots \end{aligned} \quad (۸-ج)$$

جمله آخر وقتی به طور زمانی مرتب شود، به صورت زیر درمی آید:

$$\hat{T} \left[\int_0^t dt' \int_0^t dt'' \hat{H}_{IP}(t') \hat{H}_{IP}(t'') \right] = 2 \int_0^t dt' \hat{H}_{IP}(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{H}_{IP}(t''). \quad (۹-ج)$$

که از جمله دوم در ج-۸ داریم:

1. Time ordering operator

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \hat{H}_{\text{IP}}(t') &= \hbar g \left[\hat{A} \frac{e^{i\Delta t'}}{i\Delta} \Big|_0^t - \hat{A}^\dagger \frac{e^{-i\Delta t'}}{i\Delta} \Big|_0^t \right] \\ &= \frac{\hbar g}{i\Delta} [\hat{A}(e^{i\Delta t} - 1) - \hat{A}^\dagger(e^{-i\Delta t} - 1)]. \end{aligned} \quad (\text{ج-۱۰})$$

در این صورت، جمله مرتبه دوم به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \hat{H}_{\text{IP}}(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{H}_{\text{IP}}(t'') &= \frac{\hbar^2 g^2}{i\Delta} \int_0^t dt' [\hat{A}^2 e^{2i\Delta t'} - \hat{A}^2 e^{i\Delta t'} \\ &\quad - \hat{A}^{\dagger 2} e^{-2i\Delta t'} + \hat{A}^{\dagger 2} e^{-i\Delta t'} + \hat{A}^\dagger \hat{A}(1 - e^{-i\Delta t}) - \hat{A} \hat{A}^\dagger(1 - e^{i\Delta t})]. \end{aligned} \quad (\text{ج-۱۱})$$

انتگرال گیری به جملاتی منجر خواهد شد که مانند g^2/Δ^2 رفتار می کنند که در صورت واکوکی بزرگ، کوچک خواهند بود. از این جملات صرف نظر می کنیم. این تقریب، تقریب موج چرخان است؛ زیرا این جملات به سرعت نوسان می کنند و میانگین آن‌ها صفر می شود. آنچه باقی می ماند عبارت است از

$$\int_0^t dt' \hat{H}_{\text{IP}}(t') \int_0^{t'} dt'' \hat{H}_{\text{IP}}(t'') \approx \frac{i\hbar^2 g^2 t}{\Delta} [\hat{A}, \hat{A}^\dagger]. \quad (\text{ج-۱۲})$$

بنابراین تا مرتبه دوم داریم:

$$\begin{aligned} \hat{T} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_{\text{IP}}(t') \right) \right] &\approx \hat{1} - \frac{g}{\Delta} [\hat{A}(e^{i\Delta t} - 1) - \hat{A}^\dagger(e^{-i\Delta t} - 1)] \\ &\quad - \frac{i g^2 t}{\Delta} [\hat{A}, \hat{A}^\dagger]. \end{aligned} \quad (\text{ج-۱۳})$$

اگر «برانگیختگی» متوسط $\langle \hat{A} \rangle \approx \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle^{1/2}$ خیلی بزرگ نباشد و اگر داشته باشیم:

$$\left| \frac{g}{\Delta} \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle^{1/2} \right| \ll 1, \quad (\text{ج-۱۴})$$

که به خاطر واکوکی، بزرگ فرض می شود، از جمله دوم (ج-۱۳) می توان صرف نظر کرد و بنابراین داریم:

$$\hat{T} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}_{\text{IP}}(t') \right) \right] \approx \hat{1} - \frac{i}{\hbar} t \hat{H}_{\text{eff}} \quad (\text{ج-۱۵})$$

که در آن

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hbar g^2}{\Delta} [\hat{A}, \hat{A}^\dagger]. \quad (\text{ج-۱۶})$$

برای برهم کنش جیتز-کامینگز، $\hat{A} = \hat{a}\hat{\sigma}_+$ است و بنابراین

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_3. \quad (\text{ج-۱۷})$$

بنابراین هامیلتونی مؤثر در این صورت عبارت است از

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar\chi(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\sigma}_3), \quad (\text{ج-۱۸})$$

که در آن $\chi = g^2/\Delta$ که با عبارت داده شده در ۴-۱۸۴ در توافقی است. جمله $\hbar\chi\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$ که حتی در غیاب فوتون‌ها وجود دارد، نوعی اثر کر اتمی ناشی از کاواک است و به انتقال انرژی در حالت اتمی برانگیخته برهنه $|e\rangle$ منجر می‌شود.

بالاخره به عنوان یک مثال دیگر، فرض کنید می‌خواهیم مورد مبدل فروافتی پارامتری تبه‌کن را با میدان پمپ کوانتیده در نظر بگیریم. هامیلتونی کل برای این فرایند در معادله ۷-۸۴ داده شده است. با نمادگذاری ما در اینجا، $\hat{H}_0 = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_p\hat{b}^\dagger\hat{b}$ که در آن ω_p فرکانس پمپ و $\hat{A} = i\hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}$ با $g = \chi^{(2)}$ است. در این صورت، برهم کنش مؤثر برای واکوکی بزرگ عبارت است از

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{\hbar[\chi^{(2)}]^2}{\Delta}(4\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} + 2\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2), \quad (\text{ج-۱۹})$$

که در آن $\Delta = 2\omega - \omega_p$ شکل پراکنده برهم کنش یک جمله کرمانند $(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2)$ ، یک جمله شبه کراس کر^۱ $(4\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b})$ و یک جمله «کشش فرکانس»^۲ $(2\hat{b}^\dagger\hat{b})$ است. بنابراین در مورد واکوکی بزرگ بین میدان‌های پمپ و سیگنال، مبدل فروافتی پارامتری شبیه یک محیط کر است. کلیموف^۳ و همکاران [۳] چنین برهم کنش‌هایی را بررسی کرده و با استفاده از روش‌های جبر لی به هامیلتونی مؤثر رسیده‌اند.

مراجع

- [1] Schneider, S. Herkommer, A. M. Leonhardt, U. and W. Schleich, W. (1997). *J. Mod. Opt.*, **44**, 2333.
 [2] See, for example, Sakurai, J. J. (1967). *Advanced Quantum Mechanics* (Reading: Addison-Wesley); see chapter 4.
 [3] See Klimov, A. B. S´anchez-Soto, L. L. and Delgado, J. (2001). *Opt. Commun.*, **191**, 419, and references therein.

پیوست «د»

اپتیک غیر خطی و تبدیل فروافتی پارامتری خودبه خودی

تبدیل فروافتی از برهم کنش غیر خطی تابش پمپ با محیط حاصل می شود که در آن قطبش القایی آن قدر قوی تحت تأثیر تابش قرار می گیرد که فراتر از پاسخ خطی که باشندگی معمولی و جذب را تولید می کند، تغییر شکل می دهد. در اینجا می توان قطبش غیر خطی را به صورت سری نسبت به میدان تابشی اعمال شده بسط داد. بلورهای متداول در اپتیک غیر خطی فوق العاده ناهمسان گرد هستند و پاسخ آن ها به شکل تانسوری توصیف می شود.

$$\hat{P}_i = \chi_{i,j}^{(1)} \hat{E}_j + \chi_{i,j,k}^{(2)} \hat{E}_j \hat{E}_k + \chi_{i,j,k,l}^{(3)} \hat{E}_j \hat{E}_k \hat{E}_l + \dots \quad (1-د)$$

که در آن $\chi^{(m)}$ تانسور مرتبه m پذیرفتاری الکتریکی [۱] است و قرارداد جمع بندی روی اندیس های تکراری برقرار است. در این صورت، چگالی انرژی $\epsilon_0 E_i P_i$ است و بنابراین مشارکت مرتبه دوم در هامیلتونی، هامیلتونی برهم کنش، عبارت است از

$$\hat{H}^{(2)} = \epsilon_0 \int_V d^3 \mathbf{r} \chi_{i,j,k}^{(2)} \hat{E}_i \hat{E}_j \hat{E}_k, \quad (2-د)$$

که در آن انتگرال گیری روی حجم برهم کنش است. حال مؤلفه های میدان ها را به صورت انتگرال های فوریه نمایش می دهیم.

$$\hat{E}(\mathbf{r}, t) = \int d^3 \mathbf{k} \left[\hat{E}^{(-)}(\mathbf{k}) e^{-i[\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]} + \hat{E}^{(+)}(\mathbf{k}) e^{i[\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]} \right], \quad (3-د)$$

که در آن

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{k}) = i \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega(\mathbf{k})}{V}} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}), \text{ and } \hat{E}^{(+)}(\mathbf{k}) = i \sqrt{\frac{2\pi \hbar \omega(\mathbf{k})}{V}} \hat{a}(\mathbf{k}). \quad (4-د)$$

عملگرهای $\hat{a}(k)$ و $\hat{a}^\dagger(k)$ به ترتیب عملگرهای نابودی و خلق فوتون با تکانه $\hbar k$ هستند^۱. اگر عبارت‌های میدان در بالا را در معادله د-۲ قرار دهیم و تنها جملاتی را که برای موردی که در آن مدهای سیگنال و غیرفعال ابتدا در حالت‌های خلأ هستند نگه داریم، هامیلتونی برهم کنش زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) = \varepsilon_0 \int_V d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{k}_s d^3\mathbf{k}_i \chi_{lmn}^{(2)} \\ \times \hat{E}_{pl}^{(+)} e^{i[\omega_p(\mathbf{k}_p)t - \mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}]} \hat{E}_{sm}^{(-)} e^{-i[\omega_s(\mathbf{k}_s)t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}]} \hat{E}_{in}^{(-)} e^{-i[\omega_i(\mathbf{k}_i)t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}]} + H.c. \end{aligned} \quad (5-د)$$

آهنگ‌های تبدیل برای این فرایند به پذیرفتاری مرتبه دو یا الکتریکی $\chi^{(2)}$ بستگی دارد، اما معمولاً در حدود 10^{-7} تا 10^{-11} کارایی دارد که بسیار پایین است. به این دلیل برای کسب خروجی قابل ملاحظه در باریکه‌های سیگنال و غیرفعال لازم است ماده را با یک میدان همدوس بسیار قوی پمپ کنیم که در این صورت می‌توانیم مدل را به عنوان میدان کلاسیکی در نظر بگیریم که وقتی برهم کنش‌های با زمان کوتاه موردنظرمان باشد، از یک لیزر به دست می‌آید، به طوری که از کاهش فوتون‌های پمپ شده می‌توان صرف نظر کرد. لیزر پمپ شده معمولاً فرابنفش است، در حالی که فوتون‌های حاصل تبدیل فروافتی معمولاً در قسمت مرئی طیف قرار دارند.

برای استفاده از نظریه اختلال وابسته به زمان، با فرض اینکه حالت‌های اولیه مدهای سیگنال و غیرفعال در حالت‌های خلأ هستند که می‌توان آن‌ها را با $|\Psi_0\rangle$ نشان داد، تا مرتبه اول به دست می‌آوریم $|\Psi\rangle \approx |\Psi_0(0)\rangle + |\Psi_1(0)\rangle$ که در آن [۲]

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= -\frac{i}{\hbar} \int dt \hat{H}(t) |\Psi_0\rangle \\ &= \mathcal{N} \int d^3\mathbf{k}_s d^3\mathbf{k}_i \delta(\omega_p - \omega_s(\mathbf{k}_s) - \omega_i(\mathbf{k}_i)) \\ &\quad \times \delta^{(3)}(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_i) |\Psi_0\rangle, \end{aligned} \quad (6-د)$$

که در آن $\mathcal{N}$ ضریب بهنجارش است که شامل تمام ثابت‌هاست. مشاهده می‌کنیم که توابع دلتا شامل همخوانی فاز هم می‌شود.

$$\begin{aligned} \omega_p &= \omega_s + \omega_i, \\ \mathbf{k}_p &= \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \end{aligned} \quad (7-د)$$

در مورد همخوانی نوع I فاز، به حالت معادله ۹-۹ می‌رسیم با فرض تکانه‌های مشخصی که می‌توانند با قرار دادن پرده‌ای (که بر روی آن شکاف‌هایی بر روی خروجی مبدل فروافتی تعبیه شده‌اند) پساندازه‌گیری شوند.

مراجع

- [1] See Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear Optics*, 2nd edition (New York: Academic Press).
[2] See Shih, Y. (2003). *Rep. Prog. Phys.*, 66, 1009.

۱. روابط جابه‌جایی این عملگرها، وقتی بر دارموج پیوسته باشد به صورت $[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ است.

نمایه

اطلاعات کوانتومی، ۱۰، ۱۴، ۱۶، ۲۰، ۲۲۳، ۳۰۷، ۳۱۲، ۳۲۸، ۳۴۲	آزمایش «کدام مسیر»، ۱۶۳
افت‌وخیزهای خلأ، ۳۰، ۴۵، ۴۶، ۶۳، ۶۶، ۷۷، ۹۲، ۱۶۵، ۲۸۳	آزمایش فرانسون، ۲۷۴، ۲۷۲، ۲۵۰
افت‌وخیزهای میدان کوانتومی، ۲۶	آشکارساز فوتونی، ۱۴۵، ۱۴۷، ۲۵۹، ۲۶۶، ۲۷۳
الگوریتم جست‌وجوی گراور، ۳۳۳	۳۵۶، ۲۷۴
الگوریتم شور، ۳۳۳	آشکارسازی جذبی، ۱۵۶
الگوریتم کوانتومی، ۱۹، ۳۲۰، ۳۳۲	آشکارسازی فوتون، ۱۶، ۱۷، ۱۵۷، ۱۶۳، ۲۰۵، ۲۱۴
الگوریتم متقارن، ۳۱۶	آشوبی، ۱۴۴، ۱۵۵، ۳۲۰
الگوریتم‌ها، ۳۰۷	آمار زیرپواسونی، ۱۵۸، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶
الگوریتم‌های جبرگرایانه، ۳۲۰	آمار فوتونی، ۱۶، ۱۷، ۱۹۳، ۲۰۳، ۲۰۹، ۲۱۹، ۲۲۶
الگوهای پالسی، ۲۳۵	۲۳۵
انتقال استارک، ۱۲۴، ۱۳۶، ۲۸۹	آنتروپی فون‌نویمن، ۱۳۲، ۱۳۴، ۱۳۷، ۲۲۱، ۲۲۲
انتقال لم، ۴۶	۳۵۱، ۳۴۹، ۳۴۳، ۲۲۸
اندازه‌گیری غیرمخرب، ۲۹۷، ۲۹۸	آنسامبل، ۴۱، ۷۹، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰
اندازه‌گیری فاز، ۱۷۶، ۱۸۰، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۳۹	۳۵۳، ۳۴۶، ۳۴۴
انرژی نقطه صفر، ۲۸، ۴۵، ۴۶، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۳۰۲	آنسامبل کانونیک، ۴۱
اینشتین، پادولسکی و روزن، ۲۶۸	آهنگ گذار، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۶، ۲۴۱، ۲۸۴
باریکه‌های غیرفعال، ۲۶۰، ۲۶۲	آهنگ گسیل، ۱۸، ۱۰۵، ۱۰۷، ۲۰۶، ۲۳۶، ۲۸۱
باریکه سیگنال، ۲۵۱، ۲۷۵	۲۸۷، ۲۸۴، ۲۸۳
بازبهنجارش، ۱۵	اتم ریدبرگ، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۸، ۲۹۸
باند جانبی، ۳۰۱، ۳۰۲	اثر بوهم-آهارنوف، ۱۷۵
برآورد فاز، ۵۸	اثر خوشه‌ای، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۶۲
بردار بلاخ، ۱۳۴، ۱۳۷، ۳۴۷، ۳۴۸	اثر کاسیمیر، ۴۶، ۴۸، ۶۰
برهم‌کنش پاشنده، ۱۲۹، ۱۳۱	اثرات فوق‌نوری، ۲۵۰
برهم‌کنش دوقطبی، ۱۴۵	احیای جزئی، ۲۳۱
	ارتباط علی، ۲۴۹
	اصل طرد پاولی، ۱۷۰

- برهم‌نهی‌های کوانتومی و درهم‌تنیدگی به توازی
کوانتومی، ۱۸
بیش کامل، ۷۴
پادگروهی، ۱۷، ۱۵۸، ۱۸۱، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶
پادگروهی شدن فوتون، ۱۵۸، ۲۰۵، ۲۰۶
پادرنمال مرتب، ۸۲، ۸۷، ۱۹۸
پادهم‌بسته، ۱۶۳، ۲۷۳
پارامتر Q، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۱۰
پارامتر لمب-دیک، ۳۰۰
پاک‌کن کوانتومی، ۲۵۰، ۲۵۷، ۲۵۸
پالس‌های π ، ۱۱۲
پالس‌های $\pi/2$ ، ۲۹۳
پد یک‌بار مصرف، ۳۱۸
پردازش اطلاعات کوانتومی، ۲۰، ۱۸۹، ۳۰۷، ۳۰۸
پرش‌های کوانتومی، ۲۳۲، ۲۳۴، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۴۲
پروتکل BB84، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵
پروتکل اِکِرِت، ۳۲۵
پسانتخاب، ۲۵۲، ۲۵۴
پیچیدگی ریاضیاتی، ۳۰۷
پیمانه عرضی، ۳۵
پیمانه کولن، ۱۵، ۳۲، ۳۵، ۹۷
تابش جسم سیاه، ۱۴، ۲۸۳، ۲۸۴
تابش جسم سیاه و اثر فوتوالکتریک، ۱۴
تابع پارش، ۴۱
تابع گلوبر-سودارشان، ۷۹
تابع مشخصه، ۸۶، ۲۴۴
تابع موج گاوسی، ۶۹
تابع وایل-مرتب، ۸۵
تابع ویگنر، ۸۴، ۸۵، ۸۸، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۱۹۸
۲۱۱، ۲۱۲، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۳۹، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۷
تابع همدوسی متقابل، ۱۴۱
تبدیل تقسیم‌کننده باریکه، ۱۷۷، ۳۳۴
تبدیل فروافتی پارامتری تبه‌گن، ۱۹۸
تبدیلات پیمانه‌ای، ۹۶
تبدیلات یکانی، ۱۵، ۱۸، ۳۲۹
تجزیه اشمیت، ۱۳۲، ۱۳۴، ۲۲۱، ۳۴۳، ۳۴۹، ۳۵۰
۳۵۱، ۳۵۲
تحقق منفرد، ۲۳۲
تحول زمانی شرطی، ۲۳۲
تداخل کوانتومی، ۲۱۰، ۲۵۸، ۲۶۳، ۳۱۹، ۳۳۸
تداخل یانگ، ۱۳۹، ۱۴۶، ۱۴۹
تداخل سنج، ۱۷۲، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۸، ۲۱۴، ۲۱۵
۲۲۸، ۲۵۶، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۷۲
۲۷۳، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۲۴، ۳۲۶، ۳۳۶، ۳۳۹
تداخل سنجی هونگ-او-مندل، ۲۵۵
ترابرد، ۳۱۴، ۳۱۵
تشدید فلورسانس، ۲۳۳
تصحیح خطای کوانتومی، ۳۳۸
تعادل اپتیکی، ۲۴۴، ۲۴۵
تعبیر استاندارد کپنهاکی، ۲۵۰
تقریب اولیر، ۲۳۸
تقریب بورن-مارکوف، ۲۳۲
تقریب پارامتری، ۱۹۹، ۲۲۲، ۲۲۸، ۲۵۲
تقریب دوقطبی، ۹۷، ۹۸، ۱۰۴، ۱۴۵
تقریب موج چرخان، ۹۵، ۱۰۶، ۳۰۱، ۳۶۱
تقسیم‌کننده باریکه، ۱۵۳، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶
۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴
۱۷۷، ۱۷۸، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰
۲۶۱، ۲۶۴، ۲۷۶، ۲۹۴، ۳۱۰، ۳۱۲، ۳۲۱، ۳۳۴
۳۳۶
تکانه کانونیک، ۲۴
تله‌های تک‌یونی، ۲۳۳
تناوب‌های روشن و تاریک، ۲۳۵
توابع تام، ۷۴
توزیع پواسون، ۶۵، ۱۵۸، ۱۹۷، ۲۱۰

- توزیع شبه‌احتمال، ۸۴، ۱۹۷
- توزیع فازی، ۵۷، ۵۸، ۶۱
- توزیع کلید کوانتومی، ۳۲۱، ۳۲۲
- توزیع ملایم‌شده، ۸۲
- توموگرافی حالت کوانتومی، ۹۱، ۹۴
- تونل‌زنی فوق‌نوری فوتون‌ها، ۲۶۳، ۲۶۴
- ثبات، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۲، ۳۳۸، ۳۳۹
- جبر اسپینی پاولی، ۱۱۳
- جسم سیاه، ۴۱، ۱۰۸
- جمله اتلافی، ۲۳۱، ۲۴۵، ۳۰۲
- چگالش بوز-اینشتین، ۱۷۰
- چگالی انرژی جسم سیاه، ۲۸۳
- حالت خلأ فشرده، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۹۰، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۸، ۲۰۰، ۲۱۳، ۲۱۷، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸
- حالت عددی، ۶۱، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۴۶، ۲۴۷
- حالت گرمایی، ۶۰، ۸۸، ۱۲۵، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۴۹، ۱۵۷، ۱۹۴
- حالت همدوس دوفوتونی، ۱۸۴
- حالت‌های برهنه، ۱۲۴، ۱۲۵
- حالت‌های بل، ۲۶۵، ۲۹۲، ۳۰۹، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۴۳، ۳۵۸
- حالت‌های پوشیده، ۱۲۲، ۱۲۴، ۱۳۵، ۱۳۶
- حالت‌های خالص، ۱۲۵، ۱۳۴، ۱۸۱، ۱۹۳، ۱۹۸، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۷
- حالت‌های خلأ فشرده دوّمی، ۲۱۶، ۲۲۳، ۲۲۸
- حالت‌های مخلوط، ۳۴۴، ۳۴۷
- حالت‌های هلالی، ۲۰۴
- حالت‌های همدوس، ۱۰، ۱۴، ۱۷، ۲۰، ۲۲، ۵۸، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۷۰، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۳، ۸۹، ۹۳، ۹۵، ۱۳۰، ۱۵۲، ۱۵۹، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۸۴، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۸، ۲۰۵، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۲، ۲۱۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۴۳، ۲۴۴
- ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۷۹، ۲۹۰، ۲۹۵، ۲۹۷، ۳۰۳
- حالت‌های همدوس اتمی، ۳۰۳
- حالت‌های یورک-استولر، ۲۱۰، ۲۱۴، ۲۱۶، ۲۲۷
- حدّ رالی-جینز، ۲۸۳
- خنک کردن لیزری، ۲۹۸، ۳۳۷
- خنک‌کنندگی لیزری، ۲۳۳
- خودانرژی، ۱۵
- خودهم‌بستگی، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴
- خوشه‌ای، ۱۶، ۱۶۲، ۲۰۵
- درهم‌تنیده ماکزیمال، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۳۹
- دوربری، ۱۳، ۱۹، ۲۲۳، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۲۸، ۳۴۰
- دوربری کوانتومی، ۱۹، ۲۲۳، ۳۱۲، ۳۱۵، ۳۲۸
- دوپیچ، ۱۸، ۳۳۲، ۳۳۳
- دینامیک تلگراف، ۲۳۹
- دینامیک گسیل خودبه‌خودی، ۱۵
- رابطه نیمه‌گروه، ۶۸
- رمزگذاری سزار، ۳۱۷
- رمز ورنام، ۳۱۸
- رمزنگاری، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۸، ۱۹، ۳۰۷، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۸، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۵، ۳۲۸، ۳۴۱
- رمزنگاری کوانتومی، ۱۰، ۱۳، ۱۴، ۱۸، ۱۹، ۳۱۵، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۵
- روابط جابه‌جایی تکانه زاویه‌ای، ۱۷۷
- زمان واهلش کاواک، ۲۸۵
- زمان همدوسی، ۱۳۹، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۵۳، ۲۳۲
- زنش، ۲۳۱
- زیرآسمبل، ۲۳۲
- سیگنال، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۳۴، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۶۱، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۷۲، ۲۷۳، ۳۶۲، ۳۶۴
- شبه‌احتمال، ۸۴، ۸۷
- شبیه توزیع فضای فاز، ۷۹

۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۶۰، ۲۶۵، ۲۶۷، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۸، ۳۶۳، ۳۶۴	شکست دوگانه، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۶۶
فروپاشی و احیا، ۱۱۹، ۱۳۵، ۱۳۷، ۲۹۰، ۳۰۲	شیب‌دهی الکترونی، ۱۹
فشردگی، ۱۰، ۱۴، ۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۳، ۱۹۷، ۱۹۸، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۱۷، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹	طول اپتیکی، ۱۴۰
فشردگی دامنه، ۲۰۳، ۲۰۴	طول همدوسی، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۵۳
فضای سگال - بارگمن، ۷۴	عملگر تربیع، ۶۳، ۶۹، ۷۶، ۱۸۳، ۱۸۵، ۲۰۱، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۷
فضای فاز، ۱۰، ۱۴، ۱۷، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۹۰، ۹۱، ۱۳۰، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۹۷، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۸، ۲۱۲، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۵۳	عملگر تصویری، ۵۵، ۱۷۱، ۱۷۷، ۲۶۳، ۳۴۰، ۳۴۴، ۳۵۵، ۳۵۶
فلورسانس تشدید، ۱۵، ۱۷، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۳۴، ۲۳۵	عملگر تعداد، ۲۷، ۲۹، ۳۰، ۳۸، ۶۱، ۶۴، ۸۳، ۹۲، ۱۷۲
فلورسنت، ۲۰۷، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲	عملگر چگالی، ۴۱، ۴۲، ۵۷، ۶۰، ۷۹، ۸۳، ۸۴، ۸۸، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۳۳، ۱۳۷، ۱۴۶، ۱۶۷، ۲۰۹، ۲۱۱، ۲۲۱، ۲۳۲، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۴۰، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۸۵، ۲۹۵، ۲۹۶، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳
فونون، ۳۰۲	عملگر خلق، ۲۷، ۲۹، ۳۸، ۴۰، ۹۱، ۱۶۶، ۱۸۴، ۲۲۶، ۵۴
قابلیت رؤیت، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۸، ۱۵۰، ۲۷۳	عملگر فشرده دوّمی، ۲۱۷
قاعده انطباق، ۲۵	عملگر مرتب‌کننده زمانی، ۷۱، ۳۶۰
قانون استفان - بولتزمن، ۴۵	عملگر نابودی، ۲۶، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۵۴، ۵۹، ۶۶، ۱۴۵، ۲۰۹، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۵۱
قانون تابش پلانک، ۴۴، ۲۸۳	عملگرهای برهم‌نهی تربیع، ۲۱۷
قانون جابه‌جایی وین، ۴۵	عملگرهای تربیع، ۳۱، ۵۹، ۶۳، ۹۲، ۱۸۲، ۱۸۸، ۱۹۱، ۲۶۸
قانون رالی، ۴۵	عناصر واقعیت، ۲۶۸
قانون مور، ۳۰۸	فاز کوانتومی، ۱۰، ۱۴، ۳۰، ۳۱، ۵۰، ۵۴، ۵۸
قانون واپاشی گاوسی، ۱۲۰	فرانژهای تداخلی، ۱۳۹، ۱۵۰، ۱۵۲، ۱۶۱، ۱۷۳، ۲۱۲، ۲۳۹، ۲۴۴
قانون واپاشی نمایی، ۲۳۱، ۲۳۲	فرانژهای لیپمن، ۱۵
قانون وین، ۴۵	فرایند فروافتی پارامتری غیرتبهگن، ۲۲۲
قضیه بکر - هاسدورف - کمبل، ۵۸	فرضیه ارگودیک، ۱۴۰
قضیه بل، ۲۵۰، ۲۶۵، ۲۶۷	فرکانس رابی، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۹۳، ۳۰۱
قضیه تفکیک، ۶۷، ۸۷	فروافتی، ۱۰، ۱۴، ۱۷، ۱۸، ۱۹۸، ۲۲۳، ۲۲۸، ۲۵۰
قضیه هم‌ارزی اپتیکی، ۸۲، ۸۳	
قطبش، ۲۳، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۴۴، ۴۹، ۱۱۳، ۱۴۶، ۲۲۵	

- گیت منطقی، ۳۲۹، ۳۴۰
- گیت هادامارد، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۴، ۳۴۰
- لم بکر- هاسدورف، ۲۶، ۵۸، ۱۸۴، ۲۱۷
- لیزر رزینهای، ۱۷، ۲۰۷
- ماتریس چگالی، ۱۲۷، ۱۳۴، ۲۳۲، ۲۴۶، ۳۴۵، ۳۴۷
- ۳۴۸
- مانا، ۱۴۲
- میدل فروافتی، ۱۹۹، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲
- ۲۶۵، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۳۶۲، ۳۶۴
- متغیرهای نهان، ۲۴۹، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۳
- محاسبات کوانتومی، ۱۸، ۱۹، ۲۴۶، ۳۰۷، ۳۰۸
- ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۸، ۳۳۲، ۳۳۳
- محرک قوی، ۲۴۱
- مختصات تناوبی، ۵۳
- مخلوط آماری، ۱۶۶، ۱۶۸، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱
- ۲۱۲، ۲۳۹، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۵۹، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶
- ۳۱۵، ۳۳۹، ۳۴۵، ۳۴۶
- مد فرضی، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲
- مدل پاد جینز- کامینگز، ۳۰۱
- مدل جینز- کامینگز، ۱۰، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۹۵، ۱۱۲
- ۱۱۵، ۱۲۲، ۱۲۵، ۱۲۹، ۱۳۲، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶
- ۱۳۷، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۳۱، ۲۷۹، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۲
- ۳۵۲
- مدل رابی، ۹۵، ۱۰۹، ۱۱۲
- مرتبه شده نرمال، ۸۳، ۸۷، ۹۲، ۱۴۶، ۱۸۳، ۲۲۳
- ۲۲۴، ۲۲۷، ۲۴۴
- مسیر کوانتومی، ۲۳۲
- معادلات آهنگ اینشتین، ۲۳۲، ۲۴۰
- معادلات بلاخ، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۴۰، ۲۸۵
- معادلات بلاخ اپتیکی، ۲۳۲
- معادلات ماکسول، ۲۳، ۲۴، ۵۸، ۵۹
- معادله اصلی، ۲۳۳، ۲۳۸، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۷
- ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۹۵، ۳۰۲، ۳۰۳
- ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷
- ۲۶۸، ۲۷۰، ۲۷۲، ۲۸۳، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۲۲، ۳۲۳
- ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۴۷، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۶۳
- قطبش گر خطی، ۲۵۹
- قفسه بندی، ۲۳۹، ۲۴۰
- کانال عمومی، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۳، ۳۲۵
- کاواک QED، ۲۱۶، ۲۷۹، ۲۸۸، ۲۸۹، ۳۰۲، ۳۰۴
- ۳۰۵، ۳۳۴، ۳۳۷
- کاواک میکروویو، ۲۷۹، ۲۸۸
- کوانتش میدان الکترومغناطیسی، ۱۴، ۲۳
- کوانتش میدان تک مدی، ۱۰، ۱۴
- کیوبیت، ۱۸، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۲۲، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷
- ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸
- ۳۳۹، ۳۴۰
- کیوبیت کنترل، ۳۳۰
- کیوبیت هدف، ۳۳۰
- گذار شبه پایدار، ۲۳۳
- گرته پرشی، ۲۳۹
- گرته شرو دینگر، ۱۳، ۹۵، ۱۳۲، ۱۵۹، ۱۸۱، ۲۰۷
- ۲۰۸، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۷۹، ۲۹۲، ۲۹۳
- ۲۹۴، ۳۰۲
- گسیل، ۱۴، ۱۶، ۱۹، ۲۰، ۴۶، ۹۵، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶
- ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۶۲
- ۲۰۷، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۶، ۲۳۸، ۲۴۶
- ۲۶۴، ۲۷۴، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۶، ۲۸۸، ۲۹۱، ۳۰۲
- ۳۲۶
- گسیل القایی، ۱۴، ۱۶، ۱۰۵، ۱۰۸، ۲۳۴، ۲۸۳، ۲۸۴
- گشتاور مغناطیسی غیرعادی، ۱۶
- گیت، ۳۰۷، ۳۱۴، ۳۲۸، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۴
- ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۴۰
- گیت C-NOT، ۳۳۶، ۳۳۷
- گیت تافولی، ۳۴۰
- گیت فردکین، ۳۳۶

واقع‌بینی، ۱۳، ۲۵۰، ۲۶۸	معادله لیوویل، ۳۵۳
واکوکی، ۱۰۱، ۱۰۸، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۲۳، ۱۲۹، ۱۳۵، ۲۳۵، ۲۹۲، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲	مکملیت، ۲۵۹
واهمدوسی، ۱۰، ۱۴، ۱۸، ۲۰۸، ۲۳۱، ۲۴۲، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۵۹، ۲۸۴، ۲۹۲، ۲۹۴، ۲۹۶، ۲۹۷، ۳۰۴، ۳۲۸، ۳۳۸، ۳۳۹	موضعیت، ۲۴۹، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۹۲
وفاداری (فیدلیتی)، ۳۳۸	مولد اعداد تصادفی، ۳۲۰
ویژه‌حالت‌های عملگر نابودی، ۶۱، ۶۲	میانگین آنسامبلی، ۱۴۰، ۱۴۶، ۱۵۶
ویژه‌حالت‌های فاز، ۵۴، ۵۶	میدان‌های گرمایی، ۴۱
هم‌بستگی کوانتومی، ۱۵۶، ۱۵۸، ۲۱۹	نامساوی کوشی، ۱۵۴، ۱۵۸، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۲۸
هم‌بستگی کوانتومی مرتبه دو، ۱۵۶	نامساوی‌های بل، ۲۰، ۱۷۵، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۷۱، ۲۷۸
هم‌بسته‌ساز، ۲۵۵	نظریه‌های متغیر نهان موضعی، ۲۷۰
هم‌خوانی فازی، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳	نظریه‌های متغیر نهان غیرموضعی، ۲۵۰
همدوسی، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۴، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۷، ۱۶۸، ۲۰۴، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۳، ۲۳۱، ۲۳۶، ۲۴۴، ۲۴۶، ۲۵۰، ۲۵۹، ۳۴۶، ۳۳۹، ۳۶۰	نظریه‌های واقع‌بینانه موضعی، ۲۴۹
همدوسی اپتیکی، ۱۶	نظریه‌های واقع‌بینانه موضعی، ۲۶۵، ۲۶۶
همدوسی القایی، ۲۶۰	نظریه اختلال، ۱۵، ۹۵، ۹۹، ۱۰۹، ۱۱۲، ۲۳۱، ۳۶۴
همدوسی زمانی، ۱۴۲، ۱۵۵	نظریه تخمین کوانتومی، ۵۸
همدوسی کلاسیکی مرتبه دو، ۱۵۳	نظریه همدوسی کوانتومی، ۱۰، ۱۴
همدوسی کوانتومی القایی، ۲۵۰	نقص کوانتومی، ۲۸۰
هوسیمی، ۸۳	نمایش P، ۸۳، ۸۷
یون‌های درتله‌افتاده، ۱۰، ۱۹، ۲۳۲، ۲۴۹، ۳۰۵، ۳۳۴، ۳۳۷	نور فشردده، ۱۸، ۱۸۱، ۱۸۹، ۱۹۹، ۲۰۱، ۲۳۰
	نور فشردده تربیعی، ۱۹۸، ۱۹۹
	نوفه‌های وابسته به فاز، ۱۸۹
	نوفه خلا، ۱۷۶، ۱۸۹
	نوفه شلیک، ۳۱۰، ۳۰۱
	نیروی کاسیمیر، ۵۰
	وارونی اتمی، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۲۱، ۱۲۸، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۳۰۳
	وارونی جمعیت، ۱۶، ۱۰۸
	وافازی، ۱۹، ۱۰۳، ۱۱۹