به نام خداوند جان و خرد

انتشارات
۹۵۷

ماتریس و جبر خطی

به کمک متلب

کانتی بوشان داتا

ترجمه:
دکتر فائزه توتونیان
استاد دانشگاه فردوسی مشهد
منصوره صائمی بجستانی
دکتر داود خجسته سالکویه
استاد دانشگاه گیلان

سرشناسه:	داتا، کانتی بوشان	Datta, Kanti Bushan
عنوان و نام پدیدآور:	ماتریس و جبر خطی به کمک متلب/ کانتی‌بوشان داتا؛ ترجمه فائزه توتونیان، منصوره صائمی‌بجستانی، داود خجسته‌سالکویه.	
مشخصات نشر:	مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۴.	
مشخصات ظاهری:	۹۳۸ ص.: مصوّر، جدول، نمودار.	
فروست:	انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۹۵۷.	
شابک:		ISBN: 978-964-386-659-4
وضعیت فهرست‌نویسی:	فیپا.	
یادداشت:	عنوان اصلی:	Matrix and linear algebra : aided with MATLAB, 2nd ed, 2008.
یادداشت:	واژه‌نامه. کتابنامه: ص. [۸۸۹] - ۹۰۱. نمایه.	
موضوع:	ماتریس‌ها -- برنامه‌های کامپیوتری	Matrices -- Computer programs
	متلب	MATLAB
	ماتریس‌ها -- داده‌پردازی	Matrices -- Data processing
	جبر خطی -- برنامه‌های کامپیوتری	Algebras, Linear -- Computer programs
	جبر خطی -- داده‌پردازی	Algebras, Linear -- Data processing
شناسه افزوده:	توتونیان، فائزه، ۱۳۲۶ - ، مترجم	
شناسه افزوده:	صائمی بجستانی، منصوره، ۱۳۳۸-، مترجم	
شناسه افزوده:	خجسته سالکویه، داود، ۱۳۴۹ -، مترجم	
شناسه افزوده:	دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.	
رده‌بندی کنگره:	QA۱۸۸	
رده‌بندی دیویی:	۵۱۲/۹۴۳۴۰۲۸۵	
شمارهٔ کتابشناسی ملّی:	۱۰۳۵۴۰۶۹	

انتشارات
۹۵۷

ماتریس و جبر خطی به کمک متلب

پدیدآورنده: کانتی بوشان داتا

ترجمه: دکتر فائزه توتونیان، منصوره صائمی بجستانی، دکتر داود خجسته سالکویه

مشخصات: وزیری، ۲۰۰ نسخه، چاپ اوّل، زمستان ۱۴۰۴

چاپ و صحافی: همیار

بها : ۱۳٬۰۰۰٬۰۰۰ ریال

حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶– ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)

مؤسّسهٔ کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)

مؤسّسهٔ دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شمارهٔ ۱۴۲
تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ – ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

http://press.um.ac.ir Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

پیشگفتار مؤلف

این کتاب از نقد هفده‌سالهٔ دانشجویان، اساتید و سایر افراد با تجربه بهره برده است، که بابت آن نویسنده از آنها بسیار سپاسگزار است. به‌واسطهٔ انگیزهٔ معرفی نرم‌افزار متلب برای مطالعهٔ جنبه‌های عددی نظریهٔ ماتریس، یک تجدید نظر لازم بوده است. این موضوع ممکن است دانشجویان را ترغیب کند تا مسائل پایان فصل را با رایانه حل کنند، بدون اینکه نیاز به کار محاسباتی زیادی با قلم، کاغذ و مداد داشته باشند. برنامهٔ آموزشی مهندسی و علوم به‌سبک ترمی همچنان با چنان گام‌های بلندی به‌پیش می‌رود که دانشجویان متوسط نیاز به کتاب‌هایی دارند که به آنها در یادگیری نکات فنی حل مسائل در حوزه‌های گوناگون کمک کند و بتوانند از عهدهٔ یک امتحان سخت برآیند. ازاین‌رو، مثال‌های حل‌شده فراوانی، همراه با چند نمودار برای توضیح مفاهیم، ارائه شده‌اند. همچنین تعداد زیادی مسئله در پایان هر فصل ارائه شده‌اند و پاسخ تمام مسائل فراهم شده‌اند تا به دانشجو در خودآموزی کمک کنند. بنابراین، یادگیری ماتریس و جبر خطی با کمک متلب ممکن است به سفری خوشایند به دنیایی شگفت‌انگیز منجر شود.

به‌عنوان یک منبع درسی، این کتاب می‌تواند به‌روش‌های زیادی مورد استفاده قرار گیرد. برای یک دوره ابتدایی، می‌توان فصل‌های ۱ تا ۳، بخش‌های ۱.۴ تا ۴.۴؛ ۱.۵ تا ۳.۵؛ ۶.۵؛ ۱.۷؛ ۲.۷؛ ۴.۷ تا ۶.۷ را انتخاب کرد و قسمت‌های مربوط به تبدیلات خطی را نادیده گرفت. فصل آخر (فصل ۱۳) که کم اهمیت‌تر

از سایر فصل‌ها نیست، و مهم‌ترین بخش از دیدگاه کاربردی است، جبر خطی عددی را ارائه می‌دهد. این مباحث می‌توانند یک دورهٔ ۴۰ ساعته در یک ترم را تشکیل دهند و با تکالیف و جلسه‌های آموزشی پشتیبانی شوند. بقیهٔ فصل‌ها می‌توانند در یک ترم دیگر، یک دورهٔ پیشرفته دربارهٔ ماتریس و جبر خطی را برای دانشجویان کارشناسی ارشد رشته‌های ریاضی و یا برنامه‌های دکترا تشکیل دهند.

کتاب حاضر نسخهٔ بازنگری شده‌ای از کتاب «ماتریس و جبر خطی» است که «ماتریس و جبر خطی به‌کمک متلب» دوباره نامگذاری شده است. اکنون یک راهنمای پاسخ جهت تمام مسائل پایان فصل‌ها برای مدرسین در دسترس می‌باشد.

معرفی متلب و نحوهٔ استفاده از آن برای محاسبات ماتریسی از مهم‌ترین و قابل توجه‌ترین مطالبی هستند که به نسخهٔ اول اضافه شده‌اند. علاوه بر این، بخش‌های جدیدی دربارهٔ ریشهٔ دوم یک ماتریس و همچنین معادلات دیفرانسیل و معادلات تفاضلی بردار–ماتریس نیز که بر کاربردهای مهم ماتریس و جبر خطی تأکید دارند، در فصل ۱۲ گنجانده شده‌اند. صورت‌های نرمال با مثال‌های اضافی به‌طورکامل در فصل ۱۱ بازبینی شده‌اند. مسائل به‌روز شده‌اند و مسائل جدید زیادی اضافه شده‌اند.

کانتی بوشان داتا[1]

نوامبر ۲۰۰۸

1. Kanti Bhushan Datta

پیشگفتار برای نسخهٔ اوّل

بیشتر کتاب‌های درسی نتیجهٔ مجموعه‌ای از سخنرانی‌ها یا دوره‌های آموزشی هستند که برای دانشجویان و/یا افراد با تجربه در طی یک زمان طولانی ارائه شده‌اند. اما این کتاب، نتیجهٔ خودآموزی است، که در آن نویسنده هم معلم و هم شاگرد بوده است. در این فرایند آموزش و یادگیری، یک ارزیابی از ناهماهنگی‌ها و از قلم افتادگی‌های ذاتی لازم می‌باشد. بنابراین، یکی از اهداف اصلی نگارش این متن، دعوت از اساتید و دانشمندان برای ارزیابی این کتاب می‌باشد؛ کسانی که پیشنهادات ارزشمندشان می‌توانند محتوای این کتاب را در نسخه‌های بعدی بهبود بخشند.

این جلد فشرده و جامع که به‌طور گسترده‌ای از کتاب‌های کلاسیک و معاصر در زمینهٔ ماتریس‌ها و تبدیل‌های خطی بهره‌گرفته است، با این هدف نوشته شده است که منبعی ایده‌آل و در یک جلد واحد، برای مطالعهٔ جبر خطی به‌وجود آید.

عنوان این کتاب شکل کوتاه‌شده‌ای از جبر ماتریسی و جبر خطی است. یک فضای خطی یا یک فضای برداری V روی یک میدان $\mathbb{F}$ (به فصل ۵ مراجعه کنید) یک جبر L نامیده می‌شود اگر تحت یک عمل دوم به‌نام ضرب بسته باشد، به‌طوری‌که اگر $\mathbf{x}$، $\mathbf{y}$، $\mathbf{z}$ بردارهایی در V و α یک اسکالر در F باشد، آنگاه

(الف) $\mathbf{xy} \in L$،
(ب) ضرب شرکت‌پذیر است: $\mathbf{x}(\mathbf{yz}) = (\mathbf{xy})\mathbf{z}$،
(پ) ضرب توزیعی است:

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{xy} + \mathbf{xz},$$
$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz},$$

(ت) $\alpha(\mathbf{xy}) = (\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{x}(\alpha\mathbf{y})$.

اصل (ت) تعامل عناصر اسکالر را با عمل ضرب نشان می‌دهد. در جبر جابه‌جایی، عمل ضرب جابه‌جایی است، یعنی برای هر دو عنصر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ داریم $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$. مجموعهٔ همهٔ ماتریس‌های مربعی، جبر ماتریسی غیرجابه‌جایی را تشکیل می‌دهد. مجموعهٔ همهٔ تبدیل‌های خطی $\mathscr{L} : V \to V$ در همهٔ خواص یک جبر صدق می‌کنند (فصل ۶ را ملاحظه کنید) و آنچه را که به‌عنوان جبر خطی معروف است، تشکیل می‌دهد. به‌طورکلی، این جبر خطی غیرجابجایی است.

امروزه، تقریباً در همهٔ رشته‌های علوم، مهندسی و فناوری، یک دورهٔ گسترده در نظریهٔ ماتریس‌ها یک بخش ضروری از برنامه درسی است. روند مدرن این است که این دوره بر مبنای آموزش جبر خطی ارائه شود. به‌عنوان بخشی از برنامهٔ درسی در رشتهٔ ریاضی، این دوره به شیوه‌ای بسیار پیچیده‌تر تدریس می‌شود، به‌طوری‌که ابتدا به‌جای فضاهای برداری بر روی یک میدان، مدول‌های M بر روی یک حلقهٔ R ملاحظه می‌شوند، و سپس به‌جای تبدیل‌های خطی بر یک میدان، به درون‌ریختی‌ها روی M بر روی R پرداخته می‌شود. به‌طورکلی، یک چنین زمینهٔ دقیقی در ریاضیات در جبر مجرد پوشش داده می‌شود. اما ما در اینجا به‌هیچ وجه آن را مورد توجه قرار نخواهیم داد.

پس از آنکه ساختار پایه‌ای جبر خطی بر پایهٔ محکمی بنا نهاده شد، نشان داده می‌شود که محاسبه با تبدیل‌های خطی با محاسبه با ماتریس‌ها همراه با انتخاب مناسبی از یک پایهٔ معادل است. در این نوع آموزش، تأکید بر جبر خطی است و نظریهٔ ماتریس‌ها در فرایند یادگیری تقریباً یک نقش ثانویه دارد. درنتیجه، دانشجویان مبتدی در فهم جنبهٔ محاسباتی جبر خطی با دشواری قابل‌توجهی مواجه می‌شوند. این بخش محاسباتی، در حقیقت، از دیدگاه مهندسی اهمیت بیشتری دارد.

آموزش جبر ماتریسی به‌تنهایی بسیار محدودکننده است، زیرا تنها با رفتن به عمق جبر خطی است که می‌توان یک بنیان ساختاری محکمی برای نظریهٔ ماتریس‌ها فراهم کرد. برای ایجاد تعادل مناسب بین این

دو رشتهٔ مرتبط و ادغام آنها در این کتاب، آشنایی کامل با ماتریس‌ها، دترمینان‌ها، معکوس ماتریس، رتبه و هم‌ارزی، و فضای برداری ابتدا توسعه یافته و سپس با خلاصه کردن خاصیت‌های جبر ماتریسی موجود در بحث قبلی، مفهوم تبدیل خطی معرفی می‌شود. ارتباط جبر ماتریسی با جبر خطی از طریق مفهوم نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی نشان داده می‌شود، که بعد از آن توسعهٔ مفهومی اجزای ساختاری مانند مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، و معادلهٔ مشخصه یک ماتریس و همچنین تبدیل خطی به‌طور هم‌زمان پیش می‌رود. نقشی که ماتریس‌ها در تعریف شکل‌های دوخطی، درجهٔ دوم و هرمیتی و توابع دوخطی و نمایش ماتریسی آنها ایفا می‌کنند، شواهد فراوانی فراهم می‌کند که نشان می‌دهد جبر ماتریسی و جبر خطی را فقط می‌توان با ترکیب آنها به‌خوبی درک کرد. برای فهم بهتر هر یک از آنها، باید آنها را به‌طور هم‌زمان توسعه داد. نرم‌های برداری و نرم‌های ماتریسی، صورت‌های نرمال یک ماتریس و یک تبدیل خطی، و تابعی از یک ماتریس با عمق زیادی مورد بحث قرار می‌گیرند. امروزه، با توجه به اینکه کامپیوترهای رقمی که از حساب متناهی استفاده می‌کنند به‌طور گسترده در محاسبات علمی استفاده می‌شوند، باید برای محاسبه با ماتریس‌ها، روش‌های عددی خاصی توسعه داده شوند. ازاین‌رو، در این کتاب این جنبه مهم به‌اندازهٔ کافی پوشش داده می‌شود.

شش فصل اول و چند بخش در فصل‌های ۷ و ۸ که به معادلهٔ مشخصه، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، صورت‌های درجه دوم و ماتریس‌های معین می‌پردازند، هسته اصلی دوره‌ای را برای بیشتر دانشجویانی تشکیل می‌دهند که نخستین دورهٔ خود در این موضوع می‌گذرانند. درواقع، این مباحث برای اکثر دانشگاه‌های هند برنامهٔ درسی دورهٔ ممتاز در ریاضیات در سطح کارشناسی را پوشش می‌دهند. سایر مباحث ممکن است در یک دورهٔ دوم در این موضوع، یا برای استفادهٔ دانشجویان پژوهشی و کارشناسی ارشد در ریاضیات، فیزیک، اقتصاد و آمار، و همچنین دانشجویان کارشناسی و کارشناسی‌ارشد مهندسی برای دوره‌های اصلی یا انتخابی خود، یا برای اهداف مرجع، گنجانده شوند.

پوشش این کتاب بسیار گسترده است؛ یک مجموعهٔ خوب از مسائل در پایان هر فصل گنجانده شده است. پاسخ اکثر این مسائل نیز ارائه شده‌اند. این ویژگی‌ها کمک بزرگی به دانشجویان کوشایی خواهد کرد که مایلند از این کتاب برای مطالعه خود استفاده کنند. همچنین، مثال‌های حل‌شدهٔ متعددی همراه با نمودارهایی برای روشن‌سازی مفاهیم ارائه‌شده، فراهم شده‌اند.

بنیان این کتاب، که قرار بود هسته یک کتاب جامع در ریاضیات مهندسی را تشکیل دهد، درگروه فیزیک کاربردی دانشگاه کلکته گذاشته شد، جایی که نویسنده از سال ۱۹۶۵ تا ۱۹۸۲ تدریس می‌کرد. فصل اول کتاب ریاضیات مهندسی درباره ماتریس‌ها و جبر خطی بود. کتاب‌های استاندارد در مورد این موضوعات، که

هم به اصول بنیادی و هم به کاربردهای متنوع پرداخته‌اند، در شکل‌گیری ایده‌های جدید و ارائهٔ آنها در یک جلد به‌صورت ارائه‌شده در این کتاب، نقش مهمی ایفا کرده‌اند. نویسنده قدردان اساتید برجسته و همکاران سابق خود در این گروه است، که الهام‌بخشی و راهنمایی آنها در مراحل ابتدایی کتاب یک نقش اساسی داشته‌اند. فقط در فضای آرام علمی مؤسسهٔ فناوری هند در خاراگپور بود که این کتاب توانست شکل نهایی خودش را اختیار کند. همکاران آگاه و فرهیخته در گروه مهندسی برق مؤسسه و همچنین دانشجویان او را تشویق و ترغیب نموده و اعتقاد راسخ او را برای تکمیل این کتاب در زمانی نسبتاً کوتاه تقویت کردند. نویسنده از آنها برای چنین تشویقی بی‌نهایت سپاسگزار است. همچنین نویسنده از آقای سوبراتا کومار گیری برای تایپ عالی دست‌نوشتهٔ کتاب قدردانی می‌نماید. در نهایت نویسنده از همسرش دکتر سورخا داتا صمیمانه تشکر می‌کند که محیط واقعاً ایده‌آلی را برای نگارش این کتاب فراهم کرد و صبر قابل توجهی از خود نشان داد و و ثابت کرد که منبع تشویق بزرگی است.

کانتی بوشان داتا

پیشگفتار مترجمان

جبر خطی کاربرد زیادی در طیف وسیعی از شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی دارد. جبر خطی نه‌تنها در زمینه‌های مختلفی از خود ریاضیات مثل آنالیز تابعی، آنالیز عددی، نظریهٔ گراف، و ... کاربرد دارد، بلکه در فیزیک، مهندسی، علوم طبیعی، و علوم اجتماعی نیز کاربرد پیدا کرده است. از کاربردهای جبر خطی می‌توان به برنامه‌ریزی خطی، نظریهٔ گراف، هوش مصنوعی، یادگیری ماشین و پردازش سیگنال اشاره کرد. حل بسیاری از مدل‌ها در علوم و مهندسی به‌صورت یک مسئله در جبر خطی فرمول‌بندی می‌شوند، مسائلی مثل حل دستگاه معادلات خطی، مسئلهٔ مقدار ویژه، مسئلهٔ کمترین‌توان‌های دوم، و ....

کتاب «ماتریس و جبر خطی به کمک متلب»، تألیف کانتی بوشان داتا، یک مرجع کامل برای دانشجویان رشتهٔ ریاضی در دروس مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی، جبرخطی عددی، جبرخطی و چندین درس دیگر، به‌ویژه در دوره‌های تحصیلات تکمیلی می‌باشد. مؤلف کتاب، ضمن ارائه مطالب نظری در جبر خطی، سعی کرده است که با مثال‌های متعددی، نتایج نظری را بررسی نماید. در پایان هر فصل، توابع مختلف نرم‌افزار متلب که به مطالب درس مربوط می‌شوند را ارائه کرده و با مثال‌های عددی مورد آزمایش قرار داده است. یکی از ویژگی‌های بارز کتاب این است که در انتهای هر فصل تعداد زیادی تمرین گنجانده شده است که با حل آنها خواننده می‌تواند به مطالب کتاب تسلط پیدا کند.

با توجه به ویژگی‌های منحصربه‌فردی که این کتاب دارد، بر آن شدیم تا آن را به زبان فارسی ترجمه نمائیم تا مورد استفاده جامعهٔ علمی کشور قرار گیرد. ماحصل تلاش چندسالهٔ ما در انجام این کار، کتابی است که پیش روی شماست. بدون شک این ترجمه خالی از لغزش و خطا نخواهد بود. لذا از همهٔ دانشجویان و محققانی که این کتاب را استفاده می‌کنند تقاضا داریم چنانچه به خطایی برخورد کردند به اطلاح ما برسانند تا در چاپ‌های بعدی اصلاح شوند.

در پایان از داوران محترم این کتاب در مرحلهٔ ارزیابی کتاب که با نظرات ارزشمندشان به بهبود کتاب کمک زیادی کرده‌اند، سپاسگزاری می‌کنیم. از زحمات بی‌وقفه آقایان دکتر هادی هراتی رئیس گروه نشر دانشگاه فردوسی مشهد، مصطفی قندهاری، حمیدرضا نداف سنگانی، غلامرضا قاسمی و سرکار خانم پریوش ایمان‌طلب کمال تشکر را داریم. ضمناً برخود لازم می‌دانیم از زحمات آقای کاوه محمدیان که کار طراحی قالب کتاب در نرم‌افزار لاتِک[1] و صفحه‌آرایی را انجام داده‌اند صمیمانه تشکر نمائیم.

دکتر فائزه توتونیان
منصوره صائمی
دکتر داود خجسته سالکویه
آذرماه ۱۴۰۳

1. LaTeX

فصل ۱

جبر ماتریسی

« نیمی از پیکار در ریاضیات اختراع یک نماد خوب است.»

پی. اس. لاپلاس[1]

در گسترش ریاضیات، نظریهٔ دترمینان‌ها بیش از یک‌ونیم قرن قبل از ماتریس‌ها بوده است. دترمینان‌ها از (i) یافتن صورت و مخرج کسرهایی که مقادیر مجهول را در یک مجموعه از معادلات خطی بیان می‌کنند، یا (ii) یافتن نتیجهٔ حذف n کمیت از $(n+1)$ معادلهٔ خطی نشأت گرفته‌اند. برای فهمیدن این موضوع، دستگاه دو معادلهٔ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \tag{۱.۱}$$

را در نظر می‌گیریم. با حذف x_2 از معادلهٔ نخست، داریم

$$a_{11}x_1 + a_{12}(b_2 - a_{21}x_1)/a_{22} = b_1.$$

بنابراین،

$$x_1 = (b_1a_{22} - b_2a_{12})/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \tag{۲.۱}$$

به‌طورمشابه

$$x_2 = (b_2a_{11} - b_1a_{21})/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \tag{۳.۱}$$

1. P.S. Laplace

در بررسی (۲.۱) و (۳.۱) که جواب (۱.۱) را نشان می‌دهند، واضح است که $x_{۱}$ و $x_{۲}$ به‌صورت یک کسر با مخرج یکسان

$$a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

هستند. این عبارت، دترمینان دستگاه (۱.۱) نامیده می‌شود و با

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۱۲}a_{۲۱}$$

نمایش داده می‌شود. در بررسی صورت‌های $x_{۱}$ و $x_{۲}$ در (۲.۱) و (۳.۱)، روشن است که آنها نیز دترمینان هستند، یعنی

$$\begin{vmatrix} b_{۱} & a_{۱۲} \\ b_{۲} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = b_{۱}a_{۲۲} - b_{۲}a_{۲۱}, \quad \begin{vmatrix} a_{۱۱} & b_{۱} \\ a_{۲۱} & b_{۲} \end{vmatrix} = b_{۲}a_{۱۱} - b_{۱}a_{۲۱}.$$

چینی‌ها، احتمالاً در اوایل ۱۱۰۰ پیش از میلاد، معادلات به شکل (۱.۱) را با قاعده‌ای معادل روش معمول توسط دترمینان حل کرده‌اند [۱۴].

از طرف دیگر، برای به‌دست آوردن حاصل یک مجموعه از n معادلهٔ خطی شامل $(n-۱)$ متغیر، گام‌به‌گام متغیرها را حذف می‌کنیم. بنابراین، حاصل معادلات

$$a_{۱۱}x_{۱} + a_{۱۲}x_{۲} + a_{۱۳} = ۰, \quad a_{۲۱}x_{۱} + a_{۲۲}x_{۲} + a_{۲۳} = ۰, \quad a_{۳۱}x_{۱} + a_{۳۲}x_{۲} + a_{۳۳} = ۰, \tag{۴.۱}$$

که از حذف متغیرهای $x_{۱}$ و $x_{۲}$ به‌دست می‌آید، عبارت است از

$$a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳} - a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳} + a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲} - a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱} + a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} - a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲} = ۰. \tag{۵.۱}$$

معادلهٔ (۵.۱) می‌تواند به‌صورت

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix},$$

نیز نوشته شود.

کشف دترمینان در ۱۶۹۳، اغلب به گاتفرید ویلهلم لایبنیتز[1] (۱۷۱۶ − ۱۶۴۶) نسبت داده می‌شود. او با حذف $x_{۱}$ و $x_{۲}$ از (۴.۱) به بسط (۵.۱) رسید، برای آن یک نماد جدید استفاده کرد که خاصیت و

1. Gottfried Wilhelm Leibnitz

ظاهری عددی داشت، و برای تشکیل هر جمله از ضرایب a_{ij} در (۴.۱) و برای تعیین علامت آن، قانونی تعریف کرد، اگرچه ارتباط بین نماد جدید با دترمینانی که امروزه با آن آشنا هستیم داده نشده است. برخی از مورخان بر این باورند که ریاضی‌دان ژاپنی سکی کوآ[۲] (۱۶۴۲ − ۱۷۰۸) قبل از سال ۱۶۸۳ از وجود آن اطلاع داشته است. دترمینان‌ها به فراموشی سپرده شدند، تا اینکه در سال ۱۷۵۰ ریاضی‌دان سوئیسی گابریل کرامر[۳] (۱۷۰۴ − ۵۲) آنها را در حالی‌که بر روی تجزیه و تحلیل خم‌ها کار می‌کرد دوباره کشف کرد. او (i) برای تشکیل جملات مخرج مشترک کسرهایی که مقادیر مجهولات را در یک مجموعه از معادلات خطی بیان می‌کنند، (ii) برای تعیین علامت هر جملهٔ تنها در مخرج مشترک مذکور، و (iii) برای به‌دست آوردن صورت‌ها از عبارت مخرج مشترک، یک قانون ارائه داد.

الکساندر–تئوفیل واندرموند[۴] (۱۷۳۵ − ۹۶) اولین کسی بود که در ۱۷۷۱، دترمینان‌ها را به‌صورت توابعی مستقل تشخیص داد، نمادگذاری را بهبود بخشید، آنها را به‌صورت موضوعات مورد مطالعهٔ مستقل، جدا کرد و شرح منظمی از آنچه که در آن زمان برای جهان کمتر شناخته شده بود، ارائه داد. بنابراین، او می‌تواند کاشف رسمی دترمینان‌ها [۱۴]، [۱۷۹] نامیده شود. پیر سیمون دو لاپلاس[۵] (۱۷۴۹ − ۱۸۲۷) روش کلی بسط دترمینان را در ۱۷۷۲ ارائه داد، و جوزف لویی لگرانژ[۶] (۱۷۳۶ − ۱۸۱۳) اتحادهای مفیدی را در ۱۷۷۳ کشف کرد. یک گام بزرگ در گسترش دترمینان در سال ۱۸۰۱ توسط کارل فردریش گاوس[۷] (۱۷۷۷−۱۸۵۵) برداشته شد. او یک اصطلاح جدید برای نامیدن $b^2 - ac$ دترمینان عبارت $ax^2+2bx+c$ معرفی کرد که در معنا و کاربرد با عبارت امروزی مبین، کاملاً یکسان است و آن را با (a,b,c) نشان داد.

بعد از اینکه این کارهای اساسی صورت گرفت، یک پایه‌ریزی قوی برای نظریهٔ دترمینان امروزی توسط ژاک پی. ام. بینت[۸] (۱۷۸۶ − ۱۸۵۶) و آگوستین لویی کوشی[۹] (۱۷۸۹ − ۱۸۵۷) از فرانسه، کارل گوستاو ژاکوب ژاکوبی[۱۰] (۱۸۰۴−۵۱) از آلمان، بنا نهاده شد و توسط جیمز جوزف سیلوستر[۱۱] (۱۸۱۴−۹۷)، آرتور کیلی[۱۲] (۱۸۲۱−۹۵) از انگلستان، و کارل وایراشتراس[۱۳] (۱۸۱۵−۹۷) و لئوپولد کرونکر[۱۴] (۱۸۲۳−۹۱) از آلمان دنبال شد.

در یک گزارش ارائه‌شده به دنیای علم در ۳۰ نوامبر ۱۸۱۲، کوشی[۱۳] قبل از ریاضی‌دانان آن زمان، رساله‌ای تقریباً جامع در مورد نظریهٔ دترمینان‌های کلی ارائه کرد و اصطلاح دترمینان را به‌معنای امروزی آن،

---

2. Seki Kowa 3. Gabriel Cramer 4. Alexandre-Theophile Vandermonde 5. Pierre-Simon de Laplace 6. Joseph-Louis Lagrange 7. Carl Friedrich Gauss 8. Jacques P.M. Binet 9. Augustin-Louis Cauchy 10. Carl Gustav Jacob Jacobi 11. James Joseph Sylvester 12. Arthur Cayley 13. Karl Weierstrass 14. Leopold Kronecker 13. Cauchy

به‌کار برد [۱۳۷]. بعد از آن محققین تمرکز خود را از نظریهٔ دترمینان به نظریهٔ کلی‌تر نظریهٔ ماتریس‌ها معطوف کردند.

در ریاضیات، هدف از یک تبدیل مانند

$$x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \quad x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2, \tag{۶.۱}$$

کاهش دادن یک مسئلهٔ حل‌نشده برحسب متغیرهای x_1 و x_2 به یک مسئلهٔ ساده‌تر از مسئلهٔ اصلی است. آنچه که کیلی[15] در سال ۱۸۵۸ انجام داد، به شرح زیر است. او علاوه بر تبدیل (۶.۱)، تبدیل دیگر

$$y_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2, \quad y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2, \tag{۷.۱}$$

را در نظر گرفت و در نتیجه (۶.۱) به رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2, \\ x_2 &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2. \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

تبدیل از متغیرهای x_1، x_2 به متغیرهای z_1، z_2 از طریق y_1، y_2 همان‌گونه که از (۸.۱) پیداست، چندان آسان نیست. لیکن، اگر ضرایب در تبدیل‌های نشان داده‌شده در معادلات (۶.۱) و (۷.۱) جدا شوند و به‌طور قراردادی برحسب آرایه‌ها، یا ماتریس‌ها همان‌گونه که کیلی آنها را نامید، تنظیم شوند، آنگاه همه چیز روشن و واضح خواهد بود. بنابراین، اگر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \tag{۹.۱}$$

آنگاه،

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}, \tag{۱۰.۱}$$

که در آن درایهٔ $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ با درایه‌های سطر اول A و درایه‌های ستون اول B ساخته می‌شود و غیره، و به‌خاطر سپردن آنها آسان است. این کشف ماتریس‌ها، قدرت و الهام‌بخش بودن یک نماد خوب–ابداع‌شده را نشان داد و راه را برای شاخه‌ای گسترده و ضروری از ریاضیات با کاربردهای عملی فراوان هموار کرد.

15. Cayley