

برنام‌خواندجان و

آشنایی با معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های
دینامیکی و مدل‌سازی ریاضی



سید محمود طالبیان
عضو هیئت علمی دانشگاه حکیم سبزواری

سرشناسه: طالبیان، سیدمحمود، ۱۳۲۸ -
 عنوان و نام پدیدآور: آشنایی با معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های دینامیکی و مدل‌سازی ریاضی / سیدمحمود طالبیان؛ ویراستار علمی مرتضی گنج‌پزان؛ ویراستار ادبی حجت قربان‌پور.
 مشخصات نشر: مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۲.
 مشخصات ظاهری: ۶۵۵ ص: مصور، نمودار.
 فروست: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۸۸۴.
 شابک: ISBN: 978-964-386-578-8
 وضعیت فهرست‌نویسی: فایا.
 یادداشت: واژه‌نامه. کتابنامه: ص. ۶۰۷ - ۶۱۰. نمایه.
 موضوع: معادله‌های دیفرانسیل
 Differential equations
 Differentiable dynamical systems --
 Mathematical models
 الگوهای ریاضی
 Differential equations, Nonlinear
 Mathematical models
 معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی
 الگوهای ریاضی
 شناسه افزوده: گنج‌پزان، مرتضی، ۱۳۴۷- ویراستار
 شناسه افزوده: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.
 رده‌بندی کنگره: QA۳۷۱
 رده‌بندی دیویی: ۵۱۵/۳۵۰۷۶
 شماره کتابشناسی ملی: ۹۲۸۹۳۸۶

آشنایی با معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های دینامیکی و مدل‌سازی ریاضی

پدیدآورنده: سیدمحمود طالبیان
 ویراستار علمی: دکتر مرتضی گنج‌پزان
 ویراستار ادبی: حجت قربان‌پور
 مشخصات: وزیری، ۱۰۰ نسخه، چاپ دوم، زمستان ۱۴۰۴ (اول، ۱۴۰۲)
 چاپ و صحافی: همیار
 بها: ۹۲۰۰/۰۰۰ ریال

حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
 تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶ - ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)
 مؤسسه کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست
 گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)
 مؤسسه دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شماره ۱۴۲
 تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

<http://press.um.ac.ir>

Email: press@um.ac.ir



فهرست مطالب

۵	فهرست مطالب
۱۱	پیشگفتار
۱۳	فصل اول: آشنایی با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
۱۳	۱.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی
۱۵	۱.۱.۱ استنتاج
۱۵	۲.۱.۱ روش حل
۱۷	۲.۱ برخی کاربردها
۱۷	۱.۲.۱ قانون گرمایش و سرمایش نیوتن
۲۰	۲.۲.۱ ساعت‌های آبی برون‌شار
۲۳	۳.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیرخطی
۲۳	۱.۳.۱ مدل‌سازی رشد لجستیکی
۲۴	۲.۳.۱ مدل‌سازی برهم‌کنش‌های شکار و شکارچی، مدل لوتکا-ولترا
۲۵	۳.۳.۱ معادلات دیفرانسیل کامل
۲۹	۴.۳.۱ عامل انتگرال‌ساز
۳۲	۴.۱ شرط اولیه، قضیه وجود و یکتایی
۳۶	مسائل
۴۳	فصل دوم: آشنایی با معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم
۴۳	۱.۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی
۴۴	۱.۱.۲ استنتاج
۴۶	۲.۱.۲ حل پذیری
۴۹	۲.۲ روش‌های تحصیل جواب
۴۹	۱.۲.۲ معادلات همگن با ضرایب ثابت
۵۲	۲.۲.۲ معادلات ناهمگن با ضرایب ثابت، روش تغییر پارامتر
۵۴	۳.۲.۲ چند مثال
۵۵	۴.۲.۲ روش ضرایب نامعین
۵۸	۵.۲.۲ استفاده از سری‌های توانی

۶۶	۶.۲.۲ کاهش مرتبه
۶۸	۳.۲ حرکات نوسانی
۷۵	۴.۲ معادله کوشی-اوایلر
۷۶	۵.۲ چند مثال
۷۷	مسائل
۸۳	فصل سوم: روش فروبنیوس، تابع گاما، توابع و چندجمله‌ای‌های متعامد
۸۳	۱.۳ چرا روش فروبنیوس؟
۸۴	۱.۱.۳ روش فروبنیوس
۹۲	۲.۱.۳ چند مثال
۹۹	۲.۳ تابع گاما
۱۰۰	۱.۲.۳ ویژگی‌های تابع گاما
۱۰۳	۲.۲.۳ صورت‌های مختلف تابع گاما
۱۰۵	۳.۲.۳ تابع دیگاما
۱۰۸	۳.۳ توابع و چندجمله‌ای‌های متعامد
۱۱۳	مسائل
۱۱۹	فصل چهارم: توابع ویژه ریاضی-فیزیک
۱۱۹	۱.۴ معادله و چندجمله‌ای‌های چیشوف
۱۲۷	۲.۴ معادله و چندجمله‌ای‌های هرمیت
۱۳۰	۳.۴ تعامد
۱۳۳	۴.۴ معادله و چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۳۸	۵.۴ تعامد چندجمله‌ای‌های لژاندر
۱۳۹	۶.۴ معادله و چندجمله‌ای‌های لاگر
۱۴۲	۷.۴ تعامد چندجمله‌ای‌های لاگر
۱۴۴	۸.۴ معادله و توابع بسل
۱۵۲	۹.۴ تعامد توابع بسل
۱۵۷	مسائل
۱۶۳	فصل پنجم: نخستین پیامدهای ابداع حسابان و کشف قوانین نیوتن
۱۶۳	۱.۵ مسئله کوتاه‌ترین زمان
۱۷۰	۲.۵ مسئله هم‌زمانی
۱۷۱	۳.۵ تاریخچه بسیار مختصری از مسائل کوتاه‌ترین زمان و هم‌زمانی
۱۷۱	۴.۵ آونگ ساده، ویژگی تک‌زمانی
۱۷۲	۵.۵ استنتاج معادله حرکت آونگ ساده
۱۷۳	۶.۵ حرکت سیارات و قوانین کپلر
۱۷۹	۷.۵ قانون گرانش عام نیوتن
۱۸۳	۸.۵ حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی
۱۸۵	۹.۵ قوانین کپلر

۱۸۵	قانون دوّم کپلر	۱.۹.۵
۱۸۶	قانون اول کپلر	۲.۹.۵
۱۸۷	قانون سوم کپلر	۳.۹.۵
۱۸۹	سرعت گریز	۱۰.۵
۱۹۱	فصل ششم: سری‌های فوریه، انتگرال و تبدیلات فوریه	
۱۹۱	تعاریف و احکام مقدماتی	۱.۶
۱۹۷	همگرایی	۲.۶
۲۰۶	توابع زوج و فرد	۳.۶
۲۰۸	چند مثال	۴.۶
۲۰۸	همگرایی مطلق و یکنواخت	۵.۶
۲۱۳	انتگرال فوریه	۶.۶
۲۲۱	فرمول انتگرال کسینوس فوریه	۱.۶.۶
۲۲۲	فرمول انتگرال سینوس فوریه	۲.۶.۶
۲۲۲	تبدیلات فوریه	۷.۶
۲۲۵	مسائل	
۲۳۱	فصل هفتم: آشنایی با معادلات با مشتقات جزئی، رده‌بندی، روش مشخصه‌ها	
۲۳۱	آشنایی	۱.۷
۲۳۳	معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول خطی، روش مشخصه‌ها	۲.۷
۲۴۳	معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی، رده‌بندی، صورت‌های متعارف	۳.۷
۲۴۵	صورت‌های متعارف	۴.۷
۲۴۷	معادلات هذلولی‌گون	۵.۷
۲۴۸	معادلات سهمی‌گون	۶.۷
۲۴۹	معادلات بیضی‌گون	۷.۷
۲۵۰	معادلات با ضرایب ثابت	۸.۷
۲۵۴	مسائل	
۲۶۳	فصل هشتم: معادلات موج، روش جداسازی متغیرها	
۲۶۴	ارتعاشات عرضی آزاد یک تارمناهی	۱.۸
۲۷۲	چند مثال	۲.۸
۲۷۶	ارتعاشات واداشته	۳.۸
۲۷۹	ارتعاشات میرا	۴.۸
۲۸۶	ارتعاشات طولی یک میله کشسان	۵.۸
۲۸۷	ارتعاشات آزاد یک تار نامتناهی	۶.۸
۲۸۹	روش دالامبر	۷.۸
۲۹۱	مسائل	

۲۹۹	فصل نهم: گرما، معادلات لاپلاس و پواسون
۲۹۹	۱.۹ شارش گرما در یک میله با طول متناهی
۳۱۳	۲.۹ معادله ناهمگن شارش گرما در یک میله متناهی
۳۱۵	۳.۹ شارش گرما در یک میله نامتناهی
۳۲۱	۴.۹ هدایت گرما
۳۲۳	۱.۴.۹ قانون هدایت گرمای فوریه
۳۲۴	۲.۴.۹ معادله پواسون
۳۲۴	۳.۴.۹ معادله لاپلاس
۳۲۵	۴.۴.۹ اصل ماکسیمم
۳۲۶	۵.۴.۹ اصل مینیمم
۳۲۷	۵.۹ معادله لاپلاس در یک دایره
۳۲۷	۱.۵.۹ مسئله دیریکله برای یک دایره
۳۳۴	۲.۵.۹ مسئله نویمان برای یک دایره
۳۳۷	۶.۹ مسئله دیریکله برای یک مستطیل
۳۳۷	۱.۶.۹ حالت خاص
۳۴۰	۲.۶.۹ حالت کلی
۳۴۲	۳.۶.۹ معادله پواسون در یک مستطیل با شرط مرزی دیریکله
۳۴۳	مسائل
۳۵۷	فصل دهم: دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول خطی
۳۵۷	۱.۱۰ آشنایی
۳۵۹	۲.۱۰ دستگاه‌های خطی مرتبه اول همگن با ضرایب ثابت
۳۶۱	۳.۱۰ ریشه‌های حقیقی ساده و مکرر
۳۶۴	۴.۱۰ ریشه‌های مختلط
۳۶۵	۵.۱۰ دستگاه‌های خطی مرتبه اول ناهمگن با ضرایب ثابت
۳۶۶	۶.۱۰ چند مثال
۳۷۶	مسائل
۳۸۳	فصل یازدهم: تبدیل لاپلاس
۳۸۳	۱.۱۱ تعاریف و قضایای مقدماتی
۳۸۶	۲.۱۱ تبدیل لاپلاس معکوس
۳۸۹	۳.۱۱ قواعد انتقال و تغییر مقیاس
۳۹۲	۴.۱۱ مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس
۳۹۷	۵.۱۱ تابع دلتای دیراک
۳۹۸	۶.۱۱ توابع متناوب
۴۰۰	۷.۱۱ پیچش انتگرال
۴۰۳	۸.۱۱ کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل معمولی

۴۱۲	۹.۱۱ کاربرد تبدیل لاپلاس در حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی
۴۱۴	۱۰.۱۱ معادلات شتاب کوریولیس
۴۱۷	۱۱.۱۱ کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات با مشتقات جزئی
۴۲۲	مسائل
۴۲۹	فصل دوازدهم: معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول غیرخطی، نظریه کیفی (رفتاریابی)
۴۲۹	۱.۱۲ معادلات مرتبه اول خودگردان، نقاط تعادل و پایداری
۴۳۰	۲.۱۲ خط فاز، پایداری
۴۳۶	۳.۱۲ سرعت نهایی یک چترباز
۴۳۷	۴.۱۲ تعمیم مفهوم پایداری
۴۴۴	۵.۱۲ وابستگی به پارامتر، انشعاب
۴۴۵	۱.۵.۱۲ انشعاب زین-گره
۴۴۶	۲.۵.۱۲ انشعاب بحران‌گذر
۴۴۷	۳.۵.۱۲ انشعاب چنگالی
۴۵۶	مسائل
۴۶۱	فصل سیزدهم: معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم، نظریه کیفی (رفتاریابی)
۴۶۱	۱.۱۳ صفحه و مسیرهای فاز
۴۶۳	۲.۱۳ نقاط تعادل معادلات خطی با ضرایب ثابت
۴۶۳	۱.۲.۱۳ معادله مشخصه با دو ریشه حقیقی متمایز و منفی
۴۶۵	۲.۲.۱۳ معادله مشخصه با دو ریشه حقیقی متمایز و مثبت
۴۶۵	۳.۲.۱۳ معادله مشخصه با دو ریشه حقیقی و مختلف علامه
۴۶۶	۴.۲.۱۳ معادله مشخصه با دو ریشه مکرر و مثبت
۴۶۶	۵.۲.۱۳ معادله مشخصه دو ریشه مکرر و منفی
۴۶۷	۶.۲.۱۳ معادله مشخصه با دو ریشه مختلط
۴۶۹	۳.۱۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم غیرخطی
۴۷۴	۴.۱۳ اصل پایستاری انرژی
۴۷۷	۵.۱۳ کاربردهای اصل پایستاری انرژی در نظریه کیفی
۴۸۰	۶.۱۳ نیروهای پایستار
۴۸۴	۷.۱۳ نتیجه‌گیری
۴۸۷	فصل چهاردهم: نظریه کیفی دستگاه‌های خودگردان مرتبه اول
۴۸۷	۱.۱۴ خطی سازی
۴۹۵	۲.۱۴ دستگاه‌های خودگردان خطی مسطح
۵۰۷	۳.۱۴ دستگاه‌های هامیلتونی و پایستار
۵۱۰	۴.۱۴ دستگاه پایستار و ویژگی هایش
۵۱۴	۵.۱۴ دستگاه‌های پایستار و مدارهای متناوب
۵۱۷	۶.۱۴ قضیه پوانکاره-بندیکسون
۵۱۸	۱.۶.۱۴ قضیه (پوانکاره-بندیکسون)

۵۲۷	۷.۱۴	روش مستقیم لیاپونف
۵۳۴	۸.۱۴	معادلات شکار و شکارچی لوتکا-ولترا
۵۳۶	۹.۱۴	انشعاب آندرونف-هاپف
۵۴۷	۱.۹.۱۴	حالت کلی
۵۴۹	۲.۹.۱۴	تاب انشعاب
۵۴۹	۳.۹.۱۴	مثال‌ها
۵۵۳	۱۰.۱۴	مثال‌های گوناگون
۵۶۰		مسائل
۵۶۹		فصل پانزدهم: الگوها در طبیعت و مدل‌سازی ریاضی آنها
۵۷۲	۱.۱۵	انواع الگوها
۵۷۳	۲.۱۵	الگوهای خودسامان
۵۷۴	۱.۲.۱۵	رده کلر-سیگل
۵۷۵	۲.۲.۱۵	استنتاج
۵۷۶	۳.۲.۱۵	رده تورینگ
۵۷۷	۳.۱۵	مدل توماس
۵۷۸	۴.۱۵	شرایط تشکیل الگو
۵۷۸	۱.۴.۱۵	تشکیل الگو با مدل مینیمال کلر-سیگل
۵۸۰	۲.۴.۱۵	تشکیل الگو با مدل‌های واکنش-پخش
۵۸۵	۵.۱۵	الگوهای پوست حیوانات و حشرات
۵۸۶	۱.۵.۱۵	مدل الگوی پوست زرافه
۵۸۸	۲.۵.۱۵	مدل الگوی بال سنجاقک
۵۸۹	۳.۵.۱۵	مدل الگوی رنگی بال پروانه پاپیلیوداردانوس
۵۹۳		فصل شانزدهم: پیوست‌ها
۵۹۳	۱.۱۶	میدان‌های برداری
۵۹۵	۲.۱۶	مفهوم فیزیکی واگرایی، قانون پایستاری جرم
۵۹۵	۳.۱۶	انتگرال خط
۵۹۷	۴.۱۶	انتگرال سطح، قضیه واگرایی
۶۰۱	۵.۱۶	قضایای گرین و استوکس
۶۰۵	۶.۱۶	قضیه تابع ضمنی
۶۰۷		مراجع
۶۱۱		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۲۹		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۶۴۳		نمایه واژگان و اصطلاحات

پیشگفتار

در قرن بیستم، مهندسی صنعتی با استعانت از رشد و افزایش توانمندی و ظرفیت رایانه‌ها توسعه قابل ملاحظه‌ای یافت. به مدد رایانه‌ها، پیش‌بینی دقیق وضعیت‌ها و پدیده‌های متنوع فیزیکی میسر شد. این پیش‌بینی‌ها از طریق تعیین جواب تقریبی انواع خاصی از معادلات با مشتقات جزئی صورت گرفت؛ معادلاتی که پیش از قرن بیستم شناسایی شده و مورد بحث و بررسی قرار گرفته بودند و مشخص شده بود که بعضاً به دلیل پیچیدگی ساختار، تعیین جواب دقیق و کامل آنها دشوار یا ناممکن است. بنابراین، از این منظر، نقش رایانه به عنوان یک ابزار قدرتمند در تعیین جواب تقریبی معادلات مذکور انکارناپذیر و قابل توجه است. برای توضیح بیشتر، ملاحظه کنید که، تقریباً در تمامی قرن بیستم، ریاضیات همتای بی‌چون و چرای فیزیک و مهندسی بوده است. اغلب مردم، به‌ویژه محصلان و اولیای آنها، معتقد بودند که آنان که می‌خواهند مهندس شوند نیازمند یادگیری ریاضیات پیشرفته‌اند. در واقع، تا نیمه دوم قرن بیستم، تمامی دانشجویان رشته‌های ریاضی مکلف به انتخاب و یادگیری دروسی از فیزیک بودند که آموزش آنها مبتنی بر حسابان است. اما، از نیمه دوم قرن بیستم تا دهه اول قرن حاضر، علوم ریاضی متحول شدند و اولین نشانه این دگرگونی جایگزینی زیست‌شناسی به جای فیزیک بود. دلیل وقوع این رویداد بسیار ساده است: بررسی مسائل مربوط به موجودات و اندام‌های زنده بسیار پیچیده‌تر از مسائل مربوط به دنیای جامدات است. بنابراین، طبیعی است که مسائل فیزیکی ساده یک یا دو قرن زودتر از مسائل نسبتاً دشوار زیست‌شناسی حل و بحث شوند. اما اکنون، یعنی در آغاز قرن بیست و یکم، دانشمندان و ریاضی‌دانان به این اجماع نظر رسیده‌اند که ابزارهای موجود ریاضی برای مدل‌سازی ریاضی فرایندهای علوم حیات و زیست‌شناسی به همان اندازه مفید و کارساز می‌باشند که پیش از این در مورد دستگاه‌های فیزیکی مؤثر بودند؛ از جمله مدل‌سازی ریاضی گردش خون در بدن انسان و تومورهای سرطانی. از این رو، در قرن بیست و یکم، زیست‌شناسی افق‌های جدیدی جهت ریاضیات ترسیم و قلمروهایی کاملاً جدید برای فعالیت‌های ریاضی ایجاد خواهد کرد؛ زیرا دنیای موجودات زنده بسیار متنوع‌تر از عالم جامدات است. در مقام مقایسه، می‌توان گفت که تنوع ساختارهای زنده تقریباً یک هزار برابر موجودات دیگر است. رویارویی با یک چنین تنوع عظیمی از حیات در هر زمان و مکان مستلزم بهره‌گیری از مفاهیم اساسی و ابزارهای پیشرفته در ریاضیات است. به طور متقابل، تحولات علوم حیات نیز تقویت ریاضیات را در پی خواهد داشت. در حال حاضر، نظریه مدل‌سازی ریاضی، که انقلابی عظیم‌تر از انقلاب نیوتن ایجاد کرده است، یکی از نمونه‌های بارز تعامل بین ریاضیات و علوم حیات است که در دهه‌های اخیر آثار شگرفی در این زمینه از آن ظاهر شده است. به اختصار، اگر ریاضیات را علم الگوها و مدل‌سازی ریاضی

آنها بدانیم، زیست‌شناسی سرشار از الگوها است. اما ورود به مبحث مدل‌سازی ریاضی مستلزم تسلط کامل بر دروس معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی، نظریه کیفی معادلات و روش‌های حل تحلیلی و تقریبی آنهاست. در کتاب حاضر، مقدمات لازم برای ورود به مبحث مذکور فراهم شده است که عمدتاً شامل روش‌های حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی و نظریه کیفی آنها است. در راستای این هدف، فصل‌های اول، دوم، سوم و چهارم را به بحث درباره معادلات دیفرانسیل معمولی و معرفی توابع ویژه ریاضی-فیزیک اختصاص داده‌ایم. از ویژگی‌های این چهار فصل، بررسی کامل و دقیق روش فروبینوس برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است که یک نقطه تکیه منظم دارند. توابع ویژه ریاضی-فیزیک نیز به تفصیل مورد بحث قرار گرفته‌اند. قانون گرمایش و سرمایش نیوتن، سازوکار دریاژکن‌های برقی، و مدل‌سازی برهم‌کنش‌های شکار و شکارچی لوتکا-ولترا به عنوان کاربردهای نوینی از درس معادلات دیفرانسیل معمولی مطرح شده‌اند. در فصل پنجم، بعضی از پیامدهای ابداع حسابان و کشف قوانین نیوتن مورد توجه قرار گرفته‌اند؛ از جمله: مسائل مهم و تاریخی کوتاه‌ترین زمان، هم‌زمانی و تک‌زمانی، حرکت آونگ ساده، حرکت سیارات به دور خورشید و قوانین کپلر. دانشجویان می‌توانند بدون نگرانی از عدم رعایت پیوستگی مطالب، فصل پنجم را نادیده بگیرند. چنان‌که اشاره شد، علوم ریاضی پس از ابداع حسابان در قرن هفدهم میلادی به سرعت رو به گسترش نهادند؛ به‌ویژه، در زمینه ریاضی-فیزیک. در این میان، ریاضی‌دانان برجسته آن زمان و پس از آن مجذوب پدیده‌های موج و گرما شدند و دستاوردهای قابل‌ملاحظه‌ای حاصل شد. مدل ریاضی پدیده‌های مذکور عموماً یک معادله با مشتقات جزئی خطی است. از این رو، معادلات با مشتقات جزئی خطی در فصل‌های هفتم، هشتم و نهم مورد بحث قرار گرفته‌اند و دو روش کلاسیک برای حل این معادلات معرفی شده است: یکی «روش مشخصه‌ها» و دیگری «روش جداسازی متغیرها». در فصل هفتم کتاب از روش مشخصه‌ها برای حل معادلات مذکور استفاده شده است که بیشتر جنبه نظری دارد و در فصل‌های هشتم و نهم روش تفکیک متغیرها برای تعیین جواب معادلات حاکم بر پدیده‌های موج و گرما به کار رفته است. چهار فصل اول به انضمام فصل‌های ششم و بعد از آن تا انتهای فصل یازدهم محتوای دروس معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی، دوره کارشناسی را تشکیل می‌دهند. مابقی کتاب را به بحث درباره معادلات غیرخطی، اعم از معمولی یا با مشتقات جزئی، و نظریه کیفی آنها اختصاص داده‌ایم که دستگاه‌های دینامیکی و نظریه مقدماتی انشعاب را نیز در بر می‌گیرد. فصل پایانی کتاب را مدخل مبحث مدل‌سازی ریاضی می‌دانیم و مطالعه آن می‌تواند بسیار راه‌گشا باشد.

در پایان،

از استاد محترم جناب آقای دکتر گچ‌پزان، که ویرایش علمی کتاب را بر عهده داشته‌اند، بسیار سپاسگزارم.
از سرکار خانم نورآبادی و سرکار خانم دلک آبادی که حروف‌چینی کتاب را انجام دادند نیز تشکر می‌کنم.

سید محمود طالبیان

بهار هزار و چهارصد و دو هجری شمسی

فصل اول

آشنایی با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

«معادلات دیفرانسیل، مبنای نگرش علمی به جهان است.»
وی. آی. آرنولد (۲۰۱۰-۱۹۳۷)

۱.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی

تابع

$$y = y(x) = e^{-x^2} + 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌کنیم که

$$y'(x) = -2xe^{-x^2} + 2, \quad x \in \mathbb{R};$$

و در می‌یابیم که رابطه

$$y' + 2xy = 6x^2 + 10x + 3 \quad (2.1)$$

به ازای هر x از \mathbb{R} برقرار است. بنابراین، تابع (۱.۱) در معادله (۲.۱) صدق می‌کند. هر تابع حقیقی مقدار مشتق‌پذیر از یک متغیر x را که در معادله (۲.۱) صدق کند—بدین معنی که رابطه (۲.۱) به ازای هر x از \mathbb{R} برقرار باشد—یک جواب معادله (۲.۱) می‌نامند. پس، تابع مفروض (۱.۱) یک جواب معادله (۲.۱) است. این معادله جواب‌های دیگری نیز دارد. به عنوان مثال، اگر C یک عدد ثابت باشد تابع

$$y_c(x) = Ce^{-x^2} + 2x + 5 \quad (3.1)$$

نیز در معادله (۲.۱) صدق می‌کند. وقتی که C در \mathbb{R} تغییر کند، توابع (۳.۱) رده‌ای از منحنی‌ها در صفحه را مشخص می‌کنند و تابع (۱.۱) عضوی از این رده و تنها عضوی است که از نقطه (\circ, ϵ) می‌گذرد. بدین مناسبت، تابع (۳.۱) را که نماینده‌ای از یک رده از توابع است، جواب عمومی معادله (۲.۱) می‌نامند و تابع (۱.۱) یک جواب خصوصی معادله (۲.۱) نامیده می‌شود که متناظر با $C = 1$ از رده مذکور است و منحنی نمایش آن در صفحه از نقطه (\circ, ϵ) می‌گذرد. گزاره اخیر را به این صورت نیز بیان می‌کنند که تابع (۱.۱) یک جواب خصوصی معادله (۲.۱) است که در شرط اولیه $y(\circ) = \epsilon$ صدق می‌کند.

اینک، به تعاریف زیر توجه کنید:

تعریف ۱.۱.۱: فرض کنید که توابع $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابع حقیقی مقدار از یک متغیر حقیقی x باشند که بر یک بازه I از خط حقیقی تعریف شده‌اند. در این صورت، معادله

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (۴.۱)$$

را یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول خطی بر I می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱: هر تابع حقیقی مقدار مشتق‌پذیر

$$y = y(x), \quad x \in I$$

از یک متغیر حقیقی x که در معادله دیفرانسیل مفروض (۴.۱) صدق کند یک جواب این معادله بر I نامیده می‌شود.

به طور کلی، هر معادله به صورت

$$f(x, y, y') = \circ \quad (۵.۱)$$

را یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول می‌نامند به این دلیل که فقط مشتق مرتبه‌ی اول y ، یعنی y' ، در آن حضور دارد. این معادله را یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول خطی می‌نامند در صورتی که y و y' به شکل یک ترکیب خطی $a(x)y' + b(x)y$ در آن ظاهر شده باشند. بنابراین، معادله

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول و قابل تبدیل به شکل (۴.۱) است در صورتی که

$$a(x) \neq \circ, \quad x \in I.$$

این معادله را همگن می‌نامند در صورتی که $c = c(x)$ تابع ثابت صفر باشد. هر معادله که همگن نباشد، ناهمگن نامیده می‌شود.

۱.۱.۱ استنتاج

مخزنی را در نظر بگیرید که شامل محلول آب نمک و دارای یک ورودی و یک خروجی است. از ورودی مخزن در هر دقیقه $a(t)$ لیتر محلول با تمرکز C کیلوگرم نمک در هر لیتر وارد مخزن می‌شود. از خروجی مخزن در هر دقیقه $b(t)$ لیتر محلول خارج می‌شود. بنابراین، با این فرض که V_0 حجم محلول موجود در مخزن در $t = 0$ باشد، حجم محلول موجود در آن در دقیقه t از دستور زیر به دست می‌آید:

$$V(t) = V_0 + \int_0^t [a(u) - b(u)] du.$$

حال، اگر فرض کنیم که $y(t)$ مقدار نمک موجود در محلول در دقیقه t و محلول یکنواخت باشد آنگاه تمرکز نمک در مخزن برابر $y(t)/V(t)$ کیلوگرم نمک در هر لیتر خواهد بود و خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ca(t) - \frac{b(t)}{V(t)}y(t),$$

که سمت چپ این معادله همان نرخ تغییر نمک موجود در محلول است و این معادله یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی با تابع مجهول $y = y(t)$ است.

۲.۱.۱ روش حل

معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی همگن

$$y' + p(x)y = 0 \quad (6.1)$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید که $p = p(x)$ تابع پیوسته‌ای از x باشد. اگر معادله (۶.۱) را به صورت

$$\frac{y'}{y} = -p(x)$$

بنویسیم، درمی‌یابیم که

$$\frac{d}{dx} \ln y = -p(x),$$

و نتیجه می‌گیریم که

$$\ln y = \int [-p(x)] dx + c,$$

که در آن c ثابت انتگرال‌گیری است. با انتخاب $C = e^c$ ، جواب عمومی معادله (۶.۱) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$y = Ce^{\int [-p(x)] dx}. \quad (7.1)$$

حال، فرض کنید که $q = q(x)$ نیز تابع پیوسته‌ای از x باشد و معادله

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (۸.۱)$$

را در نظر بگیرید. با تجربه‌ای که از حل معادله همگن (۶.۱) کسب کردیم، طرفین معادله (۸.۱) را در عامل

$$e^{\int p(x) dx}$$

– که آن را عامل انتگرال‌ساز نامیده‌اند – ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$e^{\int p(x) dx} y' + p(x)e^{\int p(x) dx} y = q(x)e^{\int p(x) dx}. \quad (۹.۱)$$

با اندک تأملی متوجه می‌شویم که طرف چپ معادله (۹.۱) برابر است با:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int p(x) dx} y \right]. \quad (۱۰.۱)$$

پس، از معادله (۹.۱) و عبارت (۱۰.۱)، که برابر مشتق طرف چپ این معادله است، نتیجه می‌گیریم که

$$e^{\int p(x) dx} y = \int \left[q(x)e^{\int p(x) dx} \right] dx + C,$$

که در آن C ثابت انتگرال‌گیری است. لذا، جواب عمومی معادله ناهمگن (۸.۱) از دستور زیر به دست می‌آید:

$$y = Ce^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \int \left[q(x)e^{\int p(x) dx} \right] dx. \quad (۱۱.۱)$$

مثال ۳.۱۰.۱: معادله زیر را حل کنید:

$$y' + y = x + ۱.$$

حل: ملاحظه کنید که

$$p(x) = ۱, \quad q(x) = x + ۱, \quad x \in \mathbb{R}.$$

بنابراین،

$$e^{\int p(x) dx} = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

و

$$\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx = \int (x + ۱)e^x dx = xe^x.$$

پس، به استناد (۱۱.۱)، جواب عمومی معادله به شکل زیر به دست می‌آید:

$$y(x) = Ce^{-x} + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

مثال ۴.۱.۱: معادله زیر را حل کنید:

$$y' + y = \cos 2x.$$

حل: ملاحظه کنید که

$$p(x) = 1, \quad q(x) = \cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

بنابراین:

$$e^{\int p(x) dx} = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

و

$$\int q(x)e^{\int p(x) dx} dx = \int (\cos 2x)e^x dx = \frac{1}{5}(\cos 2x + 2 \sin 2x)e^x,$$

و جواب عمومی معادله به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{5}(\cos 2x + 2 \sin 2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

۲.۱ برخی کاربردها

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول خطی کاربردهای متعددی دارند که از آن میان به قانون گرمایش و سرمایش نیوتن و بررسی ساختمان‌های آبی برون‌شار می‌پردازیم.

۱.۲.۱ قانون گرمایش و سرمایش نیوتن

بر اساس قانون سرمایش نیوتن، نرخ تغییر دمای یک واحد مسکونی متناسب است با تفاضل دمای محیط بیرون و درون ساختمان مفروض. بنابراین، اگر $a(t)$ دمای محیط بیرون و $u(t)$ دمای درونی ساختمان مفروض باشد، آنگاه

$$\frac{du}{dt} = k(a(t) - u(t)), \quad (12.1)$$

که در آن k را ضریب تناسب در نظر گرفته‌ایم. به علاوه، اگر فرض کنیم که ساختمان مفروض دارای یک منبع گرما با نرخ افزایش دمای $s(t)$ باشد و نرخ سرمایش یا گرمایش درون ساختمان را $f(t)$ بدانیم، معادله

$$\frac{du}{dt} = k(a(t) - u(t)) + s(t) + f(t) \quad (13.1)$$

را خواهیم داشت.

اینک، تغییرات دمای درون ساختمان مفروض را در حالت‌های زیر مورد بحث قرار می‌دهیم.

(الف) ساختمان مسکونی فاقد منبع گرمازا است و دمای محیط خارج ثابت است. در این حالت، معادله (۱۲.۱) به صورت ساده زیر درمی‌آید:

$$\frac{du}{dt} + ku(t) = ka_0,$$

با تابع جواب:

$$u(t) = a_0 + (u(0) - a_0)e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

(ب) در ساختمان مسکونی یک منبع گرمازا و یک ترموستات در نظر گرفته می‌شود تا دمای درونی را در T_0 درجه ثابت نگه دارد.

در این صورت، $f(t)$ به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(t) = k'(T_0 - u(t)),$$

که در آن k' را ضریب تناسب در نظر گرفته‌ایم و معادله

$$\frac{du}{dt} = k(a(t) - u(t)) + s(t) + k'(T_0 - u(t)),$$

یا

$$\frac{du}{dt} + (k + k')u(t) = ka(t) + k'T_0,$$

را خواهیم داشت با جواب عمومی

$$u(t) = e^{-(k+k')t} + e^{-(k+k')t} \int_0^t [ka(v) + k'T_0] e^{(k+k')v} dv, \quad t \geq 0.$$

(ج) نصب کولر آبی در ساختمان در هوای گرم تابستان و در مناطق نسبتاً خشک. چنان که می‌دانیم، سرمایش درون ساختمان معمولاً با نصب یک یا چند کولر آبی صورت می‌گیرد؛ زیرا، تبخیر آب سرما ایجاد می‌کند و کولر هوای سرد ناشی از تبخیر آب را به درون ساختمان می‌دهد.

در این شرایط، $s(t) = 0$ و $f(t) = k'(p(t) - u(t))$ ؛ که در آن تابع $p(t)$ معمولاً به صورت $p(t) = 0.85a(t)$ در نظر گرفته می‌شود. پس، معادله (۱۳.۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= k(a(t) - u(t)) + k'(p(t) - u(t)) \\ &= (k + 0.85k')a(t) - (k + k')u(t), \end{aligned}$$

با جواب

$$u(t) = u(0)e^{-(k+k')t} + (k + 0.85k') e^{-(k+k')t} \int_0^t a(v) e^{(k+k')v} dv, \quad t \geq 0.$$