

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



انتشارات
۹۲۳

ریاضی پیشرفته برای مهندسان

press.um.ac.ir

دکتر محمد رضائی پژند

استاد دانشگاه فردوسی مشهد

دکتر احمد آفتابی ثانی

دانشیار دانشگاه فردوسی مشهد

دکتر عماد جاجرمی

استادیار مجتمع آموزش عالی

فنی و مهندسی اسفراین

سرشناسه: رضایی پژند، محمد، ۱۳۲۸ -
 عنوان و نام پدیدآور: ریاضی پیشرفته برای مهندسان/ محمد رضایی پژند، احمد آفتابی ثانی، عماد جاجرمی؛
 مشخصات نشر: ویراستار علمی محمدباقر آیانی؛ ویراستار ادبی هانیه اسدپور فعال مشهد.
 مشخصات ظاهری: مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۳.
 فروست: ۴۲۰ ص.
 شابک: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۹۲۳.
 وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا.
 یادداشت: واژه‌نامه. نمایه.
 موضوع: ریاضیات مهندسی -- راهنمای آموزشی (عالی)
 Engineering mathematics -- Study and teaching (Higher)
 ریاضیات مهندسی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
 Engineering mathematics -- Problems, exercises, etc. (Higher)
 شناسه افزوده: آفتابی ثانی، احمد، ۱۳۵۸ -
 شناسه افزوده: جاجرمی، عماد، ۱۳۶۵ -
 شناسه افزوده: آیانی، محمدباقر، ۱۳۴۰ - ، ویراستار
 شناسه افزوده: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.
 رده‌بندی کنگره: TA۳۳۲/۵
 رده‌بندی دیویی: ۶۲۰/۰۰۱۵۱۰۷۶
 شماره کتابشناسی ملی: ۹۷۰۴۱۸۲

ISBN: 978-964-386-620-4

ریاضی پیشرفته برای مهندسان

پدیدآورندگان: دکتر محمد رضایی پژند؛ دکتر احمد آفتابی ثانی؛ دکتر عماد جاجرمی
 ویراستار علمی: دکتر محمدباقر آیانی
 ویراستار ادبی: هانیه اسدپور فعال مشهد
 مشخصات: وزیری، ۲۰۰ نسخه، چاپ اول، تابستان ۱۴۰۳
 چاپ و صحافی: همیار
 بها: ۳/۸۰۰/۰۰۰ ریال
 حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.



انتشارات
۹۲۳

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
 تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶ - ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)
 مؤسسه کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست
 گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)
 مؤسسه دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شماره ۱۴۲
 تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

<http://press.um.ac.ir>

Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

دیاچه.....	۹
فصل ۱. تانسورها	
۱-۱ پیشگفتار.....	۱۱
۲-۱ ویژگی‌های تانسورها.....	۱۱
۳-۱ حساب تانسوری.....	۱۵
۴-۱ کاربرد تانسورها در مهندسی.....	۲۰
۵-۱ گزیده فصل ۱.....	۲۳
۶-۱ خودآزمایی‌های فصل ۱.....	۲۴
فصل ۲. یادآوری معادله‌های دیفرانسیل	
۱-۲ پیشگفتار.....	۲۷
۲-۲ روش تابع نخستین‌گیری.....	۲۸
۳-۲ روش جداسازی.....	۲۸
۴-۲ روش دیفرانسیل کامل.....	۲۹
۵-۲ معادله دیفرانسیل مرتبه یکم همگن.....	۳۱
۶-۲ معادله مرتبه یکم همگن.....	۳۲
۷-۲ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه یکم.....	۳۲
۸-۲ معادله دیفرانسیل برنولی.....	۳۳
۹-۲ معادله به فراخور y	۳۴
۱۰-۲ معادله کلرو.....	۳۵
۱۱-۲ معادله خطی همگن مرتبه دو.....	۳۵
۱۲-۲ معادله خطی ناهمگن مرتبه دو.....	۳۷
۱۳-۲ معادله اوایلر یا کوشی.....	۳۸
۱۴-۲ گزیده فصل ۲.....	۳۹
۱۵-۲ خودآزمایی‌های فصل ۲.....	۴۰

فصل ۳. روش گرین..... ۴۵

- ۱-۳ پیشگفتار..... ۴۵
- ۲-۳ بنیادهای آغازین..... ۴۵
- ۳-۳ تابع‌های جهشی و پله‌ای..... ۴۶
- ۴-۳ پرسمان اندازه مرزی..... ۴۸
- ۵-۳ کارگر وابسته و خودوابستگی..... ۵۰
- ۶-۳ معادله‌های دیفرانسیل مرتبه یک..... ۵۴
- ۷-۳ معادله‌های دیفرانسیل مرتبه دو..... ۶۰
- ۸-۳ شرط‌های مرزی ناهمگن..... ۶۹
- ۹-۳ پرسمان اندازه آغازین..... ۷۳
- ۱۰-۳ گزاره جایگزینی فرد هولم..... ۷۴
- ۱۱-۳ گزیده فصل ۳..... ۷۸
- ۱۲-۳ خودآزمایی‌های فصل ۳..... ۷۸

فصل ۴. معادله‌های با مشتق‌های پاره‌ای..... ۸۵

- ۱-۴ پیشگفتار..... ۸۵
- ۲-۴ بنیادهای آغازین..... ۸۵
- ۳-۴ روش تابع‌های دلخواه..... ۸۸
- ۴-۴ روش خم‌های شناسایی..... ۹۲
- ۵-۴ معادله‌های پاره‌ای مخروطی گونه..... ۹۵
- ۶-۴ معادله‌های مرتبه یک خطی سان..... ۱۱۰
- ۷-۴ فن کنشگر جانشینی..... ۱۱۵
- ۸-۴ روش جداسازی کنشگرها..... ۱۱۷
- ۹-۴ دستگاه مختصه خم گونه..... ۱۲۰
- ۱۰-۴ معادله‌های با اندازه‌های مرزی..... ۱۲۶
- ۱۱-۴ نوسان سازه ریسمانی..... ۱۲۷
- ۱۲-۴ بهره‌جویی از دگرسانی فوریه..... ۱۳۰
- ۱۳-۴ گزیده فصل ۴..... ۱۳۲
- ۱۴-۴ خودآزمایی‌های فصل ۴..... ۱۳۳

فصل ۵. حساب وردشی..... ۱۳۹

- ۱-۵ پیشگفتار..... ۱۳۹

۱۳۹.....	۲-۵ ویژگی های حساب وردشی.....
۱۴۱.....	۳-۵ معادله اویلر - لاگرانژ.....
۱۴۵.....	۴-۵ کار گر دلتا.....
۱۵۰.....	۵-۵ گسترش تابعی ها.....
۱۵۴.....	۶-۵ روش ریتز.....
۱۵۶.....	۷-۵ روش گلرکین.....
۱۵۹.....	۸-۵ گزیده فصل ۵.....
۱۶۰.....	۹-۵ خودآزمایی های فصل ۵.....

فصل ۶. حسابان گویا..... ۱۶۳

۱۶۳.....	۱-۶ پیشگفتار.....
۱۶۴.....	۲-۶ پیشینه کار.....
۱۶۶.....	۳-۶ مشتق گویای یک تابع ارزشمند.....
۱۷۰.....	۴-۶ دنباله تیلور گسترش یافته.....
۱۷۷.....	۵-۶ پاسخ معادله گویا با دنباله تیلور.....
۱۸۰.....	۶-۶ دگرسانی لاپلاس مشتق گویا.....
۱۸۲.....	۷-۶ پاسخ یک معادله پاره ای.....
۱۸۵.....	۸-۶ پاسخ معادله بسل.....
۱۹۰.....	۹-۶ گزیده فصل ۶.....
۱۹۰.....	۱۰-۶ خودآزمایی های فصل ۶.....

فصل ۷. دنباله معادله های دیفرانسیل..... ۱۹۳

۱۹۳.....	۱-۷ پیشگفتار.....
۱۹۴.....	۲-۷ معادله دیفرانسیل بسل.....
۱۹۹.....	۳-۷ معادله دیفرانسیل لژاندر.....
۲۰۱.....	۴-۷ معادله خطی مرتبه بیش از یک.....
۲۰۳.....	۵-۷ پاسخ دنباله ای معادله خطی مرتبه دو.....
۲۰۶.....	۶-۷ اندازه های مرزی.....
۲۱۰.....	۷-۷ اندازه و تابع ویژه.....
۲۱۲.....	۸-۷ روش های مانده های وزنی.....
۲۱۸.....	۹-۷ گزیده فصل ۷.....
۲۱۸.....	۱۰-۷ خودآزمایی های فصل ۷.....

۲۲۵.....	فصل ۸. سامانه اشتروم- لیوویل
۲۲۵.....	۱-۸ پیشگفتار.....
۲۲۵.....	۲-۸ بنیادهای آغازین.....
۲۲۶.....	۳-۸ ویژگی های پرمسان اشتروم- لیوویل.....
۲۳۲.....	۴-۸ گسترش تابع های ویژه.....
۲۳۵.....	۵-۸ گسترش بهفراخور تابع های بسل.....
۲۳۹.....	۶-۸ گسترش بهفراخور تابع لژاندر.....
۲۴۳.....	۷-۸ گزیده فصل ۸.....
۲۴۳.....	۸-۸ خودآزمایی های فصل ۸.....
۲۴۷.....	فصل ۹. واکاوی فوریه
۲۴۷.....	۱-۹ پیشگفتار.....
۲۴۷.....	۲-۹ دنباله راستین فوریه.....
۲۵۶.....	۳-۹ تابع های زوج و فرد.....
۲۶۰.....	۴-۹ دنباله درهم فوریه.....
۲۶۲.....	۵-۹ دگرسانی فوریه.....
۲۶۷.....	۶-۹ کاربرد دگرسانی فوریه.....
۲۶۹.....	۷-۹ گزیده فصل ۹.....
۲۶۹.....	۸-۹ خودآزمایی های فصل ۹.....
۲۷۳.....	فصل ۱۰. واکاوی درهم
۲۷۳.....	۱-۱۰ پیشگفتار.....
۲۷۳.....	۲-۱۰ یادآوری عددهای درهم.....
۲۷۸.....	۳-۱۰ تابع های درهم.....
۲۷۹.....	۴-۱۰ مشتق تابع های درهم.....
۲۸۳.....	۵-۱۰ ویژگی های تابع های تحلیلی درهم.....
۲۸۶.....	۶-۱۰ تابع نخستین گیری از تابع های درهم.....
۲۹۲.....	۷-۱۰ گزاره کوشی.....
۲۹۶.....	۸-۱۰ تابع نخستین کوشی.....
۳۰۰.....	۹-۱۰ گزیده فصل ۱۰.....
۳۰۰.....	۱۰-۱۰ خودآزمایی های فصل ۱۰.....

فصل ۱۱. گزاره مانده‌ها.....	۳۰۵
۱-۱۱ پیشگفتار.....	۳۰۵
۲-۱۱ دنباله لورنت.....	۳۰۵
۳-۱۱ قطب و مرتبه آن.....	۳۰۷
۴-۱۱ گزاره مانده‌ها.....	۳۱۱
۵-۱۱ تابع‌های نخستین راستین.....	۳۱۳
۶-۱۱ تابع‌های نخستین مثلثاتی گویا.....	۳۱۳
۷-۱۱ تابع نخستین تابع‌های گویا.....	۳۱۸
۸-۱۱ تابع نخستین‌های فوریه.....	۳۲۱
۹-۱۱ گزیده فصل ۱۱.....	۳۲۲
۱۰-۱۱ خودآزمایی‌های فصل ۱۱.....	۳۲۳
فصل ۱۲. نگاشت همدیس.....	۳۳۵
۱-۱۲ پیشگفتار.....	۳۳۵
۲-۱۲ نگاشت تابع‌های درهم.....	۳۳۵
۳-۱۲ گونه‌های نگاشت.....	۳۳۸
۴-۱۲ پاسخ معادله‌های همساز.....	۳۴۲
۵-۱۲ پرممان‌های دیریکله و نیومن.....	۳۴۳
۶-۱۲ پاسخ پرممان آبرو.....	۳۴۵
۷-۱۲ گزیده فصل ۱۲.....	۳۴۹
۸-۱۲ خودآزمایی‌های فصل ۱۲.....	۳۴۹
فصل ۱۳. روش دگرسانی دیفرانسیلی.....	۳۵۳
۱-۱۳ پیشگفتار.....	۳۵۳
۲-۱۳ بنیادهای آغازین.....	۳۵۳
۳-۱۳ دگرسانی دیفرانسیلی چند تابع سرشناس.....	۳۵۵
۴-۱۳ حاصل ضرب دو و سه تابع وابسته.....	۳۵۶
۵-۱۳ رابطه بازگشتی.....	۳۵۸
۶-۱۳ گزیده فصل ۱۳.....	۳۷۵
۷-۱۳ خودآزمایی‌های فصل ۱۳.....	۳۷۵

فصل ۱۴. جبر خطی و ماتریس‌ها.....	۳۷۹
۱-۱۴ پیشگفتار.....	۳۷۹
۲-۱۴ ویژگی‌های ماتریس‌ها.....	۳۷۹
۳-۱۴ دستگاه معادله‌های خطی.....	۳۸۲
۴-۱۴ گونه‌های دستگاه معادله‌های خطی.....	۳۸۴
۵-۱۴ روش‌های یافتن پاسخ معادله‌های خطی.....	۳۸۶
۶-۱۴ روش کرامر.....	۳۸۷
۷-۱۴ جداسازی ماتریس ضریب‌ها.....	۳۸۷
۸-۱۴ روش چولسکی.....	۳۹۰
۹-۱۴ روش چولسکی برای ماتریس‌های متقارن.....	۳۹۲
۱۰-۱۴ روش چولسکی بهیودساز.....	۳۹۳
۱۱-۱۴ روش‌های تکراری.....	۳۹۴
۱۲-۱۴ مقدارهای ویژه.....	۳۹۶
۱۳-۱۴ ماتریس تنش.....	۳۹۸
۱۴-۱۴ پاسخ‌یابی معادله درجه سه.....	۴۰۰
۱۵-۱۴ گزیده فصل ۱۴.....	۴۰۵
۱۶-۱۴ خودآزمایی فصل ۱۴.....	۴۰۵
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی.....	۴۰۹
نام‌نامه انگلیسی به فارسی.....	۴۱۵
خاستگاه‌ها.....	۴۱۶
نمایه.....	۴۱۷

دیباچه

مهندسی در گذشته‌های دور دو بخش ارتشی و غیرارتشی داشت. رفته‌رفته بخش ارتشی گسترش یافت و مهندسی‌های برق، شیمی، مکانیک، مواد، هوافضا و دیگر مهندسی‌ها را آفرید. مهندسی غیرارتشی هم در دسته‌بندی مهندسی عمران و بخش‌های وابسته به آن جای گرفت. باید آگاه بود مهندسان در همگی رشته‌ها کوشش می‌کنند تا زندگی آدمی را بهبود بخشند. این کار با ابزار ریاضی و یافتن پاسخ‌های معادله‌های فرمانروا بر رفتار پدیده‌ها و نیز بهینه‌سازی و ساختن دستگاه‌ها انجام می‌پذیرد. ریاضی دانش آراستن، سامان دادن، هماهنگی و قانونمندی است. این کارمایه ارزشمند توانایی دارد که برپایه خردورزی نیرومند، رابطه‌های میان بخش‌های یک سامانه را برقرار کند. برای بهره‌مند شدن بهتر از ساخته‌ها، مهندسان باید آن‌ها را واکاوی کنند و به بارآوری بهینه برسانند.

درست فکر کردن، شکیبایی، پشتکار داشتن و تیزبین بودن، پاره‌ای از ویژگی‌های ریاضی‌دانان هستند. آن‌ها با انجام تمرین یا خودآزمایی‌های فراوان، اندیشه خود را گسترش می‌دهند و با روشی کارا به یافتن پاسخ‌ها می‌پردازند. پیشنهاد خبرگان ریاضی به جوانان تازه کار این است که به جای یادسپاری، باید ریاضی را درک کنند و به دنبال چرایی مسئله یا پرسمان و همچنین راهکار یافتن پاسخ باشند. باید به خاطر سپرد که افزون‌بر خواندن، خودآزمایی نقش بسزایی در یادگیری، توانمندسازی و جبران کاستی‌های ریاضی دارد. برای واری فرایند، باید ریزکارها را نوشت و به تنهایی پاسخ‌ها را یافت. به سخن دیگر، برای دانش‌افزایی و خودباوری بیشتر، باید از کار گروهی و وابسته بودن به دیگری پرهیز کرد.

بیشتر بخش‌های این نوشته به معادله‌های دیفرانسیل بهنجار یا معمولی و نیز معادله‌های پاره‌ای می‌پردازد. واکاوی‌های درهم یا مختلط و فوریه از دیگر بخش‌های این کتاب هستند. تانسورها، حساب بردشی یا تغییرات، حسابان گویا، روش گرین، گزاره یا قضیه مانده‌ها، نگاشت همدیس، جبر خطی و تبدیل یا دگرسانی دیفرانسیلی هم در این نوشته جا گرفته‌اند. برای دانش‌افزایی خوانندگان و به یاری مثال‌ها یا کارورزی‌های گوناگون، پاسخ‌های پرسمان‌ها با دادن ریزکارهای ریاضی در این اثر به دست آمده‌اند تا بتوان همگی فرایند را واری کرد. افزون‌بر این‌ها، تمرین‌ها یا خودآزمایی‌های فراوان برای یادگیری بیشتر در کتاب قرار دارند. واژه‌گزینی و پاسداشت زبان فارسی از ویژگی دیگر این نوشته است. برای رسیدن به این انگیزه پُرازش، نویسندگان از واژه‌نامه‌های سرشناس بهره جسته‌اند تا دانش‌پژوهان جوان با آن‌ها آشنا شوند. در کنار واژه‌های فارسی، برابر رایج

این لغت‌ها نیز می‌آیند. نویسندگان اذعان می‌کنند که هیچ واژه فارسی را نویسندگان نساخته‌اند و همگی آن‌ها را از نوشته‌ها و واژه‌نامه‌های ارزشمند گزینش کرده‌اند.

پیشینه فراهم‌سازی این نوشتار از دوران دانشجویی نویسنده نخست آغاز شد و آراستن اثر سال‌های درازی زمان برد. در گام دیگر و هنگام درس دادن این بخش‌ها، سخن‌ها گسترش یافتند و درست‌تر شدند. سرانجام و در این دو سال پایانی با پرداخت‌ها و مرتب‌سازی، کتاب به این صورت درآمد. همین فرایند را کم‌وبیش دو نویسنده دیگر پیمودند و بخش‌ها را به هم آمیختند تا اثر سیمای کنونی را به خود گرفت. افزون‌بر این‌ها، پیشنهادهای دو تن از استادان ارجمند دانشگاه فردوسی، آقایان دکتر آیانی و دکتر هدتی، وارد نوشته شدند و آن را پُر بار ساختند. این گرامیان کتاب را خواندند و دیدگاه‌های خود را ابراز کردند و سپاس بیکران نویسندگان را برانگیختند. بالاین همه، پدیدآوردن گان اثر می‌دانند که نوشته کنونی کاستی‌هایی نیز دارد که با همکاری دانشمندان و نیز دانش‌پژوهان دیگر پیدا خواهند شد و از میان خواهند رفت. خوانندگان ارجمند می‌توانند نگرش خود را به نشانی گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد بفرستند و با انجام این کار، نویسندگان را بسیار خوشحال نمایند.