

برنام‌د اوندجان دؤ

ماتريس و جبر خطي

به كمك متلب



كانتي بوشان داتا

ترجمه:

دكتور فائزه توتونيان

استاد دانشگاه فردوسی مشهد

منصوره صائمی بجنستانی

دكتور داود خجسته سالکویه

استاد دانشگاه گیلان

سرشناسه:	داتا، کانتی بوشان	Datta, Kanti Bushan
عنوان و نام پدیدآور:	ماتریس و جبر خطی به کمک متلب/ کانتی بوشان داتا؛ ترجمه فائزه توتونیان، منصوره صائمی بجنستانی، داود خجسته سالکویه.	
مشخصات نشر:	مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۴.	
مشخصات ظاهری:	۹۳۸ ص. مصور، جدول، نمودار.	
فروست:	انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۹۵۷.	
شابک:		ISBN: 978-964-386-659-4
وضعیت فهرست‌نویسی:	فیپا.	
یادداشت:	عنوان اصلی: Matrix and linear algebra : aided with MATLAB, 2nd ed, 2008.	
یادداشت:	واژه‌نامه. کتابنامه: ص. [۸۸۹] - ۹۰۱. نمایه.	
موضوع:	ماتریس‌ها -- برنامه‌های کامپیوتری	Matrices -- Computer programs
	متلب	MATLAB
	ماتریس‌ها -- داده‌پردازی	Matrices -- Data processing
	جبر خطی -- برنامه‌های کامپیوتری	Algebras, Linear -- Computer programs
	جبر خطی -- داده‌پردازی	Algebras, Linear -- Data processing
شناسه افزوده:	توتونیان، فائزه، ۱۳۲۶ - ، مترجم	
شناسه افزوده:	صائمی بجنستانی، منصوره، ۱۳۳۸ - ، مترجم	
شناسه افزوده:	خجسته سالکویه، داود، ۱۳۴۹ - مترجم	
شناسه افزوده:	دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.	
رده‌بندی کنگره:	QA188	
رده‌بندی دیویی:	۵۱۲/۹۴۳۴۰۲۸۵	
شماره کتابشناسی ملی:	۱۰۳۵۴۰۶۹	

ماتریس و جبر خطی به کمک متلب

پدیدآورنده: کانتی بوشان داتا
 ترجمه: دکتر فائزه توتونیان، منصوره صائمی بجنستانی، دکتر داود خجسته سالکویه
 مشخصات: وزیری، ۲۰۰ نسخه، چاپ اول، زمستان ۱۴۰۴
 چاپ و صحافی: همیار
 بها: ۱۳,۰۰۰/۰۰۰ ریال
 حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.



انتشارات
۹۵۷

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
 تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶ - ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)
 مؤسسه کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن بست
 گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)
 مؤسسه دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شماره ۱۴۲
 تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

<http://press.um.ac.ir>

Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

پیشگفتار مؤلف	یازدهم
پیشگفتار برای نسخهٔ اول	سیزدهم
پیشگفتار مترجمان	هفدهم
فصل اول جبر ماتریسی	۱
۱.۱ تعریف یک ماتریس	۹
۲.۱ اعمال بر روی ماتریس‌ها	۱۰
۱.۲.۱ خاصیت‌های جمع و ضرب اسکالر ماتریس‌ها	۱۲
۲.۲.۱ خاصیت‌های ضرب ماتریسی	۱۴
۳.۲.۱ خاصیت‌های ترانزادهٔ ماتریس	۱۷
۳.۱ ماتریس‌های متقارن، هرمیتی و مثلثی	۱۸

۲۱	توان‌ها و اثر یک ماتریس مربعی	۴.۱
۲۲	مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری یک ماتریس	۵.۱
۲۳	میدان و ماتریس روی یک میدان دلخواه	۶.۱
۲۶	اعمال ماتریسی با متلب	۷.۱
۳۱	مسائل	
۳۷	فصل دوم دترمینان	
۳۷	جایگشت و جابه‌جایی	۱.۲
۳۸	دترمینان، هم‌عامل و کهاد	۲.۲
۴۶	خاصیت‌های دترمینان‌ها	۳.۲
۵۱	محاسبهٔ دترمینان‌ها	۴.۲
۶۴	مسائل	
۷۳	فصل سوم معکوس یک ماتریس	
۷۳	ماتریس منفرد: ماتریس الحاقی و معکوس یک ماتریس	۱.۳
۷۷	خاصیت‌های مهم معکوس ماتریس	۲.۳
۷۸	معکوس یک ماتریس با افزایش‌بندی	۳.۳
۸۹	مسائل	
۹۹	فصل چهارم رتبه و هم‌ارزی	
۹۹	زیرماتریس: رتبه	۱.۴
۱۰۱	تبدیل‌های مقدماتی	۲.۴
۱۰۶	هم‌ارزی و شکل نرمال	۳.۴
۱۰۹	معکوس یک ماتریس به‌روش کاهش گام به گام $[A; I]$	۴.۴
۱۱۰	معکوس یک ماتریس با کمک ماتریس‌های مقدماتی	۵.۴
۱۱۲	شکل متعارف هم‌ارز سطری و هم‌ارز ستونی	۶.۴
۱۱۶	خاصیت‌های رتبه	۷.۴

فهرست مطالب پنجم

۱۱۸	معکوس راست و معکوس چپ یک ماتریس
۱۲۲	مسائل

فصل پنجم فضای برداری ۱۲۵

۱۲۵	۱.۵ فضای برداری
۱۳۱	۲.۵ وابستگی خطی، پایه و بُعد
۱۴۱	۳.۵ زیرفضای برداری
۱۴۵	۱.۳.۵ فضای برداری به عنوان جمع مستقیم زیرفضاها
۱۴۸	۴.۵ فضاهای ضرب داخلی
۱۵۸	۵.۵ پایه یکامتعامد و فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت
۱۶۵	۶.۵ دستگاه معادلات خطی: قاعده کرامر
۱۸۳	۷.۵ رتبه و پوچی: نامساوی سیلوستر
۱۹۰	۸.۵ محاسبه وابستگی و استقلال خطی بردارها
۱۹۹	۱.۸.۵ روش حذفی گاوس
۲۰۴	۲.۸.۵ روش RC (یا RREF) (بر اساس شکل استاندارد هم‌ارز سطری)
۲۱۰	۹.۵ روش‌های متلب در فضاهای برداری
۲۱۶	مسائل

فصل ششم تبدیل خطی و ماتریس‌ها ۲۲۵

۲۲۵	۱.۶ تبدیل خطی
۲۳۴	۲.۶ خاصیت‌های تبدیل‌های خطی
۲۵۰	۳.۶ ماتریس یک تبدیل خطی
۲۵۶	۱.۳.۶ ماتریس یک تبدیل هم‌مانی و صفر
۲۵۸	۲.۳.۶ ماتریس مجموع دو تبدیل خطی و یک مضرب اسکالر از یک تبدیل خطی
۲۵۹	۳.۳.۶ ماتریس یک تبدیل مرکب
۲۶۰	۴.۳.۶ ماتریس یک تبدیل معکوس

۲۶۱	تغییر پایه	۴.۶
۲۶۸	تبدیل‌های متعامد و یکانی	۵.۶
۲۷۴	تابع‌های خطی: فضای دوگان: فضای دو-دوگان	۶.۶
۲۸۰	تبدیل خطی و ترانزاده یک ماتریس: فضای دوگان	۱.۶.۶
۲۸۶	فضای دو-دوگان	۲.۶.۶
۲۹۰	الحاقی یک تبدیل خطی	۳.۶.۶
۳۰۱	مسائل	

فصل هفتم مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، و معادله مشخصه ۳۱۵

۳۱۶	مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، و معادله مشخصه یک ماتریس	۱.۷
۳۲۲	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک تبدیل خطی	۱.۱.۷
۳۲۵	خاصیت‌های بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز	۲.۷
۳۳۰	بردار ویژه چپ و بردار ویژه راست	۱.۲.۷
۳۳۵	تبدیل خطی قطری‌شدنی	۲.۲.۷
۳۳۷	چندجمله‌ای ماتریسی و لامدا ماتریس	۳.۷
۳۳۷	چندجمله‌ای‌های ماتریسی	۱.۳.۷
۳۳۹	لامدا ماتریس یا چندجمله‌ای ماتریسی	۲.۳.۷
۳۴۰	ترکیب لامدا ماتریس‌ها	۳.۳.۷
۳۵۱	چندجمله‌ای عملگر	۴.۳.۷
۳۵۳	چندجمله‌ای مشخصه، چندجمله‌ای پوچ‌ساز، و چندجمله‌ای مینیمال	۴.۷
۳۶۳	قضیه کیلی-همیلتون و چندجمله‌ای مینیمال یک تبدیل خطی	۱.۴.۷
۳۶۴	محاسبه چندجمله‌ای مشخصه و الحاقی $(\lambda I - A)$	۵.۷
۳۷۲	مقادیر ویژه و بردارهای ویژه چندجمله‌ای‌های ماتریسی	۱.۵.۷
۳۷۶	فرمول نیوتن، روش لووریر و الگوریتم فادیو	۲.۵.۷
۳۸۲	چندگانگی مقادیر ویژه	۶.۷
۳۸۶	مسئله مقدار ویژه برای ماتریس‌های هرمیتی	۷.۷

۴۱۱	ماتریس‌های همبستگی	۸.۷
۴۱۸	پشتیبانی‌های متلب	۹.۷
۴۲۰	مسائل	

فصل هشتم صورت‌های دوخطی، مربعی و هرمیتی ۴۳۵

۴۳۶	صورت‌های دوخطی	۱.۸
۴۴۰	صورت‌های درجه دو	۲.۸
۴۴۴	کاهش صورت‌های درجه دو	۳.۸
۴۴۴	تبدیل متعامد	۱.۳.۸
۴۴۵	کاهش لاگرانژ	۲.۳.۸
۴۵۵	قانون اینرسی سیلوستر	۴.۸
۴۶۰	صورت‌های هرمیتی	۵.۸
۴۶۷	صورت‌های درجه دو معین مثبت و هرمیتی: ماتریس‌های معین مثبت	۶.۸
۴۸۰	مسئله مقدار ویژه تعمیم‌یافته	۷.۸
۴۹۰	پایه‌ها برای نمایش ماتریسی یک تابع دوخطی	۸.۸
۵۰۵	مسائل	

فصل نهم نرم‌های برداری و نرم‌های ماتریسی ۵۱۵

۵۱۵	نرم‌های برداری	۱.۹
۵۲۳	نرم‌های ماتریسی	۲.۹
۵۲۶	نرم‌های ماتریسی سازگار	۱.۲.۹
۵۲۸	پیوستگی نرم‌های برداری و ماتریسی	۲.۲.۹
۵۲۹	نرم‌های ماتریسی القایی	۳.۹
۵۳۷	شاخص منفرد بودن	۱.۳.۹
۵۳۹	نرم‌های معادل	۴.۹
۵۴۲	دنباله ماتریسی و سری ماتریسی	۵.۹

۶.۹ معکوس تعمیم یافته یک ماتریس ۵۵۰
 ۷.۹ حل دستگاه $Ax = b$ به کمک متلب ۵۶۰
 مسائل ۵۶۳

فصل دهم صورت های نرمال ۵۶۹

۱۰.۱۰ اعمال مقدماتی بر روی λ -ماتریس ها ۵۷۰
 ۲۰.۱۰ هم ارزی چپ: صورت های هرمیتی ستونی ۵۷۴
 ۳.۱۰ هم ارز راست: صورت های هرمیتی سطری ۵۸۲
 ۴.۱۰ هم ارزی λ -ماتریس ها ۵۸۵
 ۵.۱۰ چند جمله ای های پایا و صورت های متعارف اسمیت ۵۹۳
 ۶.۱۰ تشابه و هم ارزی - اولین و دومین صورت های نرمال طبیعی: صورت های متعارف جردن ۵۹۷
 مسائل ۶۳۰

فصل یازدهم تبدیلات خطی و صورت های نرمال ۶۳۷

۱۰.۱۱ جمع مستقیم زیرفضاها ۶۳۷
 ۲۰.۱۱ زیرفضای پایا ۶۵۰
 ۳.۱۱ زیرفضای ریشه: صورت شبه قطری ۶۵۵
 ۴.۱۱ تجزیه زیرفضای ریشه: صورت نرمال جردن ۶۶۶
 ۵.۱۱ صورت های جردن با متلب ۷۱۰
 مسائل ۷۱۱

فصل دوازدهم تابع یک ماتریس ۷۱۷

۱۰.۱۲ تعریف و محاسبه تابع ماتریس A ۷۱۸
 ۲۰.۱۲ تجزیه طیفی $f(A)$ برای ماتریس دلخواه A ۷۲۷
 ۱.۲.۱۲ محاسبه $f(A)$ با استفاده از ماتریس واندرموند ۷۳۴
 ۳.۱۲ ریشه دوم یک ماتریس A ، $\sin A$ ، $\cos A$ ، $\ln A$ ۷۳۹
 ۴.۱۲ یک اثبات مقدماتی برای شکل نرمال جردن ۷۴۵

۷۵۱	نمایش انتگرالی $f(A)$
۷۵۶	توضیح بیشتر در مورد دنباله ماتریسی و سری ماتریس
۷۶۲	حل معادلات دیفرانسیل برداری-ماتریسی
۷۶۹	حل معادلات تفاضلی برداری-ماتریسی
۷۷۲	محاسبه متلب تابع ماتریسی
۷۷۳	مسائل

فصل سیزدهم جبر خطی عددی ۷۷۷

۷۷۷	مفاهیم پایه‌ای حساب متناهی
۷۸۰	شرطی‌سازی (حالت) و پایداری عددی
۷۸۰	۱.۲.۱۳ معکوس یک ماتریس اختلال یافته: عدد حالت (شرطی)
۷۸۳	۲.۲.۱۳ معادلات خطی اختلال یافته: عدد حالت
۷۸۵	۳.۲.۱۳ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس مربعی
۷۸۹	۳.۱.۱۳ تبدیلات متعامد
۷۹۰	۱.۳.۱۳ تبدیل هاوس هولدر
۷۹۹	۲.۳.۱۳ دوران مسطح
۸۰۴	۳.۳.۱۳ حل $Ax = b$ به روش کمترین توان‌های دوم
۸۰۶	۴.۱.۳ محاسبه عددی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه
۸۰۶	۱.۴.۱۳ روش گرشگورین
۸۰۸	۲.۴.۱۳ روش توانی
۸۱۰	۳.۴.۱۳ روش کاهش
۸۱۲	۴.۴.۱۳ تکرار معکوس
۸۱۴	۵.۴.۱۳ روش‌های ژاکوبی و گیونز
۸۲۰	۶.۴.۱۳ تجزیه LR و الگوریتم LR
۸۲۴	۷.۴.۱۳ الگوریتم QR
۸۳۱	۸.۴.۱۳ الگوریتم QR انتقال یافته ضمنی

۸۳۵	۹.۴.۱۳ الگوریتم QR انتقال یافته مضاعف
۸۳۹	۵.۱۳ تعیین بردارهای ویژه از طریق الگوریتم QR
۸۴۰	۶.۱۳ محاسبه با متلب
۸۴۵	مسائل
۸۴۹	پاسخ مسائل منتخب
۸۸۹	منابع
۹۰۲	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۹۰۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۹۱۱	نمایه

پیشگفتار مؤلف

این کتاب از نقد هفده ساله دانشجویان، اساتید و سایر افراد با تجربه بهره برده است، که بابت آن نویسنده از آنها بسیار سپاسگزار است. به واسطه انگیزه معرفی نرم افزار متلب برای مطالعه جنبه های عددی نظریه ماتریس، یک تجدید نظر لازم بوده است. این موضوع ممکن است دانشجویان را ترغیب کند تا مسائل پایان فصل را با رایانه حل کنند، بدون اینکه نیاز به کار محاسباتی زیادی با قلم، کاغذ و مداد داشته باشند. برنامه آموزشی مهندسی و علوم به سبک ترمی همچنان با چنان گام های بلندی به پیش می رود که دانشجویان متوسط نیاز به کتاب هایی دارند که به آنها در یادگیری نکات فنی حل مسائل در حوزه های گوناگون کمک کند و بتوانند از عهده یک امتحان سخت برآیند. از این رو، مثال های حل شده فراوانی، همراه با چند نمودار برای توضیح مفاهیم، ارائه شده اند. همچنین تعداد زیادی مسئله در پایان هر فصل ارائه شده اند و پاسخ تمام مسائل فراهم شده اند تا به دانشجو در خودآموزی کمک کنند. بنابراین، یادگیری ماتریس و جبر خطی با کمک متلب ممکن است به سفری خوشایند به دنیای شگفت انگیز منجر شود.

به عنوان یک منبع درسی، این کتاب می تواند به روش های زیادی مورد استفاده قرار گیرد. برای یک دوره ابتدایی، می توان فصل های ۱ تا ۳، بخش های ۱.۴ تا ۴.۴؛ ۱.۵ تا ۳.۵؛ ۶.۵؛ ۱.۷؛ ۲.۷؛ ۴.۷ تا ۶.۷ را انتخاب کرد و قسمت های مربوط به تبدیلات خطی را نادیده گرفت. فصل آخر (فصل ۱۳) که کم اهمیت تر

از سایر فصل‌ها نیست، و مهم‌ترین بخش از دیدگاه کاربردی است، جبر خطی عددی را ارائه می‌دهد. این مباحث می‌توانند یک دوره ۴۰ ساعته در یک ترم را تشکیل دهند و با تکالیف و جلسه‌های آموزشی پشتیبانی شوند. بقیه فصل‌ها می‌توانند در یک ترم دیگر، یک دوره پیشرفته دربارهٔ ماتریس و جبر خطی را برای دانشجویان کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی و یا برنامه‌های دکترا تشکیل دهند.

کتاب حاضر نسخهٔ بازنگری شده‌ای از کتاب «ماتریس و جبر خطی» است که «ماتریس و جبر خطی به‌کمک متلب» دوباره نامگذاری شده است. اکنون یک راهنمای پاسخ جهت تمام مسائل پایان فصل‌ها برای مدرسین در دسترس می‌باشد.

معرفی متلب و نحوهٔ استفاده از آن برای محاسبات ماتریسی از مهم‌ترین و قابل توجه‌ترین مطالبی هستند که به نسخهٔ اول اضافه شده‌اند. علاوه بر این، بخش‌های جدیدی دربارهٔ ریشهٔ دوم یک ماتریس و همچنین معادلات دیفرانسیل و معادلات تفاضلی بردار-ماتریس نیز که بر کاربردهای مهم ماتریس و جبر خطی تأکید دارند، در فصل ۱۲ گنجانده شده‌اند. صورت‌های نرمال با مثال‌های اضافی به‌طور کامل در فصل ۱۱ بازمینی شده‌اند. مسائل به‌روز شده‌اند و مسائل جدید زیادی اضافه شده‌اند.

کانتی بوشان داتا

نوامبر ۲۰۰۸

پیشگفتار برای نسخهٔ اوّل

بیشتر کتاب‌های درسی نتیجهٔ مجموعه‌ای از سخنرانی‌ها یا دوره‌های آموزشی هستند که برای دانشجویان و/یا افراد با تجربه در طی یک زمان طولانی ارائه شده‌اند. اما این کتاب، نتیجهٔ خودآموزی است، که در آن نویسنده هم معلم و هم شاگرد بوده است. در این فرایند آموزش و یادگیری، یک ارزیابی از ناهماهنگی‌ها و از قلم افتادگی‌های ذاتی لازم می‌باشد. بنابراین، یکی از اهداف اصلی نگارش این متن، دعوت از اساتید و دانشمندان برای ارزیابی این کتاب می‌باشد؛ کسانی که پیشنهادات ارزشمندشان می‌توانند محتوای این کتاب را در نسخه‌های بعدی بهبود بخشند.

این جلد فشرده و جامع که به‌طور گسترده‌ای از کتاب‌های کلاسیک و معاصر در زمینهٔ ماتریس‌ها و تبدیل‌های خطی بهره‌گرفته است، با این هدف نوشته شده است که منبعی ایده‌آل و در یک جلد واحد، برای مطالعهٔ جبر خطی به‌وجود آید.

عنوان این کتاب شکل کوتاه‌شده‌ای از جبر ماتریسی و جبر خطی است. یک فضای خطی یا یک فضای برداری V روی یک میدان \mathbb{F} (به فصل ۵ مراجعه کنید) یک جبر L نامیده می‌شود اگر تحت یک عمل دوم به‌نام ضرب بسته باشد، به‌طوری‌که اگر x, y, z بردارهایی در V و α یک اسکالر در F باشد، آنگاه

(الف) $xy \in L$,

(ب) ضرب شرکت‌پذیر است: $x(yz) = (xy)z$,

(پ) ضرب توزیعی است:

$$x(y + z) = xy + xz,$$

$$(x + y)z = xz + yz,$$

(ت) $a(xy) = (ax)y = x(ay)$.

اصل (ت) تعامل عناصر اسکالر را با عمل ضرب نشان می‌دهد. در جبر جابه‌جایی، عمل ضرب جابه‌جایی است، یعنی برای هر دو عنصر x و y داریم $xy = yx$. مجموعه همه ماتریس‌های مربعی، جبر ماتریسی غیرجابه‌جایی را تشکیل می‌دهد. مجموعه همه تبدیل‌های خطی $V \rightarrow V$: \mathcal{L} در همه خواص یک جبر صدق می‌کنند (فصل ۶ را ملاحظه کنید) و آنچه را که به‌عنوان جبر خطی معروف است، تشکیل می‌دهد. به‌طورکلی، این جبر خطی غیرجابه‌جایی است.

امروزه، تقریباً در همه رشته‌های علوم، مهندسی و فناوری، یک دوره گسترده در نظریه ماتریس‌ها یک بخش ضروری از برنامه درسی است. روند مدرن این است که این دوره بر مبنای آموزش جبر خطی ارائه شود. به‌عنوان بخشی از برنامه درسی در رشته ریاضی، این دوره به شیوه‌ای بسیار پیچیده‌تر تدریس می‌شود، به‌طوری‌که ابتدا به‌جای فضاها برداری بر روی یک میدان، مدول‌های M بر روی یک حلقه R ملاحظه می‌شوند، و سپس به‌جای تبدیل‌های خطی بر روی یک میدان، به درون‌ریختی‌ها روی M بر روی R پرداخته می‌شود. به‌طورکلی، یک چنین زمینه دقیق‌تری در ریاضیات در جبر مجرد پوشش داده می‌شود. اما ما در اینجا به‌هیچ وجه آن را مورد توجه قرار نخواهیم داد.

پس از آنکه ساختار پایه‌ای جبر خطی بر پایه محکمی بنا نهاده شد، نشان داده می‌شود که محاسبه با تبدیل‌های خطی با محاسبه با ماتریس‌ها همراه با انتخاب مناسبی از یک پایه معادل است. در این نوع آموزش، تأکید بر جبر خطی است و نظریه ماتریس‌ها در فرایند یادگیری تقریباً یک نقش ثانویه دارد. در نتیجه، دانشجویان مبتدی در فهم جنبه محاسباتی جبر خطی با دشواری قابل توجهی مواجه می‌شوند. این بخش محاسباتی، در حقیقت، از دیدگاه مهندسی اهمیت بیشتری دارد.

آموزش جبر ماتریسی به‌تنهایی بسیار محدودکننده است، زیرا تنها با رفتن به عمق جبر خطی است که می‌توان یک بنیان ساختاری محکمی برای نظریه ماتریس‌ها فراهم کرد. برای ایجاد تعادل مناسب بین این

دو رشته مرتبط و ادغام آنها در این کتاب، آشنایی کامل با ماتریس‌ها، دترمینان‌ها، معکوس ماتریس، رتبه و هم‌ارزی، و فضای برداری ابتدا توسعه یافته و سپس با خلاصه کردن خاصیت‌های جبر ماتریسی موجود در بحث قبلی، مفهوم تبدیل خطی معرفی می‌شود. ارتباط جبر ماتریسی با جبر خطی از طریق مفهوم نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی نشان داده می‌شود، که بعد از آن توسعه مفهومی اجزای ساختاری مانند مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، و معادله مشخصه یک ماتریس و همچنین تبدیل خطی به‌طور هم‌زمان پیش می‌رود. نقشی که ماتریس‌ها در تعریف شکل‌های دوخطی، درجه دوم و هرمیتی و توابع دوخطی و نمایش ماتریسی آنها ایفا می‌کنند، شواهد فراوانی فراهم می‌کند که نشان می‌دهد جبر ماتریسی و جبر خطی را فقط می‌توان با ترکیب آنها به‌خوبی درک کرد. برای فهم بهتر هر یک از آنها، باید آنها را به‌طور هم‌زمان توسعه داد. نرم‌های برداری و نرم‌های ماتریسی، صورت‌های نرمال یک ماتریس و یک تبدیل خطی، و تابعی از یک ماتریس با عمق زیادی مورد بحث قرار می‌گیرند. امروزه، با توجه به اینکه کامپیوترهای رقمی که از حساب متناهی استفاده می‌کنند به‌طور گسترده در محاسبات علمی استفاده می‌شوند، باید برای محاسبه با ماتریس‌ها، روش‌های عددی خاصی توسعه داده شوند. از این رو، در این کتاب این جنبه مهم به‌اندازه کافی پوشش داده می‌شود.

شش فصل اول و چند بخش در فصل‌های ۷ و ۸ که به معادله مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، صورت‌های درجه دوم و ماتریس‌های معین می‌پردازند، هسته اصلی دوره‌ای را برای بیشتر دانشجویانی تشکیل می‌دهند که نخستین دوره خود در این موضوع می‌گذرانند. در واقع، این مباحث برای اکثر دانشگاه‌های هند برنامه درسی دوره ممتاز در ریاضیات در سطح کارشناسی را پوشش می‌دهند. سایر مباحث ممکن است در یک دوره دوم در این موضوع، یا برای استفاده دانشجویان پژوهشی و کارشناسی ارشد در ریاضیات، فیزیک، اقتصاد و آمار، و همچنین دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد مهندسی برای دوره‌های اصلی یا انتخابی خود، یا برای اهداف مرجع، گنجانده شوند.

پوشش این کتاب بسیار گسترده است؛ یک مجموعه خوب از مسائل در پایان هر فصل گنجانده شده است. پاسخ اکثر این مسائل نیز ارائه شده‌اند. این ویژگی‌ها کمک بزرگی به دانشجویان کوشایی خواهد کرد که مایلند از این کتاب برای مطالعه خود استفاده کنند. همچنین، مثال‌های حل‌شده متعددی همراه با نمودارهایی برای روشن‌سازی مفاهیم ارائه شده، فراهم شده‌اند.

بنیان این کتاب، که قرار بود هسته یک کتاب جامع در ریاضیات مهندسی را تشکیل دهد، در گروه فیزیک کاربردی دانشگاه کلکته گذاشته شد، جایی که نویسنده از سال ۱۹۶۵ تا ۱۹۸۲ تدریس می‌کرد. فصل اول کتاب ریاضیات مهندسی درباره ماتریس‌ها و جبر خطی بود. کتاب‌های استاندارد در مورد این موضوعات، که

هم به اصول بنیادی و هم به کاربردهای متنوع پرداخته‌اند، در شکل‌گیری ایده‌های جدید و ارائهٔ آنها در یک جلد به صورت ارائه شده در این کتاب، نقش مهمی ایفا کرده‌اند. نویسنده قدردان اساتید برجسته و همکاران سابق خود در این گروه است، که الهام‌بخشی و راهنمایی آنها در مراحل ابتدایی کتاب یک نقش اساسی داشته‌اند. فقط در فضای آرام علمی مؤسسهٔ فناوری هند در خاراگپور بود که این کتاب توانست شکل نهایی خودش را اختیار کند. همکاران آگاه و فرهیخته در گروه مهندسی برق مؤسسه و همچنین دانشجویان او را تشویق و ترغیب نموده و اعتقاد راسخ او را برای تکمیل این کتاب در زمانی نسبتاً کوتاه تقویت کردند. نویسنده از آنها برای چنین تشویقی بی‌نهایت سپاسگزار است. همچنین نویسنده از آقای سوبراتا کومارگیری برای تایپ عالی دست‌نوشتهٔ کتاب قدردانی می‌نماید. در نهایت نویسنده از همسرش دکتر سورخا داتا صمیمانه تشکر می‌کند که محیط واقعاً ایده‌آلی را برای نگارش این کتاب فراهم کرد و صبر قابل توجهی از خود نشان داد و ثابت کرد که منبع تشویق بزرگی است.

کانتی بوشان داتا

پیشگفتار مترجمان

جبر خطی کاربرد زیادی در طیف وسیعی از شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی دارد. جبر خطی نه تنها در زمینه‌های مختلفی از خود ریاضیات مثل آنالیز تابعی، آنالیز عددی، نظریه گراف، و ... کاربرد دارد، بلکه در فیزیک، مهندسی، علوم طبیعی، و علوم اجتماعی نیز کاربرد پیدا کرده است. از کاربردهای جبر خطی می‌توان به برنامه‌ریزی خطی، نظریه گراف، هوش مصنوعی، یادگیری ماشین و پردازش سیگنال اشاره کرد. حل بسیاری از مدل‌ها در علوم و مهندسی به صورت یک مسئله در جبر خطی فرمول‌بندی می‌شوند، مسائلی مثل حل دستگاه معادلات خطی، مسئله مقدار ویژه، مسئله کمترین توان‌های دوم، و ...

کتاب «ماتریس و جبر خطی به کمک متلب»، تألیف کانتی بوشان داتا، یک مرجع کامل برای دانشجویان رشته ریاضی در درس مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، جبر خطی عددی، جبر خطی و چندین درس دیگر، به ویژه در دوره‌های تحصیلات تکمیلی می‌باشد. مؤلف کتاب، ضمن ارائه مطالب نظری در جبر خطی، سعی کرده است که با مثال‌های متعددی، نتایج نظری را بررسی نماید. در پایان هر فصل، توابع مختلف نرم‌افزار متلب که به مطالب درس مربوط می‌شوند را ارائه کرده و با مثال‌های عددی مورد آزمایش قرار داده است. یکی از ویژگی‌های بارز کتاب این است که در انتهای هر فصل تعداد زیادی تمرین گنجانده شده است که با حل آنها خواننده می‌تواند به مطالب کتاب تسلط پیدا کند.

با توجه به ویژگی‌های منحصر به فردی که این کتاب دارد، بر آن شدیم تا آن را به زبان فارسی ترجمه نمائیم تا مورد استفاده جامعه علمی کشور قرار گیرد. ما حاصل تلاش چندساله ما در انجام این کار، کتابی است که پیش روی شماست. بدون شک این ترجمه خالی از لغزش و خطا نخواهد بود. لذا از همه دانشجویان و محققانی که این کتاب را استفاده می‌کنند تقاضا داریم چنانچه به خطایی برخورد کردند به اطلاع ما برسانند تا در چاپ‌های بعدی اصلاح شوند.

در پایان از داوران محترم این کتاب در مرحله ارزیابی کتاب که با نظرات ارزشمندشان به بهبود کتاب کمک زیادی کرده‌اند، سپاسگزاری می‌کنیم. از زحمات بی‌وقفه آقایان دکتر هادی هراتی رئیس گروه نشر دانشگاه فردوسی مشهد، مصطفی قندهاری، حمیدرضا نداف سنگانی، غلامرضا قاسمی و سرکار خانم پروین ایمان‌طلب کمال تشکر را داریم. ضمناً بر خود لازم می‌دانیم از زحمات آقای کاوه محمدیان که کار طراحی قالب کتاب در نرم‌افزار لاتِک^۱ و صفحه‌آرایی را انجام داده‌اند صمیمانه تشکر نمائیم.

دکتر فائزه توتونیان

منصوره صائمی

دکتر داود خجسته سالکویه

آذرماه ۱۴۰۳

فصل ۱

جبر ماتریسی

« نیمی از پیکار در ریاضیات اختراع یک نماد خوب است.»

پی. اس. لاپلاس^۱

در گسترش ریاضیات، نظریه دترمینانها بیش از یکونیم قرن قبل از ماتریسها بوده است. دترمینانها از (i) یافتن صورت و مخرج کسرهایی که مقادیر مجهول را در یک مجموعه از معادلات خطی بیان می کنند، یا (ii) یافتن نتیجه حذف n کمیت از $(n + 1)$ معادله خطی نشأت گرفته اند. برای فهمیدن این موضوع، دستگاه دو معادله

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \quad (1.1)$$

را در نظر می گیریم. با حذف x_2 از معادله نخست، داریم

$$a_{11}x_1 + a_{12}(b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} = b_1.$$

بنابراین،

$$x_1 = (b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) / (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}). \quad (2.1)$$

به طور مشابه

$$x_2 = (b_2 a_{11} - b_1 a_{21}) / (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}). \quad (3.1)$$

در بررسی (۲.۱) و (۳.۱) که جواب (۱.۱) را نشان می‌دهند، واضح است که x_1 و x_2 به صورت یک کسر با مخرج یکسان

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

هستند. این عبارت، دترمینان دستگاه (۱.۱) نامیده می‌شود و با

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

نمایش داده می‌شود. در بررسی صورت‌های x_1 و x_2 در (۲.۱) و (۳.۱)، روشن است که آنها نیز دترمینان هستند، یعنی

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{21}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

چینی‌ها، احتمالاً در اوایل ۱۱۰۰ پیش از میلاد، معادلات به شکل (۱.۱) را با قاعده‌ای معادل روش معمول توسط دترمینان حل کرده‌اند [۱۴].

از طرف دیگر، برای به دست آوردن حاصل یک مجموعه از n معادله خطی شامل $(n - 1)$ متغیر، گام به گام متغیرها را حذف می‌کنیم. بنابراین، حاصل معادلات

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} = 0, \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33} = 0, \quad (4.1)$$

که از حذف متغیرهای x_1 و x_2 به دست می‌آید، عبارت است از

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} = 0. \quad (5.1)$$

معادله (۵.۱) می‌تواند به صورت

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

نیز نوشته شود.

کشف دترمینان در ۱۶۹۳، اغلب به گاتفرید ویلهلم لایبنیتز^۱ (۱۷۱۶ - ۱۶۴۶) نسبت داده می‌شود. او با حذف x_1 و x_2 از (۴.۱) به بسط (۵.۱) رسید، برای آن یک نماد جدید استفاده کرد که خاصیت و

1. Gottfried Wilhelm Leibnitz

ظاهری عددی داشت، و برای تشکیل هر جمله از ضرایب a_{ij} در (۴.۱) و برای تعیین علامت آن، قانونی تعریف کرد، اگرچه ارتباط بین نماد جدید با دترمینانی که امروزه با آن آشنا هستیم داده نشده است. برخی از مورخان بر این باورند که ریاضی‌دان ژاپنی سکی کوآ^۲ (۱۷۰۸ - ۱۶۴۲) قبل از سال ۱۶۸۳ از وجود آن اطلاع داشته است. دترمینان‌ها به فراموشی سپرده شدند، تا اینکه در سال ۱۷۵۰ ریاضی‌دان سوئیسی گابریل کرامر^۳ (۱۷۰۴ - ۵۲) آنها را در حالی که بر روی تجزیه و تحلیل خم‌ها کار می‌کرد دوباره کشف کرد. او (i) برای تشکیل جملات مخرج مشترک کسرهایی که مقادیر مجهولات را در یک مجموعه از معادلات خطی بیان می‌کنند، (ii) برای تعیین علامت هر جمله تنها در مخرج مشترک مذکور، و (iii) برای به دست آوردن صورت‌ها از عبارت مخرج مشترک، یک قانون ارائه داد.

الکساندر-تئوفیل واندرموند^۴ (۱۷۳۵ - ۹۶) اولین کسی بود که در ۱۷۷۱، دترمینان‌ها را به صورت توابعی مستقل تشخیص داد، نمادگذاری را بهبود بخشید، آنها را به صورت موضوعات مورد مطالعه مستقل، جدا کرد و شرح منظمی از آنچه که در آن زمان برای جهان کمتر شناخته شده بود، ارائه داد. بنابراین، او می‌تواند کاشف رسمی دترمینان‌ها [۱۴]، [۱۷۹] نامیده شود. پیر سیمون دو لاپلاس^۵ (۱۸۲۷ - ۱۷۴۹) روش کلی بسط دترمینان را در ۱۷۷۲ ارائه داد، و جوزف لویی لاگرانژ^۶ (۱۸۱۳ - ۱۷۳۶) اتحادهای مفیدی را در ۱۷۷۳ کشف کرد. یک گام بزرگ در گسترش دترمینان در سال ۱۸۰۱ توسط کارل فردریش گاوس^۷ (۱۸۵۵ - ۱۷۷۷) برداشته شد. او یک اصطلاح جدید برای نامیدن $ac - b^2$ دترمینان عبارت $ax^2 + 2bx + c$ معرفی کرد که در معنا و کاربرد با عبارت امروزی مین، کاملاً یکسان است و آن را با (a, b, c) نشان داد. بعد از اینکه این کارهای اساسی صورت گرفت، یک پایه‌ریزی قوی برای نظریه دترمینان امروزی توسط ژاک پی. ام. بینت^۸ (۱۸۵۶ - ۱۷۸۶) و آگوستین لویی کوشی^۹ (۱۸۵۷ - ۱۷۸۹) از فرانسه، کارل گوستاو ژاکوب ژاکوبی^{۱۰} (۱۸۰۴ - ۵۱) از آلمان، بنا نهاده شد و توسط جیمز جوزف سیلوستر^{۱۱} (۱۸۱۴ - ۹۷)، آرتور کیلی^{۱۲} (۱۸۲۱ - ۹۵) از انگلستان، و کارل ویراشتراس^{۱۳} (۱۸۱۵ - ۹۷) و لئوپولد کرونکر^{۱۴} (۱۸۲۳ - ۹۱) از آلمان دنبال شد.

در یک گزارش ارائه شده به دنیای علم در ۳۰ نوامبر ۱۸۱۲، کوشی^{۱۳} قبل از ریاضی‌دانان آن زمان، رساله‌ای تقریباً جامع در مورد نظریه دترمینان‌های کلی ارائه کرد و اصطلاح دترمینان را به معنای امروزی آن،

2. Seki Kowa 3. Gabriel Cramer 4. Alexandre-Theophile Vandermonde 5. Pierre-Simon de Laplace
6. Joseph-Louis Lagrange 7. Carl Friedrich Gauss 8. Jacques P.M. Binet 9. Augustin-Louis Cauchy
10. Carl Gustav Jacob Jacobi 11. James Joseph Sylvester 12. Arthur Cayley 13. Karl Weierstrass
14. Leopold Kronecker 13. Cauchy

به کار برد [۱۳۷]. بعد از آن محققین تمرکز خود را از نظریه دترمینان به نظریه کلی تر نظریه ماتریس ها معطوف کردند.

در ریاضیات، هدف از یک تبدیل مانند

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \quad x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \quad (۶.۱)$$

کاهش دادن یک مسئله حل نشده برحسب متغیرهای x_1 و x_2 به یک مسئله ساده تر از مسئله اصلی است. آنچه که کیلی ۱۵ در سال ۱۸۵۸ انجام داد، به شرح زیر است. او علاوه بر تبدیل (۶.۱)، تبدیل دیگر

$$y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \quad y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \quad (۷.۱)$$

را در نظر گرفت و در نتیجه (۶.۱) به رابطه زیر تبدیل می شود

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2, \\ x_2 &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2. \end{aligned} \quad (۸.۱)$$

تبدیل از متغیرهای x_1, x_2 به متغیرهای z_1, z_2 از طریق y_1, y_2 همان گونه که از (۸.۱) پیداست، چندان آسان نیست. لیکن، اگر ضرایب در تبدیل های نشان داده شده در معادلات (۶.۱) و (۷.۱) جدا شوند و به طور قراردادی برحسب آرایه ها، یا ماتریس ها همان گونه که کیلی آنها را نامید، تنظیم شوند، آنگاه همه چیز روشن و واضح خواهد بود. بنابراین، اگر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad (۹.۱)$$

آنگاه،

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}, \quad (۱۰.۱)$$

که در آن درایه $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ با درایه های سطر اول A و درایه های ستون اول B ساخته می شود و غیره، و به خاطر سپردن آنها آسان است. این کشف ماتریس ها، قدرت و الهام بخش بودن یک نماد خوب-ابداع شده را نشان داد و راه را برای شاخه ای گسترده و ضروری از ریاضیات با کاربردهای عملی فراوان هموار کرد.