بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد
انتشارات
۷۵۹

محاسبات عددی با متلب

برای دانشجویان علوم و مهندسی

چاپ سوم

دکتر اصغر کرایه‌چیان
استاد ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد

سرشناسه: کرایه‌چیان، اصغر، ۱۳۲۳-
عنوان و نام پدیدآور: محاسبات عددی با متلب (برای دانشجویان علوم و مهندسی)/ اصغر کرایه‌چیان؛ ویراستار علمی مرتضی گچ‌پزان؛ ویراستار ادبی هانیه اسدپور فعال مشهد.
مشخصات نشر: مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۳۹۹.
مشخصات ظاهری: ۳۲۰ ص. جدول، نمودار.
فروست: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۷۵۹.
شابک: ISBN: 978-964-386-451-4
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا.
یادداشت: کتابنامه : ص. ۳۱۱–۳۱۳؛ نمایه.
موضوع: متلب MATLAB
موضوع: آنالیز عددی – داده‌پردازی Numerical analysis --Data processing
موضوع: حساب عددی-- برنامه‌های کامپیوتری Numerical calculations -- Computer programs
موضوع: حساب عددی -- راهنمای آموزشی (عالی)
Numerical calculations -- Study and teaching (Higher)
موضوع: حساب عددی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی)
Numerical calculations -- Problems, exercises, etc (Higher)
شناسه افزوده: گچ‌پزان، مرتضی، ۱۳۴۷ -، ویراستار.
شناسه افزوده: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.
رده‌بندی کنگره: QA۲۹۷
رده‌بندی دیویی: ۵۱۸/۰۲۸۵۵۳۶
شماره کتابشناسی ملی: ۶۱۷۸۹۲۲

محاسبات عددی با متلب

برای دانشجویان علوم و مهندسی

انتشـــارات
۷۵۹

پدیدآورنده: دکتر اصغر کرایه‌چیان
ویراستار علمی: دکتر مرتضی گچ‌پزان
ویراستار ادبی: هانیه اسدپور فعال مشهد
مشخصات: وزیری، ۵۰۰ نسخه، چاپ سوم، زمستان ۱۴۰۰ (اوّل، ۱۳۹۹)
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ دقت
بها : ۷۵۰,۰۰۰ ریال

مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس
تلفن: ۳۸۸۰۲۶۶۶- ۳۸۸۳۳۷۲۷ (۰۵۱)

مؤسّسهٔ کتابیران: تهران، خیابان کارگر جنوبی، خیابان لبافی‌نژاد، بین خیابان فروردین و اردیبهشت، شمارهٔ ۲۳۸، تلفن: ۶۶۴۹۴۴۰۹–۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)

مؤسّسهٔ دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شمارهٔ ۱۴۲
تلفکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ – ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

http://press.um.ac.ir Email: press@um.ac.ir

فهرست مطالب

پیشگفتار

کتابی که پیش‌رو دارید برای اوّلین بار در سال ۱۳۸۲ با عنوان *محاسبات عددی برای دانشجویان علوم و مهندسی* توسط انتشارات پایه به‌زیور چاپ آراسته شد. خدای مهربان را سپاسگزارم که به لطف و عنایت او کتاب مورد توجه و اقبال جامعهٔ دانشگاهی قرار گرفت؛ به‌طوری‌که ظرف پانزده سال به چاپ پانزدهم رسید.

هدف این کتاب آشنا کردن دانشجویان مهندسی و علوم با برخی روش‌های عددی برای حل مسائل ریاضی است. فرض بر این است که این گروه از دانشجویان پیش‌زمینه‌ای در ریاضیات عمومی، معادلات دیفرانسیل و جبرخطی مقدماتی دارند و با یکی از زبان‌های برنامه‌نویسی نیز آشنا هستند.

این کتاب اساساً به‌عنوان کتاب درسی برای دانشجویان رشته‌های مهندسی در درس محاسبات عددی نوشته شده است.به‌طور معمول پوشش همهٔ مطالب این کتاب در یک ترم تحصیلی و با هفته‌ای دو ساعت تدریس امکان‌پذیر نیست و یا دست‌کم در چنین زمان کوتاهی پرداختن به همهٔ مباحث به‌طور دقیق امکان‌پذیر نیست. ازاین‌رو، مدرّسانی که این کتاب را برای تدریس محاسبات عددی برمی‌گزینند، بنابر سلیقه و تجربهٔ خود می‌توانند مباحثی را حذف و یا اضافه کنند. همچنین لازم است تأکید تنها بر اجرای روش‌ها باشد و نه وارد شدن به مبحث تحلیل این روش‌ها.

اگرچه عنوان کتاب محاسبات عددی است، ولی کتاب طوری طرح‌ریزی شده که سرفصل درس مبانی‌آنالیز عددی دانشجویان رشتهٔ ریاضیات و کاربردها را به‌طور کامل دربر دارد.

کتاب حاضر حاوی مجموعه‌ای از مثال‌ها و تمرین‌های متنوع عملی و نظری است. تمرین‌ها در آخر هر فصل آورده شده‌اند و درمجموع حدود ۲۰۰ تمرین گردآوری شده است. برای کلّیهٔ تمرین‌های با شمارهٔ فرد راهنمایی یا حل کامل ارائه شده است.

در ویرایش جدید کتاب، فصلی با عنوان محاسبات با متلب (MATLAB) اضافه شده است. در این فصل جدید سعی شده است پاسخ برخی مثال‌های کتاب با استفاده از توابع پیش‌ساخته در متلب یا برنامه‌هایی که به زبان متلب نوشته شده‌اند، داده شود. البته آشنایی با نرم‌افزار متلب برای دنبال کردن مطالب فصل جدید ضروری

است.

در اینجا لازم می‌دانم از همکاری همهٔ کسانی که آماده‌سازی این کتاب با کمک آنان میسّر گشت، سپاسگزاری کنم. به‌خصوص مراتب تشکّر خود را از آقای دکتر مرتضی گچ‌پزان، دانشیار محترم دانشکدهٔ ریاضی و خانم هانیه اسدپور فعّال مشهد که به‌ترتیب ویرایش علمی و ادبی کتاب را انجام دادند، ابراز می‌دارم.

کتاب حاضر با ویرایش جدید توسط انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد منتشر شده است و جا دارد از مدیریت و کارکنان پرتلاش این مجموعه صمیمانه قدردانی کنم.

اصغر کرایه‌چیان

اردیبهشت ۱۳۹۹

۱

مروری بر پیش‌نیازها

۱-۱ مروری بر حسابان

در این بخش تعاریف و قضایای اساسی موردنیاز را برای دنبال کردن مطالب این کتاب یادآوری می‌کنیم. با قضیهٔ تیلور[1] (فرمول تیلور) که بیشتر از آن استفاده خواهیم کرد، آغاز می‌کنیم.

قضیهٔ ۱-۱-۱ (قضیهٔ تیلور) فرض کنید $f(x)$ و مشتق‌های آن تا مرتبهٔ $n+1$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشند و $x_0 \in [a,b]$. آنگاه برای هر $x \in [a,b]$، عددی مانند $\xi(x)$ بین x_0 و x وجود دارد، به‌طوری‌که

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{1-1}$$

که

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

و

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

$P_n(x)$ چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ n تابع $f(x)$ در مجاورت نقطهٔ x_0 و $R_n(x)$ جملهٔ باقی‌مانده یا خطای برشی[2] متناظر با $P_n(x)$ نامیده می‌شود. در حالت خاص $x_0 = 0$، این قضیه را قضیهٔ ماکلورن[3] نیز می‌نامند.

1. Taylor
2. Trancation error
3. Maclaurin

اگر در (۱-۱) وقتی $n \to \infty$، $R_n(x) \to 0$، آنگاه

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \dots$$

سری تیلور تابع $f(x)$ در مجاورت x_0 نامیده می‌شود. همچنین

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

سری ماکلورن تابع $f(x)$ است.

مثال ۱-۱-۲ با استفاده از فرمول تیلور، $(1/1)^{\frac{1}{5}}$ را با دقت چهار رقم اعشار درست محاسبه کنید.

حل- تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{5}}$$

می‌خواهیم $f(0/1)$ را محاسبه کنیم. داریم:

$$f(0/1) = f(0) + 0/1f'(0) + \frac{(0/1)^2}{2}f''(0) + \frac{(0/1)^3}{3!}f'''(\xi), \qquad 0 < \xi < 0/1$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x + 1)^{-\frac{4}{5}}, \quad f''(x) = -\frac{4}{25}(x + 1)^{-\frac{9}{5}}, \quad f'''(x) = \frac{36}{125}(x + 1)^{-\frac{14}{5}}$$

همچنین $\forall x > 0$ داریم $0 < (x + 1)^{-\frac{14}{5}} < 1$. پس می‌توان باقی‌مانده را در فرمول تیلور تخمین زد. به‌ازای $n = 2$ داریم:

$$R_2(0/1) = \frac{36}{125}(\xi + 1)^{-\frac{14}{5}}\frac{(0/1)^3}{3!} < \frac{6}{125}(0/1)^3 = 0/000048 < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

پس با استفاده از سه جملهٔ اوّل داریم:

$$f(0/1) = (1/1)^{\frac{1}{5}} \approx 1 + \frac{1}{50} - \frac{8}{10000} = 1/0192$$

و

$$|(1/1)^{\frac{1}{5}} - 1/0192| = |R_2(0/1)| < \frac{1}{2} \times 10^{-4} \qquad (*)$$

بعداً خواهیم دید که منظور از دقت چهارم رقم اعشار درست، یافتن تقریبی است که در رابطهٔ $(*)$ صدق کند. توجه کنید که $(*)$ معادل است با

$$1/0192 - 0/00005 < (1/1)^{\frac{1}{5}} < 1/0192 + 0/00005$$

قضیهٔ ۱-۱-۳ (قضیهٔ مقدار میانی برای توابع پیوسته) فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و k عددی باشد، به‌طوری‌که $f(a) < k < f(b)$. آنگاه عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $f(c) = k$. در حالت خاص از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر $f(b) < ۰ < f(a)$، آنگاه به‌ازای cای که $c \in (a,b)$ داریم $f(c) = ۰$.

قضیهٔ ۱-۱-۴ (قضیهٔ رُل[1]) اگر تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b)$، آنگاه عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $f'(c) = ۰$.

مثال ۱-۱-۵ نشان دهید معادلهٔ $x^۳ + ۲x + a = ۰$ که در آن a یک عدد حقیقی است، بیش از یک ریشهٔ حقیقی ندارد.

حل- فرض کنید معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = x^۳ + ۲x + a$$

داریم $f(x_۱) = f(x_۲) = ۰$. درنتیجه بنابه قضیهٔ رُل باید به‌ازای cای که $x_۱ < c < x_۲$، داشته باشیم $f'(c) = ۰$. اما $f'(x) = ۳x^۲ + ۲ \neq ۰$، $\forall x$. این تناقض نشان می‌دهد که معادله تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد.

قضیهٔ ۱-۱-۶ (قضیهٔ رُل تعمیم‌یافته) فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و در بازهٔ (a,b)، n بار مشتق‌پذیر باشد. اگر $f(x)$ در $n+۱$ نقطهٔ متمایز $x_۰$، $x_۱$، $\ldots$، x_n در $[a,b]$ صفر شود، آنگاه عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد، به‌طوری‌که $f^{(n)}(c) = ۰$.

قضیهٔ ۱-۱-۷ (قضیهٔ مقدار متوسط) اگر تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه عددی مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

مثال ۱-۱-۸ اگر $۰ < a < b$، ثابت کنید

$$۱ - \frac{a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b}{a} - ۱$$

حل- تابع $f(x) = \ln x$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \qquad a < c < b$$

---

1. Rolle

یا

$$\ln b - \ln a = \frac{b-a}{c} \Longrightarrow \frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

قضیهٔ ۱-۱-۹ (قضیهٔ مقدار اکسترمم) فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد. آنگاه نقاط $\alpha, \beta \in [a,b]$ وجود دارند، به‌طوری‌که

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta), \qquad \forall x \in [a,b]$$

نقاط α و β یا در نقاط انتهایی بازه هستند یا درصورتی‌که f بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، جایی هستند که $f'(x) = ۰$.

قضیهٔ ۱-۱-۱۰ (قضیهٔ مقدار متوسط انتگرالی) اگر $f(x)$ در $[a,b]$ پیوسته و $g(x)$ در $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد و در این بازه تغییر علامت ندهد، آنگاه cای در بازهٔ (a,b) وجود دارد، به‌طوری‌که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

در حالت خاص اگر $g(x) = ۱$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

یا

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

$f(c)$ مقدار میانگین f بر بازهٔ $[a,b]$ نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۱-۱-۱۱ اگر f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n نقاط متمایزی در $[a,b]$ باشند، آنگاه نقطه‌ای مانند $x^* \in [a,b]$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$f(x^*) = \frac{f(x_۱) + f(x_۲) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

قضیهٔ ۱-۱-۱۲ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای باشد از اعداد حقیقی، به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. فرض کنید f تابعی باشد پیوسته، به‌طوری‌که دامنه آن شامل بُرد دنباله باشد. آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(\alpha)$$

قضیهٔ ۱-۱-۱۳ (قضیهٔ سری‌های متناوب) سری متناوب

$$\sum_{i=۱}^{\infty}(-۱)^{i+۱}a_i = a_۱ - a_۲ + a_۳ - \cdots + (-۱)^{i+۱}a_i + \dots$$

که در آن $\forall i\ a_i > ۰$، همگراست، هرگاه

الف. $a_{i+۱} \leq a_i$، $\forall i$

ب. $\lim_{i\to\infty} a_i = ۰$

دراین‌صورت اگر قرار دهیم

$$s = \sum_{i=۱}^{\infty}(-۱)^{i+۱}a_i, \qquad s_N = \sum_{i=۱}^{N}(-۱)^{i+۱}a_i$$

آنگاه

$$|s - s_N| \leq a_{N+۱}$$

مثال ۱-۱-۱۴ سری متناوب همگرای زیر را درنظر بگیرید:

$$S = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۲n-۱} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \dots$$

اگر بخواهیم مجموع سری را با دقت $\epsilon = ۰/۰۰۱$ به‌دست آوریم، چند جمله از سری لازم است؟

حل- اگر از M جملهٔ اوّل سری استفاده شود، خطا ازحیث قدرمطلق از $\frac{۱}{۲M+۱}$ کمتر است. پس برای دقت موردنظر باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲M+۱} < ۰/۰۰۱ \Longrightarrow M \geq ۴۹۹/۵$$

بنابراین حداقل ۵۰۰ جملهٔ اوّل از سری لازم است.

نماد Oی بزرگ[1]

در ریاضی از نماد O برای توصیف رفتار یک تابع برای متغیرهای خیلی کوچک یا خیلی بزرگ برحسب توابع ساده‌تر استفاده می‌شود.

1. Big O notation

تعریف ۱-۱-۱۵ فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که برای xهای به‌قدر کافی بزرگ تعریف شده‌اند. وقتی $x \to \infty$، می‌گوییم $f(x)$ از مرتبهٔ $g(x)$ است (می‌خوانیم $f(x)$ اوی بزرگ $g(x)$ است) و می‌نویسیم:

$$f(x) = O(g(x))$$

هرگاه اعداد مثبت $x_\circ$ و M وجود داشته باشند، به‌طوری‌که

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \qquad \forall x > x_\circ$$

در حالت خاص که $g(x) = x^n$ و n صحیح و نامنفی باشد، می‌گوییم $f(x) = O(x^n)$ هرگاه

$$|f(x)| \leq M|x^n|, \qquad \forall x > x_\circ$$

مثال ۱-۱-۱۶ توابع $f(x) = ۶x^۴ - ۲x^۳ + ۵$ و $g(x) = x^۴$ را درنظر بگیرید. در اینجا $f(x) = O(x^۴)$؛ زیرا برای $x > ۱$ داریم:

$$|f(x)| = |۶x^۴ - ۲x^۳ + ۵| \leq ۶x^۴ + ۲x^۳ + ۵ \leq ۶x^۴ + ۲x^۴ + ۵x^۴ = ۱۳x^۴$$

پس در این مثال $x_\circ = ۱$ و $M = ۱۳$.

مثال ۱-۱-۱۷ تابع f را که به‌صورت زیر تعریف شده است درنظر بگیرید:

$$f(x) = \frac{x^۳ + ۵\ln x}{x^۴ + ۱}$$

برای این تابع

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \circ$$

پس با توجه به تعریف حد، به‌ازای $\epsilon = ۱$ عدد $x_\circ > \circ$ وجود دارد، به‌طوری‌که

$$|\frac{x^۳ + ۵\ln x}{x^۴ + ۱}| \leq ۱, \qquad \forall x > x_\circ$$

اگر تعریف کنیم $g(x) \equiv ۱$، آنگاه $|f(x)| \leq |g(x)|$. بنابراین $f(x) = O(۱)$ که تعبیر آن کراندار بودن تابع $f(x)$ است.

تعریف ۱-۱-۱۸ فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که برای xهای به‌قدرکافی نزدیک به صفر تعریف شده‌اند. وقتی $x \to \circ$، می‌گوییم $f(x)$ از مرتبهٔ $g(x)$ است و می‌نویسیم:

$$f(x) = O(g(x))$$

هرگاه اعداد مثبت δ و M وجود داشته باشند، به‌طوری‌که

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \qquad \forall x, \circ < |x| < \delta$$

مثال ۱-۱-۱۹ نشان دهید وقتی $x \to \circ$ داریم:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + O(x^۳)$$

حل- بنا به فرمول ماکلورن می‌توان نوشت:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳!}e^{\xi(x)}, \qquad \circ < \xi(x) < x$$

برای xهای در یک همسایگی صفر، مثلاً برای $|x| < ۱$، داریم:

$$e^{\xi(x)} < e^x < e < ۳$$

پس

$$|e^x - (۱ + x + \frac{x^۲}{۲})| \leq \frac{۱}{۲}|x^۳|$$

که به معنای آن است که

$$e^x - (۱ + x + \frac{x^۲}{۲}) = O(x^۳)$$

در اینجا $\delta = ۱$ و $M = \frac{۱}{۲}$.

مثال ۱-۱-۲۰ می‌دانیم

$$\lim_{x \to \circ} \frac{۱ - \cos x}{x} = \circ$$

پس به‌ازای $\epsilon = ۱$ وجود دارد $\delta > \circ$ به‌طوری‌که

$$|\frac{۱ - \cos x}{x}| \leq ۱, \quad \circ < |x| < \delta$$

یا

$$|۱ - \cos x| \leq |x|, \quad \circ < |x| < \delta$$

که نشان می‌دهد $۱ - \cos x = O(x)$.

تمرین ۱-۱-۲۱ نشان دهید وقتی $x \to \circ$، $۱ - \cos x = O(x^۲)$. آیا $۱ - \cos x = O(x^۳)$؟

نماد oی کوچک[1]

تعریف ۱-۱-۲۲ فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که برای xهای به قدر کافی بزرگ تعریف شده‌اند. می‌نویسیم $f(x) = o(g(x))$ هرگاه

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = ۰$$

رابطهٔ بالا به‌معنای آن است که وقتی $x \to \infty$، $f(x)$ خیلی کوچک‌تر از $g(x)$ است.

مثال ۱-۱-۲۳ وقتی $x \to \infty$، داریم:

$$۱۰۰۰x = o(x^۲), \qquad \ln x = o(x), \qquad x^n = o(e^x)$$

که n صحیح و نامنفی است.

تعریف ۱-۱-۲۴ فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در یک همسایگی صفر تعریف شده باشند. وقتی $x \to ۰$ می‌نویسیم $f(x) = o(g(x))$ هرگاه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f(x)}{g(x)} = ۰$$

یعنی برای xهای نزدیک به صفر$f(x)$، خیلی کوچک‌تر از $g(x)$ است.

مثال ۱-۱-۲۵ وقتی $x \to ۰$، داریم:

$$x - \sin x = o(x^۲), \quad x - \sin x \neq o(x^۳)$$

فرمول تیلور برای توابع دو متغیری

قضیهٔ ۱-۱-۲۶ فرض کنید تابع دو متغیری f در یک همسایگی نقطهٔ (x, y)، مشتق‌های نسبی تا مرتبهٔ $n + ۱$ را داشته باشد. آنگاه برای هر $(x + h, y + k)$ در این همسایگی

$$f(x + h, y + k) = P_n(x, y) + R_n(x, y)$$

که

$$P_n(x, y) = \sum_{j=۰}^{n} \frac{۱}{j!} \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(x, y)$$

1. Little o notation