

برنام‌ح‌راوندجان‌و



الگوریتم‌های گراف

از تئوری تا پیاده‌سازی

دکتر مصطفی توکلی

عضو هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

دکتر نرجس سابقی

عضو هیئت علمی دانشگاه ولایت

زهرا حامدلبافیان

دکتر فریدون رهبرنیا

عضو هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان و نام پدیدآور:	الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی/پدیدآورندگان مصطفی توکلی؛ ویراستار ادبی هانیه اسدیپور فعال مشهد.
مشخصات نشر:	مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهری:	۱۷۷+۱۰ ص.: مصوّر، جدول، نمودار
فروست:	انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۹۵۶.
شابک:	ISBN: 978-964-386-658-7
وضعیت فهرست‌نویسی:	فیپا.
یادداشت:	پدیدآورندگان مصطفی توکلی، نرجس سابقی، زهرا حامد لبافیان، فریدون رهبرنیا.
یادداشت:	واژه‌نامه. کتابنامه: ص. ۱۵۳-۱۵۵. نمایه.
موضوع:	نظریه گراف
شناسه افزوده:	توکلی، مصطفی، ۱۳۶۵ -
شناسه افزوده:	اسدیپور فعال مشهد، هانیه، ۱۳۶۶-، ویراستار
شناسه افزوده:	دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.
رده‌بندی کنگره:	QA۱۶۶
رده‌بندی دیویی:	۵۱۱/۵
شماره کتابشناسی ملی:	۱۰۲۰۹۲۱۳

الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

پدیدآورندگان: دکتر مصطفی توکلی؛ دکتر نرجس سابقی؛ زهرا حامد لبافیان؛ دکتر فریدون رهبرنیا
ویراستار ادبی: هانیه اسدیپور فعال مشهد
مشخصات: وزیری، ۲۰۰ نسخه، چاپ اول، پاییز ۱۴۰۴
چاپ و صحافی: همیار
بها: ۲/۳۰۰/۰۰۰ ریال
حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.



مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶ - ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)
مؤسسه کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست
گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)
مؤسسه دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شماره ۱۴۲
تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

<http://press.um.ac.ir>

Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

پیشگفتار	خ
۱ تعاریف و مفاهیم بنیادی	۱
۱-۱ مقدمه	۱
۲-۱ نمادگذاری و مفاهیم شمارشی	۱
۱-۲-۱ روابط بازگشتی	۱۰
۲-۲-۱ حل روابط بازگشتی با استفاده از توابع مولد	۱۴
۳-۱ گراف‌های ساده و چندگانه	۱۸
۴-۱ درجه و همسایگی رأس‌ها	۱۹
۵-۱ زیرگراف‌ها	۲۰
۶-۱ مسیرها و همبندی	۲۳
۷-۱ ماتریس‌های مربوط به گراف‌ها	۲۵
۸-۱ برخی از خانواده‌های شناخته‌شده از گراف‌ها	۲۶
۲ مسائل از نظریه گراف	۳۵
۱-۲ مقدمه	۳۵
۲-۲ مسائل کلاسیک نظریه گراف	۳۵
۱-۲-۲ مسئله رنگ‌آمیزی مناسب	۳۵
۲-۲-۲ مسئله تطابق	۳۷
۳-۲-۲ مسئله درخت فراگیر کمینه	۳۸

ج الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

۳۹	مسئله کوتاه‌ترین مسیر	۴-۲-۲
۴۰	مسئله مجموعه غالب	۵-۲-۲
۴۱	مسئله پوشش رأسی	۶-۲-۲
۴۲	مسئله فروشنده دوره‌گرد	۷-۲-۲
۴۳	مسئله p -مرکز متریك	۸-۲-۲
۴۴	مسائل مدرن نظریه گراف	۳-۲
۴۴	مسئله رنگ‌آمیزی غالب	۱-۳-۲
۴۴	مسئله رنگ‌آمیزی تشخیص‌پذیر	۲-۳-۲
۴۶	مسئله بعد متریك محلی	۳-۳-۲
۴۸	مسئله رنگ‌آمیزی مغلوب	۴-۳-۲
۵۰	مسئله موقعیت عمومی	۵-۳-۲
۵۰	مسئله دید متقابل	۶-۳-۲
۵۲	مسائل بعد متریك	۷-۳-۲
۵۵	مسئله متریك یالی غالب	۸-۳-۲
۵۵	مسئله رنگ‌آمیزی (k, l) -مکان‌یاب	۹-۳-۲

۵۹	مروری بر برنامه‌ریزی خطی	۳
۶۲	فرم ماتریسی برنامه‌ریزی خطی	۱-۳
۶۳	روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی	۲-۳
۶۷	مسئله دوگان	۳-۳
۷۴	مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح	۴-۳
۷۵	انواع مسائل عدد صحیح	۱-۴-۳
۷۷	تکنیک‌های مدل‌سازی عدد صحیح	۵-۳
۷۷	تأثیرگذار بودن K محدودیت از میان N محدودیت	۱-۵-۳
۷۸	محدودیت‌هایی با مقادیر گسسته	۲-۵-۳
۷۸	متغیرهایی با مقادیر گسسته	۳-۵-۳
۷۸	مسئله هزینه ثابت	۴-۵-۳

فهرست مطالب ج

۷۹	۵-۵-۳ متغیر وابسته و فعال شدن محدودیت $\sum_j a_j x_j \leq b$
۸۶	۶-۳ روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح
۸۶	۱-۶-۳ حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح با آزادسازی خطی
۸۹	۲-۶-۳ روش شاخه و کران برای حل مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح
۹۳	۴ پیچیدگی محاسباتی
۹۴	۱-۴ پیچیدگی الگوریتم و نماد O بزرگ
۹۷	۲-۴ پیچیدگی محاسباتی مسائل
۹۸	۱-۲-۴ دسته مسائل P و NP
۹۹	۲-۲-۴ کاهش‌های زمان چندجمله‌ای
۱۰۰	۳-۲-۴ NP -کامل بودن
۱۰۲	۳-۴ پیچیدگی مسئله رضایت‌پذیری سه‌جمله‌ای (3-SAT)
۱۰۳	۴-۴ پیچیدگی مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح خطی
۱۰۴	۵-۴ پیچیدگی مسئله متریک یالی غالب گراف
۱۰۷	۶-۴ پیچیدگی مسئله مجموعه متریک l -خوشه‌ای
۱۰۸	۷-۴ پیچیدگی مسئله مجموعه متریک یالی محلی برخی گراف‌های ضربی
۱۱۱	۵ الگوریتم‌های تقریبی
۱۱۱	۱-۵ مقدمه
۱۱۲	۲-۵ الگوریتم تقریبی مسئله پوشش رأسی
۱۱۳	۱-۲-۵ آنالیز الگوریتم تقریبی حل مسئله پوشش رأسی
۱۱۳	۳-۵ مسئله فروشنده دوره‌گرد
۱۱۶	۱-۳-۵ آنالیز الگوریتم مبتنی بر درخت پوشای کمینه برای مسئله TSP
۱۱۶	۴-۵ مسئله پوشش مجموعه
۱۱۷	۱-۴-۵ آنالیز نرخ تقریب الگوریتم حریصانه برای مسئله پوشش مجموعه
۱۱۸	۲-۴-۵ مدل خطی مسئله پوشش مجموعه
	۳-۴-۵ آنالیز الگوریتم گرد کردن اصلاح‌شده برنامه‌ریزی خطی برای مسئله پوشش
۱۲۰	مجموعه

ح الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

- ۴-۴-۵ الگوریتم تقریبی حل مسئله پوشش مجموعه براساس روش اولیه-دوگان . . . ۱۲۰
- ۵-۴-۵ آنالیز الگوریتم مبتنی بر روش اولیه-دوگان برای حل مسئله پوشش مجموعه . . . ۱۲۰
- ۵-۵ الگوریتم ۲-تقریب برای مسئله p -مرکز ۱۲۱
- ۶-۵ محاسبه عدد اجبار سراسری با استفاده از الگوریتم حریصانه ۱۲۳
- ۷-۵ ضریب تقریب الگوریتم محاسبه GFS برای تطابق‌های ماکسیمال در گراف ۱۲۷

۶ الگوریتم‌های فراابتکاری ۱۳۱

- ۱-۶ مقدمه ۱۳۱
- ۲-۶ الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه ۱۳۲
- ۱-۲-۶ پیاده‌سازی الگوریتم جست‌وجوی ممنوعه روی مسئله رنگ‌آمیزی
- تشخیص‌پذیر گراف‌ها ۱۳۳
- ۲-۲-۶ مقایسه الگوریتم جست‌وجوی محلی و جست‌وجوی ممنوعه ۱۳۶
- ۳-۶ الگوریتم ژنتیک ۱۳۷
- ۱-۳-۶ جمعیت در الگوریتم ژنتیک ۱۳۸
- ۲-۳-۶ تابع برازندگی در الگوریتم ژنتیک ۱۳۹
- ۳-۳-۶ عملگر انتخاب در الگوریتم ژنتیک ۱۳۹
- ۴-۳-۶ عملگر ترکیب در الگوریتم ژنتیک ۱۴۰
- ۵-۳-۶ عملگر جهش در الگوریتم ژنتیک ۱۴۱
- ۶-۳-۶ پیاده‌سازی الگوریتم ژنتیک روی مسئله موقعیت عمومی در گراف ۱۴۳
- ۴-۶ الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده ۱۴۷
- ۱-۴-۶ پیاده‌سازی الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده روی مسئله موقعیت عمومی در گراف ۱۴۹

پیشگفتار

نظریه گراف به عنوان یکی از بنیادی‌ترین و پرکاربردترین شاخه‌های ریاضیات گسسته، جایگاه ویژه‌ای در مدل‌سازی ساختارها و سیستم‌های پیچیده دارد. از تحلیل شبکه‌های ارتباطی و حمل و نقل گرفته تا کاربردهای میان‌رشته‌ای در بیوانفورماتیک، علوم اجتماعی، علم داده، یادگیری ماشین و هوش مصنوعی، ساختارهای گرافی به ما این امکان را می‌دهند تا ارتباطات و تعاملات پیچیده را تحلیل و الگوهای پنهان را کشف کنیم. ویژگی انتزاعی و درعین حال کاربردی گراف‌ها موجب شده است که طی دهه‌های اخیر، نظریه گراف نه تنها در حوزه ریاضیات، بلکه در علوم مهندسی، علوم رایانه، اقتصاد و حتی علوم انسانی مورد توجه گسترده قرار گیرد. درعین حال، بسیاری از مسائل مهم در نظریه گراف به دلیل ماهیت ترکیبیاتی و گسسته خود، در دسته مسائل سخت محاسباتی قرار می‌گیرند. حل دقیق این مسائل، به ویژه در مقیاس‌های بزرگ، به دلیل رشد نمایی فضای حالت، عملاً غیرممکن یا بسیار پرهزینه است. در این شرایط است که بهینه‌سازی ترکیبیاتی به عنوان یکی از شاخه‌های کلیدی در علوم رایانه و ریاضیات کاربردی وارد عمل می‌شود. این حوزه با تمرکز بر یافتن بهترین راه حل ممکن در میان تعداد محدودی (اما بسیار زیاد) از حالات ممکن، ابزارها و الگوریتم‌هایی را فراهم می‌سازد که امکان حل یا تقریب‌زنی مناسب برای مسائل گرافی را فراهم می‌آورد. در مسائل گراف، بهینه‌سازی ترکیبیاتی در حل مسائلی نظیر یافتن کوتاه‌ترین مسیر، بیشینه‌سازی جریان، رنگ‌آمیزی گراف، تطابق بیشینه، پوشش کمینه، طراحی شبکه‌های مقاوم و بهینه‌سازی ساختارهای پیچیده نقش تعیین‌کننده دارد. این مسائل نه تنها از منظر تئوری اهمیت دارند، بلکه در مسائل صنعتی، شبکه‌های کامپیوتری، تحلیل داده‌های بزرگ، طراحی سیستم‌های پیچیده و الگوریتم‌های هوشمند نیز کاربرد فراوانی یافته‌اند. از این رو، پیوند میان نظریه گراف و بهینه‌سازی ترکیبیاتی، نه یک تقاطع ساده، بلکه یک هم‌افزایی عمیق و قدرتمند است. تمایز اصلی این کتاب در تدوین مطالب مرتبط با نظریه گراف و بهینه‌سازی ترکیبیاتی در یک مجموعه منسجم است که به صورت تخصصی این دو حوزه مهم را به هم پیوند می‌دهد. ساختار کتاب به گونه‌ای تنظیم

د الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

شده است که خواننده را از مبانی و مفاهیم پایه‌ای، به تدریج به سوی مباحث پیشرفته و چالش‌برانگیز هدایت کند. فصل‌های ابتدایی به معرفی مفاهیم اولیه نظریه گراف، ساختارهای پایه و مفاهیم بنیادی در بهینه‌سازی ترکیباتی اختصاص یافته‌اند. در ادامه، فصل‌های میانی به بررسی الگوریتم‌های مهم، روش‌های طراحی و تحلیل پیچیدگی آن‌ها می‌پردازند و فصل‌های پایانی به مسائل پیشرفته‌تر همچون حل برخی مسائل NP-کامل، الگوریتم‌های تقریبی و الگوریتم‌های فراابتکاری اختصاص دارند. در این کتاب تلاش شده است تا تعادل دقیقی میان نظریه و عمل برقرار شود. به همین منظور، هر مبحث نظری با ارائه الگوریتم‌های اجرایی و شبه‌کدهای قابل پیاده‌سازی همراه شده و در بسیاری از موارد تحلیل ریاضی و اثبات‌های دقیق ارائه گردیده‌اند. این ویژگی باعث می‌شود کتاب نه تنها از دیدگاه نظری قابل اتکا باشد، بلکه برای مهندسان و دانشجویانی که به دنبال کاربرد عملی این مفاهیم هستند نیز کاملاً مفید واقع شود. این کتاب به گونه‌ای طراحی شده است که علاوه بر دانشجویان تحصیلات تکمیلی و دکتری رشته‌های ریاضی و مهندسی، برای دوره‌های آموزشی مرتبط با بهینه‌سازی ترکیباتی و نظریه گراف نیز بسیار قابل استفاده و مفید باشد. از دیگر ویژگی‌های مهم این کتاب، ماهیت آموزشی و تمرینی آن است. در پایان هر فصل، تمرین‌هایی شامل مسائل نظری، الگوریتمی و کدنویسی ارائه شده است. همچنین، در طی فصل‌ها مثال‌های متعدد همراه با کد پایتون آورده شده‌اند تا خواننده بتواند مفاهیم مطرح‌شده را در عمل تجربه کند. افزون بر این، مجموعه‌ای از پروژه‌های عملی نیز در پایان برخی فصل‌ها طراحی شده‌اند که مناسب برای دوره‌های آموزشی دانشگاهی یا پروژه‌های تحقیقاتی اولیه‌اند. در بخشی از کتاب تمرکز ویژه‌ای بر مسائل NP-کامل و الگوریتم‌های تقریبی قرار گرفته است. در این بخش، علاوه بر معرفی و دسته‌بندی دقیق مسائل NP-کامل در حوزه گراف، رویکردهای تقریبی، الگوریتم‌های حریم‌خانه و تحلیل‌های عملکرد آن‌ها نیز به صورت سیستماتیک بررسی شده‌اند. برای افزایش بهره‌وری آموزشی و پژوهشی، کدهای پیاده‌سازی شده بسیاری از الگوریتم‌های مطرح‌شده در کتاب، به زبان برنامه‌نویسی پایتون، در مخزن گیت‌هاب به آدرس زیر در دسترس قرار گرفته‌اند:

<https://github.com/Graph-projects-GTALab/graph-algorithms-in-python>

این کدها می‌توانند به عنوان پایه‌ای برای آزمایش، توسعه و درک عملی مفاهیم برای دانشجویان و پژوهشگران مورد استفاده قرار گیرند. هدف اصلی این اثر، ایجاد پلی میان مباحث نظری عمیق و پیاده‌سازی الگوریتم‌های ارائه شده است؛ پلی که نه تنها به درک بهتر ساختارهای گرافی و ابزارهای بهینه‌سازی کمک می‌کند، بلکه راه را برای توسعه روش‌ها و مدل‌های نوآورانه در حل مسائل واقعی هموار می‌سازد. امید است این اثر بتواند در مسیر آموزش، پژوهش و توسعه الگوریتم‌های بهینه‌سازی گرافی، گامی مؤثر و الهام‌بخش باشد.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم بنیادی

۱-۱ مقدمه

مجموعه رئوس^۲ در این فصل با مفاهیم اولیه گراف و ترکیبیات که در فصل‌های آتی استفاده خواهند شد، آشنا می‌شویم.

۲-۱ نمادگذاری و مفاهیم شمارشی

مجموعه همه زیرمجموعه‌های یک مجموعه X را مجموعه توانی^۳ X می‌نامیم و با نماد $P(X)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۲-۱ فرض کنید $X = \{1, 2, 3\}$. در این صورت،

$$P(X) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

اصل جمع^۴:

اگر کار A_1 را بتوان به n_1 طریق و بعد از آن کار A_2 را بتوان به n_2 طریق و ... و کار A_k را به n_k طریق انجام داد و اگر هیچ جفتی از این کارها را نتوان هم‌زمان انجام داد، آنگاه یکی از این کارها را می‌توان به $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ طریق انجام داد.

-
2. Vertex set
 3. Power set
 4. Addition principle

۲ الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

نکته: در شمارش، «یا» معادل جمع است.

مثال ۱-۲-۲ دو کتاب ریاضی و دو کتاب فیزیک داریم. به چند روش می‌توان یک کتاب ریاضی یا یک کتاب فیزیک انتخاب کرد؟

پاسخ: بنابه اصل جمع، انتخاب یک کتاب ریاضی یا فیزیک به $2 + 2 = 4$ طریق امکان‌پذیر است. شکل ۱-۱ را ملاحظه فرمایید.

روش اول	روش دوم	روش سوم	روش چهارم
			

شکل ۱-۱ روش‌های انتخاب یک کتاب ریاضی یا یک کتاب فیزیک

اصل ضرب^۱:

اگر کار A_1 را بتوان به n_1 طریق و بعد از آن کار A_2 را بتوان به n_2 طریق و ... و کار A_k را به n_k طریق انجام داد و اگر هیچ جفتی از این کارها را نتوان هم‌زمان انجام داد، آنگاه می‌توان این k کار را به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ طریق انجام داد.

نکته: در شمارش، «و» معادل ضرب است.

مثال ۱-۲-۳ دو کتاب ریاضی و دو کتاب فیزیک داریم. به چند روش می‌توان یک کتاب ریاضی و یک کتاب فیزیک انتخاب کرد؟

پاسخ: بنابه اصل ضرب، انتخاب یک کتاب ریاضی و یک کتاب فیزیک به $2 \times 2 = 4$ طریق امکان‌پذیر است. شکل ۲-۱ را ملاحظه فرمایید.

روش اول	روش دوم	روش سوم	روش چهارم
 	 	 	 

شکل ۲-۱ روش‌های انتخاب یک کتاب ریاضی و یک کتاب فیزیک

تعاریف و مفاهیم بنیادی ۳

اگر X گردایه‌ای از n شیء متمایز باشد، آنگاه هر آرایش خطی از عناصر X را یک جایگشت^۱ X نامیم.

مثال ۱-۲-۴ جایگشت‌های $X = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید.

پاسخ:

۱۲۳، ۱۳۲، ۲۱۳، ۲۳۱، ۳۱۲، ۳۲۱.

نکته: تعداد جایگشت‌های مجموعه n عضوی X برابر $n!$ است.

نکته: تعداد طرق توزیع n شیء متمایز در n ظرف یا مکان متمایز، به‌طوری‌که در هر ظرف فقط یک شیء قرار بگیرد، برابر $n!$ است.

مثال ۱-۲-۵ چند عدد چهار رقمی با ارقام متمایز می‌توان با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ ساخت؟

پاسخ: ۴!

تعداد طرق انتخاب k شیء از n شیء متمایز، به‌طوری‌که ترتیب مهم باشد، برابر $\frac{n!}{(n-k)!}$ است که با نماد $P(n, k)$ نمایش می‌دهیم و آن را ترتیب^۲ k از n می‌خوانیم.

مثال ۱-۲-۶ چند واژه سه‌حرفی با استفاده از حروف واژه $write$ وجود دارد، با این شرط که از هر حرف در یک واژه حداکثر یک بار استفاده شود.

پاسخ: برای ساخت واژه سه‌حرفی، درواقع باید ۳ حرف از ۵ حرف w, r, i, t, e را انتخاب کرد. از طرفی، چون سه حرف انتخاب‌شده به هر ترتیبی که کنار هم قرار بگیرند، یک واژه جدید ایجاد می‌کنند، پس ترتیب انتخاب مهم است. بنابراین با انتخاب ۳ شیء از ۵ شیء متمایز که ترتیب مهم است، روبه‌رو هستیم و بنابراین جواب برابر $P(5, 3)$ است.

توجه: تعداد حالاتی که n نفر در یک صف قرار می‌گیرند، برابر $n!$ است. ولی وقتی بخواهیم n نفر را دور یک دایره قرار دهیم n صف که قبلاً متمایز بودند به دایره‌ای یکسان تبدیل می‌شوند و بنابراین تعداد جایگشت‌های دور یک میز گرد برابر با $(n-1)!$ است.

یک جایگشت دوری^۳ از n شیء متمایز، آرایشی از n شیء دور یک میز گرد است که تعدادشان برابر $(n-1)!$ است.

-
1. Permutation
 2. Permutations
 3. Cyclic permutation

۴ الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

مثال ۱-۲-۷ به چند طریق ۵ نفر می‌توانند دور یک میزگرد بنشینند؟
پاسخ: ۴!

اگر گردایه X مرکب از n شیء باشد که به k گروه تقسیم شده‌اند، به‌طوری‌که در گروه اول n_1 شیء یکسان، در گروه دوم n_2 شیء یکسان و ... و در گروه k ام n_k شیء یکسان قرار دارد ($n = n_1 + \dots + n_k$) و هیچ شیئی از یک گروه همانند اشیای سایر گروه‌ها نباشد، آنگاه تعداد جایگشت‌های تعمیم‌یافته این n شیء برابر $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ است که این عدد را با نماد $P(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$ نمایش می‌دهند.

مثال ۱-۲-۸ گردایه‌ای مرکب از ۲ توپ سیاه یکسان و ۲ توپ سفید یکسان در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان این ۴ توپ را در ۴ سبد به شماره‌های ۱ تا ۴ گذاشت، به‌طوری‌که در هر سبد حداکثر یک توپ قرار داده شود؟

پاسخ: $P(4; 2, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6$

تعداد طرق انتخاب k شیء متمایز از n شیء متمایز، به‌طوری‌که ترتیب مهم نباشد، برابر $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است که با نماد $C(n, k)$ یا $\binom{n}{k}$ نمایش می‌دهیم و آن را ترکیب k از n می‌خوانیم.

مثال ۱-۲-۹ به چند روش می‌توان ۴ نفر از یک کلاس ۳۰ نفره انتخاب کرد؟

پاسخ: $C(30, 4) = \frac{30!}{4! \cdot (30-4)!} = \frac{30!}{4! \cdot 26!}$

نکته: چون $C(n, k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ پس $P(n, k) = k! \cdot C(n, k)$

فرض کنید که گردایه X مرکب از n شیء متمایز است و $n = n_1 + \dots + n_k$ که در آن n_i (برای $1 \leq i \leq k$) عدد صحیح نامنفی است. ابتدا n_1 شیء را به $C(n, n_1)$ طریق انتخاب می‌کنیم و سپس از $n - n_1$ شیء باقی‌مانده n_2 شیء به $C(n - n_1, n_2)$ طریق انتخاب می‌کنیم و این عمل را تا انتخاب n_k شیء به $C(n - n_1 - \dots - n_{k-1}, n_k)$ طریق از $n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}$ شیء باقی‌مانده ادامه می‌دهیم. بنابراین بنابر اصل ضرب، انتخاب n_1 شیء از n شیء متمایز و n_2 شیء از $n - n_1$ شیء و ... و n_k شیء از $n - n_1 - \dots - n_{k-1}$ شیء متمایز به $C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot \dots \cdot C(n - n_1 - \dots - n_{k-1}, n_k)$ طریق امکان‌پذیر است.

تعاریف و مفاهیم بنیادی ۵

هر طریق انتخاب این چنین را یک ترکیب تعمیم یافته می نامیم و تعداد ترکیب های تعمیم یافته بالا را با نماد $C(n; n_1, \dots, n_k)$ نمایش می دهیم.

توجه: چون $C(n, n_1) \cdot C(n - n_1, n_2) \cdot \dots \cdot C(n - n_1 - \dots - n_{k-1}, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ پس

$$C(n; n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

قضیه ۱-۲-۱۰ فرض کنید $n_1 + \dots + n_k \leq n$ که در آن n_i (برای $1 \leq i \leq k$) عدد صحیح نامنفی است. در این صورت،

$$P(n; n_1, \dots, n_k) = C(n; n_1, \dots, n_k).$$

فرض کنید X یک گردایه از n شیء متمایز و r یک عدد صحیح نامنفی است. آرایشی سطری از r شیء از اشیای X که تکرار استفاده از اشیای مجاز است را یک r -دنباله از X می نامند. نکته: با توجه به تعریف بالا واضح است که تعداد r -دنباله های عناصر گردایه n عضوی X برابر n^r است.

مثال ۱-۲-۱۱ چند واژه سه حرفی با استفاده از حروف واژه $write$ می توان ساخت؟ پاسخ: $n = 5$ و $r = 3$ و بنابراین تعداد این واژگان برابر است با 5^3 .

قضیه ۱-۲-۱۲ قضیه (چند جمله ای): فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت الف. هر جمله از بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ به صورت $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ است که در آن $n_i \geq 0$ ، i هر $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ب. ضریب جمله $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ در بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ برابر $C(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$ است.

مثال ۱-۲-۱۳ ضریب $x^3 y^4$ در بسط $(x + y)^7$ را به دست آورید. پاسخ: $C(7; 3, 4)$.

قضیه ۱-۲-۱۴ فرض کنید n یک عدد طبیعی و r یک عدد صحیح نامنفی باشد. در این صورت، تعداد طرqi که می توان r شیء یکسان را به دلخواه بین n ظرف متمایز تقسیم کرد، برابر $C(n + r - 1, n - 1)$ است.

۶ الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

اگر X گردایه‌ای مرکب از n شیء متمایز و r یک عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه با مجاز بودن تکرار، هر انتخاب r شیء از اشیای X را یک r -گردایه گوئیم.

نکته: با توجه به تعریف بالا و قضیه قبل، واضح است که تعداد r -گردایه‌های X برابر $C(n+r-1, n-1)$ است.

قضیه ۱-۲-۱۵ فرض کنید n یک عدد طبیعی و r یک عدد صحیح نامنفی باشد. تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ برابر $C(n+r-1, n-1)$ است.

نتیجه ۱-۲-۱۶ فرض کنید n یک عدد طبیعی و r یک عدد صحیح نامنفی باشد. تعداد جواب‌های صحیح نامنفی نامساوی خطی $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq r$ برابر $C(n+r, n)$ است.

مثال ۱-۲-۱۷ تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر را محاسبه کنید.

$$x + y + z = 13, \quad x, y, z \geq 0$$

پاسخ: $n = 3$ و $r = 13$ و بنابراین پاسخ برابر است با

$$C(3 + 13 - 1, 3 - 1) = C(15, 2).$$

فرض کنید n فرد و n صندلی با شماره‌های ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. اگر این افراد طوری روی صندلی‌ها بنشینند که هیچ‌کس در صندلی هم‌شماره خود قرار نگیرد، آنگاه می‌گوییم که یک جایگشت پریش از این افراد داریم. تعداد جایگشت‌های پریش n شیء متمایز را با نماد D_n نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۲-۱۸ قضیه (اصل شمول و طرد): اگر $A_1, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌های متناهی از X باشند، آنگاه

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n| = |X| - s_1 + s_2 - s_3 + \dots + (-1)^n s_n$$

که در آن

$$s_1 = |A_1| + \dots + |A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i|,$$

$$s_2 = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|,$$

$\vdots$

تعاریف و مفاهیم بنیادی ۷

$$s_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|,$$

$$\vdots$$

$$s_n = |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

فرض کنید r و n اعدادی طبیعی باشند. تعداد افرازه‌های مجموعه‌ای r عضوی به صورت اجتماعی از n مجموعه ناتهی را با نماد $\{r_n\}$ یا $S(r, n)$ نشان می‌دهیم و آن را r به n مجموعه می‌خوانیم. این اعداد را اعداد استرلینگ نوع دوم^۱ می‌نامیم.

مثال ۱-۲-۱۹ $S(4, 2)$ را محاسبه کنید.

پاسخ: براساس تعریف بالا، $S(4, 2)$ برابر با تعداد روش‌های افراز مجموعه $X = \{1, 2, 3, 4\}$ به دو مجموعه ناتهی است. از طرفی داریم:

روش اول افراز: $\{1, 2\}$ ، $\{3, 4\}$ ، روش دوم افراز: $\{1, 3\}$ ، $\{2, 4\}$ ، روش سوم افراز: $\{1, 4\}$ ، $\{2, 3\}$ ، روش چهارم افراز: $\{1\}$ ، $\{2, 3, 4\}$ ، روش پنجم افراز: $\{2\}$ ، $\{1, 3, 4\}$ ، روش ششم افراز: $\{3\}$ ، $\{1, 2, 4\}$ ، روش هفتم افراز: $\{4\}$ ، $\{1, 2, 3\}$

پس به ۷ روش می‌توان مجموعه X را به دو مجموعه ناتهی افراز کرد و بنابراین $S(4, 2) = 7$.

قضیه ۱-۲-۲۰ فرض کنید که A گردایه‌ای از n شیء متمایز است. تعداد r -دنباله‌هایی از A که در آن‌ها هر شیء حداقل یک بار ظاهر می‌شود برابر $n!S(r, n)$ است (که $r \geq n$).

فرض کنیم r و n اعداد طبیعی هستند. تعداد افرازه‌های مجموعه‌ای r عضوی به صورت اجتماعی از n دور ناتهی را با نماد $[r_n]$ نمایش می‌دهیم و آن را r به n دور می‌خوانیم. این اعداد را اعداد استرلینگ نوع اول^۲ گویند.

مثال ۱-۲-۲۱ فرض کنید $f: N \rightarrow X$ باشد که N گردایه‌ای از n توپ و X گردایه‌ای از x جعبه است. در این صورت، جدول ۱-۱ را کامل کنید.

پاسخ: برای پاسخ به این سؤال، باید به این نکته توجه کرد که f پوشاست؛ یعنی هیچ جعبه‌ای خالی نماند و f یک‌به‌یک است؛ یعنی داخل هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد. همچنین، توجه کنید که نماد $[n \leq x]$ نشان‌دهنده عدد یک است اگر $n \leq x$ و در غیر این صورت، صفر را نشان می‌دهد. برای

1. Stirling numbers of the second kind

2. Stirling numbers of the first kind

۸ الگوریتم‌های گراف: از تئوری تا پیاده‌سازی

جدول ۱-۱

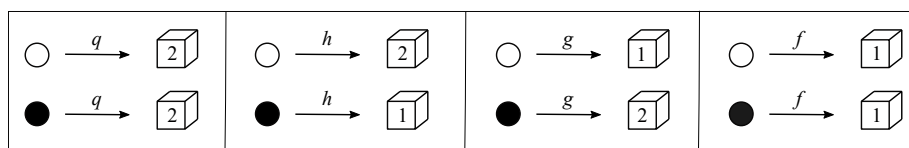
عناصر N	عناصر X	تعداد توابع f	تعداد توابع یک‌به‌یک f	تعداد توابع پوشا f
متمايز	متمايز	؟	؟	؟
غيرمتمايز	متمايز	؟	؟	؟
متمايز	غيرمتمايز	؟	؟	؟

سهولت در پاسخ‌گویی، ابتدا خانه‌های جدول را مطابق شکل ۲-۱ شماره‌گذاری و سپس براساس شماره‌ها پاسخ‌گویی می‌کنیم.

جدول ۲-۱

عناصر N	عناصر X	تعداد توابع f	تعداد توابع یک‌به‌یک f	تعداد توابع پوشا f
متمايز	متمايز	۱	۲	۳
غيرمتمايز	متمايز	۴	۵	۶
متمايز	غيرمتمايز	۷	۸	۹

۱. پاسخ عبارت است از x^n . چون در این حالت، برای هر توپ از مجموعه N ، تعداد x جعبه متمایز وجود دارد که تابع می‌تواند آن توپ را به یکی از جعبه‌ها (به x حالت) ببرد. از طرفی، تعداد توپ‌ها برابر n است و بنابراین تعداد توابع از N به X برابر است با $x \times x \times \dots \times x = x^n$. به‌عنوان مثال، در شکل ۳-۱ کلیه توابع از N شامل توپ‌های سفید و سیاه به X شامل جعبه‌های شماره ۱ و ۲ را نشان می‌دهد. مثلاً تابع f هر دو توپ را به جعبه شماره ۱ می‌برد، ولی تابع g توپ سفید را به جعبه ۱ و توپ سیاه را به جعبه ۲ می‌برد.



شکل ۳-۱ کلیه توابع از N شامل دو توپ سفید و سیاه به X شامل دو جعبه با شماره‌های ۱ و ۲

۲. پاسخ $P(x, n)$ می‌شود. چون در این حالت، در هر جعبه حداکثر یک توپ باید باشد، به تعداد توپ‌ها جعبه انتخاب می‌کنیم. همچنین، چون توپ‌ها و جعبه‌ها متمایز هستند، تعداد روش‌های انتخاب این جعبه‌ها برابر است با $P(x, n)$.