به نام خداوند جان و خرد

انتشارات
۸۸۴

آشنایی با معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های دینامیکی و مدل‌سازی ریاضی

سیّدمحمود طالبیان
عضو هیئت علمی دانشگاه حکیم سبزواری

سرشناسه: طالبیان، سیّدمحمود، ۱۳۲۸ -

عنوان و نام پدیدآور: آشنایی با معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های دینامیکی و مدل‌سازی ریاضی/ سیّدمحمود طالبیان؛ ویراستار علمی مرتضی گچ‌پزان؛ ویراستار ادبی حجت قربان‌پور.

مشخصات نشر: مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۲.

مشخصات ظاهری: ۶۵۵ ص.: مصوّر، نمودار.

فروست: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۸۸۴.

شابک: ISBN: 978-964-386-578-8

وضعیت فهرست‌نویسی: فاپا.

یادداشت: واژه‌نامه. کتابنامه: ص. ۶۰۷ - ۶۱۰. نمایه.

موضوع:

معادله‌های دیفرانسیل	Differential equations
دستگاه‌های دینامیکی دیفرانسیل‌پذیر -- الگوهای ریاضی	Differentiable dynamical systems -- Mathematical models
معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی	Differential equations, Nonlinear
الگوهای ریاضی	Mathematical models

شناسه افزوده: گچ‌پزان، مرتضی، ۱۳۴۷-، ویراستار

شناسه افزوده: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.

رده‌بندی کنگره: QA۳۷۱

رده‌بندی دیویی: ۵۱۵/۳۵۰۷۶

شمارهٔ کتابشناسی ملّی: ۹۲۸۹۳۸۶

آشنایی با معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های دینامیکی و مدل‌سازی ریاضی

انتشارات
۸۸۴

پدیدآورنده: سیّدمحمود طالبیان

ویراستار علمی: دکتر مرتضی گچ‌پزان

ویراستار ادبی: حجت قربان‌پور

مشخصات: وزیری، ۱۰۰ نسخه، چاپ دوم، زمستان ۱۴۰۴ (اوّل، ۱۴۰۲)

چاپ و صحافی: همیار

بها : ۹٫۲۰۰٫۰۰۰ ریال

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶– ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)

مؤسّسهٔ کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)

مؤسّسهٔ دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شمارهٔ ۱۴۲
تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ – ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

http://press.um.ac.ir Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

پیشگفتار

در قرن بیستم، مهندسی صنعتی با استعانت از رشد و افزایش توانمندی و ظرفیت رایانه‌ها توسعهٔ قابل ملاحظه‌ای یافت. به مدد رایانه‌ها، پیش‌بینی دقیق وضعیت‌ها و پدیده‌های متنوع فیزیکی میسر شد. این پیش‌بینی‌ها از طریق تعیین جواب تقریبی انواع خاصی از معادلات با مشتقات جزئی صورت گرفت؛ معادلاتی که پیش از قرن بیستم شناسایی شده و مورد بحث و بررسی قرار گرفته بودند و مشخص شده بود که بعضاً به دلیل پیچیدگی ساختار، تعیین جواب دقیق و کامل آنها دشوار یا ناممکن است. بنابراین، از این منظر، نقش رایانه به عنوان یک ابزار قدرتمند در تعیین جواب تقریبی معادلات مذکور اِنکارناپذیر و قابل توجه است. برای توضیح بیشتر، ملاحظه کنید که، تقریباً در تمامی قرن بیستم، ریاضیات همتای بی‌چون و چرای فیزیک و مهندسی بوده است. اغلب مردم، به‌ویژه محصّلان و اولیای آنها، معتقد بودند که آنان که می‌خواهند مهندس شوند نیازمند یادگیری ریاضیات پیشرفته‌اند. در واقع، تا نیمهٔ دوّم قرن بیستم، تمامی دانشجویان رشته‌های ریاضی مکلّف به انتخاب و یادگیری دروسی از فیزیک بودند که آموزش آنها مبتنی بر حسابان است. امّا، از نیمهٔ دوّم قرن بیستم تا دههٔ اوّل قرن حاضر، علوم ریاضی متحول شدند و اولین نشانهٔ این دگرگونی جایگزینی زیست‌شناسی به جای فیزیک بود. دلیل وقوع این رویداد بسیار ساده است: بررسی مسائل مربوط به موجودات و اندام‌های زنده بسیار پیچیده‌تر از مسائل مربوط به دنیای جامدات است. بنابراین، طبیعی است که مسائل فیزیکی ساده یک یا دو قرن زودتر از مسائل نسبتاً دشوار زیست شناسی حل و بحث شوند. امّا اکنون، یعنی در آغاز قرن بیست و یکم، دانشمندان و ریاضی‌دانان به این اجماع نظر رسیده‌اند که ابزارهای موجود ریاضی برای مدل‌سازی ریاضی فرایندهای علوم حیات و زیست‌شناسی به همان اندازه مفید و کارساز می‌باشند که پیش از این در مورد دستگاه‌های فیزیکی مؤثر بودند؛ از جمله مدل‌سازی ریاضی گردش خون در بدن انسان و تومورهای سرطانی. از این رو، در قرن بیست و یکم، زیست‌شناسی افق‌های جدیدی جهت ریاضیات ترسیم و قلمروهایی کاملاً جدید برای فعالیت‌های ریاضی ایجاد خواهد کرد؛ زیرا دنیای موجودات زنده بسیار متنوع‌تر از عالم جامدات است. در مقام مقایسه، می‌توان گفت که تنوع ساختارهای زنده تقریباً یک هزار برابر موجودات دیگر است. رویارویی با یک چنین تنوع عظیمی از حیات در هر زمان و مکان مستلزم بهره‌گیری از مفاهیم اساسی و ابزارهای پیشرفته در ریاضیات است. به طور متقابل، تحولات علوم حیات نیز تقویت ریاضیات را در پی خواهد داشت. در حال حاضر، نظریهٔ مدل‌سازی ریاضی، که انقلابی عظیم‌تر از انقلاب نیوتن ایجاد کرده است، یکی از نمونه‌های بارز تعامل بین ریاضیات و علوم حیات است که در دهه‌های اخیر آثار شگرفی در این زمینه از آن ظاهر شده است. به اختصار، اگر ریاضیات را علم الگوها و مدل‌سازی ریاضی

آنها بدانیم، زیست‌شناسی سرشار از الگوها است. امّا ورود به مبحث مدل‌سازی ریاضی مستلزم تسلط کامل بر دروس معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی، نظریهٔ کیفی معادلات و روش‌های حل تحلیلی و تقریبی آنهاست. در کتاب حاضر، مقدمات لازم برای ورود به مبحث مذکور فراهم شده است که عمدتاً شامل روش‌های حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی و نظریهٔ کیفی آنها است. در راستای این هدف، فصل‌های اوّل، دوّم، سوم و چهارم را به بحث دربارهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی و معرفی توابع ویژهٔ ریاضی‌ـ فیزیک اختصاص داده‌ایم. از ویژگی‌های این چهار فصل، بررسی کامل و دقیق روش فروبینوس برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ دوّم است که یک نقطهٔ تکین منظم دارند. توابع ویژهٔ ریاضی‌ـ فیزیک نیز به تفصیل مورد بحث قرار گرفته‌اند. قانون گرمایش و سرمایش نیوتن، سازوکار دربازکُن‌های برقی، و مدل‌سازی برهم‌کنش‌های شکار و شکارچی لوتکاـ ولترا به عنوان کاربردهای نوینی از درس معادلات دیفرانسیل معمولی مطرح شده‌اند. در فصل پنجم، بعضی از پیامدهای ابداع حسابان و کشف قوانین نیوتن مورد توجه قرار گرفته‌اند؛ از جمله: مسائل مهم و تاریخی کوتاه‌ترین زمان، هم‌زمانی و تک‌زمانی، حرکت آونگ ساده، حرکت سیارات به دور خورشید و قوانین کپلر. دانشجویان می‌توانند بدون نگرانی از عدم رعایت پیوستگی مطالب، فصل پنجم را نادیده بگیرند. چنان‌که اشاره شد، علوم ریاضی پس از ابداع حسابان در قرن هفدهم میلادی به سرعت رو به گسترش نهادند؛ به‌ویژه، در زمینهٔ ریاضی‌ـ فیزیک. در این میان، ریاضی‌دانان برجستهٔ آن زمان و پس از آن مجذوب پدیده‌های موج و گرما شدند و دستاوردهای قابل‌ملاحظه‌ای حاصل شد. مدل ریاضی پدیده‌های مذکور عموماً یک معادلهٔ با مشتقات جزئی خطی است. از این رو، معادلات با مشتقات جزئی خطی در فصل‌های هفتم، هشتم و نهم مورد بحث قرار گرفته‌اند و دو روش کلاسیک برای حل این معادلات معرفی شده است: یکی «روش مشخصه‌ها» و دیگری «روش جداسازی متغیرها». در فصل هفتم کتاب از روش مشخصه‌ها برای حل معادلات مذکور استفاده شده است که بیشتر جنبهٔ نظری دارد و در فصل‌های هشتم و نهم روش تفکیک متغیرها برای تعیین جواب معادلات حاکم بر پدیده‌های موج و گرما به کار رفته است. چهار فصل اول به انضمام فصل‌های ششم و بعد از آن تا انتهای فصل یازدهم محتوای دروس معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتقات جزئی دورهٔ کارشناسی را تشکیل می‌دهند. مابقی کتاب را به بحث دربارهٔ معادلات غیرخطی، اعم از معمولی یا با مشتقات جزئی، و نظریهٔ کیفی آنها اختصاص داده‌ایم که دستگاه‌های دینامیکی و نظریهٔ مقدماتی انشعاب را نیز در بر می‌گیرد. فصل پایانی کتاب را مدخل مبحث مدل‌سازی ریاضی می‌دانیم و مطالعهٔ آن می‌تواند بسیار راه‌گشا باشد.

در پایان،

از استاد محترم جناب آقای دکتر گچ‌پزان، که ویرایش علمی کتاب را بر عهده داشته‌اند، بسیار سپاسگزارم.

از سرکار خانم نورآبادی و سرکار خانم دلک آبادی که حروف‌چینی کتاب را انجام دادند نیز تشکر می‌کنم.

سید محمود طالبیان

بهار هزار و چهارصد و دو هجری شمسی

فصل اول

آشنایی با معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

«معادلات دیفرانسیل، مبنای نگرش علمی به جهان است.»
وی. آی. آرنولد (۱۹۳۷–۲۰۱۰)

۱.۱ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی

تابع

$$y = y(x) = e^{-x^{۲}} + ۳x + ۵, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{۱.۱}$$

را در نظر بگیرید. ملاحظه می‌کنیم که

$$y'(x) = -۲xe^{-x^{۲}} + ۳, \qquad x \in \mathbb{R};$$

و در می‌یابیم که رابطهٔ

$$y' + ۲xy = ۶x^{۲} + ۱۰x + ۳ \tag{۲.۱}$$

به ازای هر x از $\mathbb{R}$ برقرار است. بنابراین، تابع (۱.۱) در معادلهٔ (۲.۱) صدق می‌کند. هر تابع حقیقی‌مقدار مشتق‌پذیر از یک متغیر x را که در معادلهٔ (۲.۱) صدق کند ــ بدین معنی که رابطهٔ (۲.۱) به ازای هر x از $\mathbb{R}$ برقرار باشد ــ یک جواب معادلهٔ (۲.۱) می‌نامند. پس، تابع مفروض (۱.۱) یک جواب معادلهٔ (۲.۱) است. این معادله جواب‌های دیگری نیز دارد. به عنوان مثال، اگر C یک عدد ثابت باشد تابع

$$y_c(x) = Ce^{-x^{۲}} + ۳x + ۵ \tag{۳.۱}$$

نیز در معادلهٔ (۲.۱) صدق می‌کند. وقتی که C در $\mathbb{R}$ تغییر کند، توابع (۳.۱) رده‌ای از منحنی‌ها در صفحه را مشخص می‌کنند و تابع (۱.۱) عضوی از این رده و تنها عضوی است که از نقطهٔ $(\circ, ۶)$ می‌گذرد. بدین مناسبت، تابع (۳.۱) را که نماینده‌ای از یک رده از توابع است، جواب عمومی معادلهٔ (۲.۱) می‌نامند و تابع (۱.۱) یک جواب خصوصی معادلهٔ (۲.۱) نامیده می‌شود که متناظر با $C = ۱$ از ردهٔ مذکور است و منحنی نمایش آن در صفحه از نقطهٔ $(\circ, ۶)$ می‌گذرد. گزارهٔ اخیر را به این صورت نیز بیان می‌کنند که تابع (۱.۱) یک جواب خصوصی معادلهٔ (۲.۱) است که در شرط اولیهٔ $y(\circ) = ۶$ صدق می‌کند.

اینک، به تعاریف زیر توجه کنید:

تعریف ۱.۱.۱: فرض کنید که توابع $p = p(x)$ و $q = q(x)$ توابع حقیقی‌مقدار از یک متغیر حقیقی x باشند که بر یک بازهٔ I از خط حقیقی تعریف شده‌اند. در این صورت، معادلهٔ

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{۴.۱}$$

را یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه‌ی اول خطی بر I می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱: هر تابع حقیقی‌مقدار مشتق‌پذیر

$$y = y(x), \qquad x \in I$$

از یک متغیر حقیقی x که در معادلهٔ دیفرانسیل مفروض (۴.۱) صدق کند یک جواب این معادله بر I نامیده می‌شود.

به طور کلی، هر معادله به صورت

$$f(x, y, y') = \circ \tag{۵.۱}$$

را یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول می‌نامند به این دلیل که فقط مشتق مرتبهٔ اول y، یعنی y'، در آن حضور دارد. این معادله را یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی می‌نامند در صورتی که y و y' به شکل یک ترکیب خطی $a(x)y' + b(x)y$ در آن ظاهر شده باشند. بنابراین، معادلهٔ

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول و قابل تبدیل به شکل (۴.۱) است در صورتی که

$$a(x) \neq \circ, \qquad x \in I.$$

این معادله را همگن می‌نامند در صورتی که $c = c(x)$ تابع ثابت صفر باشد. هر معادله که همگن نباشد، ناهمگن نامیده می‌شود.

۱.۱.۱ استنتاج

مخزنی را در نظر بگیرید که شامل محلول آب‌نمک و دارای یک ورودی و یک خروجی است. از ورودی مخزن در هر دقیقه $a(t)$ لیتر محلول با تمرکز C کیلوگرم نمک در هر لیتر وارد مخزن می‌شود. از خروجی مخزن در هر دقیقه $b(t)$ لیتر محلول خارج می‌شود. بنابراین، با این فرض که $V_\circ$ حجم محلول موجود در مخزن در $t = \circ$ باشد، حجم محلول موجود در آن در دقیقهٔ t از دستور زیر به دست می‌آید:

$$V(t) = V_\circ + \int_\circ^t [a(u) - b(u)]\,\mathrm{d}u.$$

حال، اگر فرض کنیم که $y(t)$ مقدار نمک موجود در محلول در دقیقهٔ t و محلول یکنواخت باشد آنگاه تمرکز نمک در مخزن برابر $y(t)/V(t)$ کیلوگرم نمک در هر لیتر خواهد بود و خواهیم داشت:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = Ca(t) - \frac{b(t)}{V(t)}y(t),$$

که سمت چپ این معادله همان نرخ تغییر نمک موجود در محلول است و این معادله یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی با تابع مجهول $y = y(t)$ است.

۲.۱.۱ روش حل

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی همگن

$$y' + p(x)y = \circ \tag{۶.۱}$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید که $p = p(x)$ تابع پیوسته‌ای از x باشد. اگر معادلهٔ (۶.۱) را به صورت

$$\frac{y'}{y} = -p(x)$$

بنویسیم، درمی‌یابیم که

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y = -p(x),$$

و نتیجه می‌گیریم که

$$\ln y = \int [-p(x)]\,\mathrm{d}x + c,$$

که در آن c ثابت انتگرال‌گیری است. با انتخاب $C = e^c$، جواب عمومی معادلهٔ (۶.۱) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$y = Ce^{\int [-p(x)]\,\mathrm{d}x}. \tag{۷.۱}$$

حال، فرض کنید که $q = q(x)$ نیز تابع پیوسته‌ای از x باشد و معادلهٔ

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{۸.۱}$$

را در نظر بگیرید. با تجربه‌ای که از حل معادلهٔ همگن (۶.۱) کسب کردیم، طرفین معادلهٔ (۸.۱) را در عامل

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

ـ که آن را عامل انتگرال‌ساز نامیده‌اند ـ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}y' + p(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}y = q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{۹.۱}$$

با اندک تأملی متوجه می‌شویم که طرف چپ معادلهٔ (۹.۱) برابراست با:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}y\right]. \tag{۱۰.۱}$$

پس، از معادلهٔ (۹.۱) و عبارت (۱۰.۱)، که برابر مشتق طرف چپ این معادله است، نتیجه می‌گیریم که

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}y = \int \left[q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right]\,\mathrm{d}x + C,$$

که در آن C ثابت انتگرال‌گیری است. لذا، جواب عمومی معادلهٔ ناهمگن (۸.۱) از دستور زیر به دست می‌آید:

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} + e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\int \left[q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right]\,\mathrm{d}x. \tag{۱۱.۱}$$

مثال ۳.۱.۱: معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$y' + y = x + ۱.$$

حل: ملاحظه کنید که

$$p(x) = ۱, \qquad q(x) = x + ۱, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

بنابراین،

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

و

$$\int q(x)e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int (x+۱)e^x\,\mathrm{d}x = xe^x.$$

پس، به استناد (۱۱.۱)، جواب عمومی معادله به شکل زیر به دست می‌آید:

$$y(x) = Ce^{-x} + x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

مثال ۴.۱.۱: معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$y' + y = \cos ۲x.$$

حل: ملاحظه کنید که

$$p(x) = ۱, \qquad q(x) = \cos ۲x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

بنابراین:

$$e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

و

$$\int q(x) e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int (\cos ۲x) e^x\,\mathrm{d}x = \frac{۱}{۵}(\cos ۲x + ۲\sin ۲x)e^x,$$

و جواب عمومی معادله به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$y = Ce^{-x} + \frac{۱}{۵}(\cos ۲x + ۲\sin ۲x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

۲.۱ برخی کاربردها

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اوّل خطی کاربردهای متعددی دارند که از آن میان به قانون گرمایش و سرمایش نیوتن و بررسی ساختمان ساعت‌های آبی برون‌شار می‌پردازیم.

۱.۲.۱ قانون گرمایش و سرمایش نیوتن

براساس قانون سرمایش نیوتن، نرخ تغییر دمای یک واحد مسکونی متناسب است با تفاضل دمای محیط بیرون و درون ساختمان مفروض. بنابراین، اگر $a(t)$ دمای محیط بیرون و $u(t)$ دمای درونی ساختمان مفروض باشد، آنگاه

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = k(a(t) - u(t)), \tag{۱۲.۱}$$

که در آن k را ضریب تناسب در نظر گرفته‌ایم. به‌علاوه، اگر فرض کنیم که ساختمان مفروض دارای یک منبع گرمازا با نرخ افزایش دمای $s(t)$ باشد و نرخ سرمایش یا گرمایش درون ساختمان را $f(t)$ بدانیم، معادلهٔ

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = k(a(t) - u(t)) + s(t) + f(t) \tag{۱۳.۱}$$

را خواهیم داشت.

اینک، تغییرات دمای درون ساختمان مفروض را در حالت‌های زیر مورد بحث قرار می‌دهیم.

(الف) ساختمان مسکونی فاقد منبع گرمازاست و دمای محیط خارج ثابت است.
در این حالت، معادلهٔ (۱.۱۲) به صورت سادهٔ زیر درمی‌آید:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+ku(t)=ka_\circ,$$

با تابع جواب:

$$u(t)=a_\circ+(u(\circ)-a_\circ)e^{-kt},\qquad t\geq\circ.$$

(ب) در ساختمان مسکونی یک منبع گرمازا و یک ترموستات در نظر گرفته می‌شود تا دمای درونی را در $T_\circ$ درجه ثابت نگه دارد.
در این صورت، $f(t)$ به شکل زیر درمی‌آید:

$$f(t)=k'(T_\circ-u(t)),$$

که در آن k' را ضریب تناسب در نظر گرفته‌ایم و معادلهٔ

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=k(a(t)-u(t))+s(t)+k'(T_\circ-u(t)),$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+(k+k')u(t)=ka(t)+k'T_\circ,$$

را خواهیم داشت با جواب عمومی

$$u(t)=e^{-(k+k')t}+e^{-(k+k')t}\int^t\left[ka(v)+k'T_\circ\right]e^{(k+k')v}dv,\qquad t\geq\circ.$$

(ج) نصب کولر آبی در ساختمان در هوای گرم تابستان و در مناطق نسبتاً خشک.
چنان که می‌دانیم، سرمایش درون ساختمان معمولاً با نصب یک یا چند کولر آبی صورت می‌گیرد؛ زیرا، تبخیر آب سرما ایجاد می‌کند و کولر هوای سرد ناشی از تبخیر آب را به درون ساختمان می‌دهد.

در این شرایط، $s(t)=\circ$ و $f(t)=k'(p(t)-u(t))$؛ که در آن تابع $p(t)$ معمولاً به صورت $p(t)=\circ/\text{۸۵}a(t)$ در نظر گرفته می‌شود. پس، معادلهٔ (۱.۱۳) به شکل زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}&=k(a(t)-u(t))+k'(p(t)-u(t))\\&=(k+\circ/\text{۸۵}k')a(t)-(k+k')u(t),\end{aligned}$$

با جواب

$$u(t)=u(\circ)e^{-(k+k')t}+\left(k+\circ/\text{۸۵}k'\right)e^{-(k+k')t}\int_\circ^t a(v)e^{(k+k')v}dv,\qquad t\geq\circ.$$