

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

press.um.ac.ir

تقدیم به:

تمامی پویندگان راه علم و دانش

press.um.ac.ir



دانشگاه فردوسی مشهد

انتشارات  
۸۳۱

## معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی

برای دانشجویان علوم و مهندسی

دکتر اصغر کرایه‌چیان  
استاد دانشگاه فردوسی مشهد



سرشناسه: کرایه‌چیان، اصغر، ۱۳۲۳ -  
 عنوان و نام پدیدآور: معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی برای دانشجویان علوم و مهندسی / اصغر کرایه‌چیان.  
 مشخصات نشر: مشهد: دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات، ۱۴۰۱.  
 مشخصات ظاهری: ۳۷۲ ص: مصور، جدول.  
 فروست: انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد؛ ۸۳۱.  
 شابک: ISBN: 978-964-386-524-5  
 وضعیت فهرست‌نویسی: فیبا.  
 یادداشت: کتابنامه: ص. ۳۶۷-۳۶۸. نمایه.  
 موضوع: معادله‌های دیفرانسیل -- راهنمای آموزشی (عالی)  
 Differential Equations -- Study and teaching (Higher)  
 Fractional calculus -- Study and teaching (Higher)  
 مشتق‌گیری -- راهنمای آموزشی (عالی)  
 دانشگاه فردوسی مشهد، انتشارات.  
 شناسه افزوده: Q۸۳۷۱  
 رده‌بندی کنگره: ۵۱۵/۳۵  
 رده‌بندی دیویی: ۵۱۵/۳۵  
 شماره کتابشناسی ملی: ۸۸۲۳۲۶۴

## معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی: برای دانشجویان علوم و مهندسی

پدیدآورنده: دکتر اصغر کرایه‌چیان  
 ویراستار ادبی: هانیه اسدیپور فعال مشهد  
 مشخصات: وزیری، ۱۵۰ نسخه، چاپ دوم، تابستان ۱۴۰۲ (اول، تابستان ۱۴۰۱)  
 چاپ و صحافی: چاپخانه دقت  
 بها: ۲/۶۰۰/۰۰۰ ریال  
 حق چاپ برای انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد محفوظ است.



### مراکز پخش:

فروشگاه و نمایشگاه کتاب پردیس: مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد، جنب سلف یاس  
 تلفن: ۳۸۸۳۳۷۲۷ - ۳۸۸۰۲۶۶۶ (۰۵۱)  
 مؤسسه کتابیران: تهران، میدان انقلاب، خیابان کارگر جنوبی، بین روانمهر و وحید نظری، بن‌بست  
 گشتاسب، پلاک ۸ تلفن: ۶۶۴۸۴۷۱۵ (۰۲۱)  
 مؤسسه دانشیران: تهران، خیابان انقلاب، خیابان منیری جاوید (اردیبهشت) نبش خیابان نظری، شماره ۱۴۲  
 تلفنکس: ۶۶۴۰۰۲۲۰ - ۶۶۴۰۰۱۴۴ (۰۲۱)

<http://press.um.ac.ir>

Email: [press@um.ac.ir](mailto:press@um.ac.ir)

# فهرست مطالب

۹	پیشگفتار
۱۱	۱ معادلات با مشتق‌های جزئی مرتبهٔ اول
۱۱	۱-۱ معرفی معادلات مرتبهٔ اول
۱۴	۲-۱ حل معادلات خطی با روش مشخصه‌ها
۲۱	۳-۱ ژاکوبین
۲۳	۴-۱ حل معادلات شبه‌خطی با روش مشخصه‌ها
۲۷	۵-۱ روش لاگرانژ
۳۲	۶-۱ معادلات غیرخطی
۴۱	۷-۱ موج‌های شوک
۴۸	۸-۱ تمرین‌های فصل ۱
۵۵	۲ معادلات با مشتق‌های جزئی مرتبهٔ دوم
۵۵	۱-۲ معرفی معادلات مرتبهٔ دوم
۵۶	۲-۲ رده‌بندی معادلات مرتبهٔ دوم
۶۶	۳-۲ معادلات اویلر
۶۹	۴-۲ روش جداسازی متغیرها
۷۳	۵-۲ تمرین‌های فصل ۲
۷۹	۳ سری‌های فوریه و انتگرال‌های فوریه
۷۹	۱-۳ توابع متناوب

۶ معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی

۸۶	۲-۳	پدیدهٔ گیپس
۹۹	۳-۳	انتگرال فوریه
۱۰۴	۴-۳	تبدیلات فوریه
۱۰۹	۵-۳	کاربرد انتگرال فوریه در حل معادلات با مشتق‌های جزئی
۱۱۳	۶-۳	تابع گاوسی و تبدیل فوریهٔ آن
۱۱۶	۷-۳	کاربرد تبدیلات لاپلاس
۱۲۰	۸-۳	تمرین‌های فصل ۳

۴ معادلهٔ گرما (انتشار)

۱۲۷	۱-۴	مدل ریاضی
۱۲۹	۲-۴	جواب‌های همانند
۱۳۱	۳-۴	جواب اساسی
۱۳۳	۴-۴	مسئلهٔ کشی
۱۳۵	۵-۴	اصل ماکزیمم
۱۳۹	۶-۴	حل معادلهٔ گرما
۱۵۹	۷-۴	معادلهٔ برگرز
۱۶۱	۸-۴	تمرین‌های فصل ۴

۵ معادلهٔ لاپلاس

۱۶۹	۱-۵	اصل ماکزیمم و مینیمم
۱۷۱	۲-۵	معادلات بیضوی
۱۷۴	۳-۵	جواب اساسی معادلهٔ لاپلاس
۱۷۷	۴-۵	فرمول‌های گرین
۱۷۹	۵-۵	حل معادلهٔ لاپلاس در مستطیل
۱۹۰	۶-۵	مسئلهٔ دیریشله در یک دیسک
۱۹۳	۷-۵	فرمول انتگرال پویسان
۱۹۷	۸-۵	معادلهٔ هلمهولتز
۲۰۰	۹-۵	تمرین‌های فصل ۵

۲۰۹	۶ معادله موج (تار مرتعش)
۲۰۹	۱-۶ مدل ریاضی
۲۱۱	۲-۶ حل معادله موج با روش جداسازی متغیرها
۲۱۹	۳-۶ معادله موج ناهمگن
۲۲۲	۴-۶ یکتایی جواب معادله موج
۲۲۴	۵-۶ جواب دالامبر معادله موج
۲۲۹	۶-۶ مسئله کشی برای معادله موج ناهمگن
۲۳۲	۷-۶ تمرین‌های فصل ۶
۲۳۹	۷ نگاشت‌های همدیس و کاربرد آن‌ها
۲۳۹	۱-۷ نگاشت‌ها
۲۴۲	۲-۷ نگاشت‌های همدیس
۲۴۴	۳-۷ تبدیلات کسری خطی
۲۴۸	۴-۷ کاربرد نگاشت‌های همدیس در حل معادلات با مشتق‌های جزئی
۲۵۲	۵-۷ تابع لگاریتمی مختلط
۲۵۴	۶-۷ تمرین‌های فصل ۷
۲۶۱	۸ مسئله اشترم‌لیوویل و سری‌های فوریه تعمیم‌یافته
۲۶۱	۱-۸ مسئله اشترم‌لیوویل
۲۶۴	۲-۸ خواص مسئله اشترم‌لیوویل منظم
۲۷۱	۳-۸ سری‌های فوریه تعمیم‌یافته خاص
۲۸۳	۴-۸ تمرین‌های فصل ۸
۲۸۷	۹ توابع گرین و کاربرد آن‌ها
۲۸۷	۱-۹ تابع $\delta$ (دلتا) دیراک
۲۹۰	۲-۹ تابع گرین
۲۹۷	۳-۹ تابع گرین در دوبعدی
۳۰۱	۴-۹ جواب اساسی
۳۰۳	۵-۹ روش تصویر

۸ معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی

۳۱۱ ..... ۶-۹ تمرین‌های فصل ۹

۳۱۵ پاسخ تمرین‌های برگزیده ۱۰

۳۶۶ منابع

۳۶۹ آ نمایه

press.um.ac.ir



## پیشگفتار

کتاب پیش‌رو حاصل سال‌ها تجربه نگارنده در تدریس درس معادلات دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی (PDEs) برای دانشجویان رشته ریاضی و رشته‌های مهندسی در سطح کارشناسی است. تدوین کتابی درسی در این زمینه که برای این دو گروه از دانشجویان مفید باشد، همواره مدنظر مؤلف بوده است. در دوران غم‌بار شیوع کرونا و تعطیلی ناخواسته، نگارش این کتاب را آغاز کردم، ضمن آنکه امید چندانی به اتمام آن نداشتم. اکنون خدای بزرگ را شاکرم که با یاری او این مهم به سرانجام رسید.

موضوع معادلات با مشتق‌های جزئی بسیار وسیع و درعین حال بسیار مهم است. این به دلیل آن است که بسیاری از پدیده‌ها در طبیعت و فناوری وقتی با زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌شوند، نتیجه یک PDE است. به عنوان نمونه، می‌توان از پدیده انتقال گرما و ارتعاش یک غشای (پوسته) کشیده‌شده نام برد. معادلات حاکم بر این دو پدیده، به ترتیب معادله گرما و معادله موج نامیده می‌شوند. دانستن اینکه حداقل برخی از (PDEs) چگونه حل می‌شوند، برای دانشمندان و مهندسان حائز اهمیت است.

پیش‌نیاز لازم برای دنبال کردن مطالب این کتاب، ریاضیات عمومی، به ویژه بخش توابع چندمتغیره و معادلات دیفرانسیل است. البته برای درک مطالب فصل ۷، آشنایی با توابع مختلط نیز لازم است.

این کتاب شامل ۹ فصل است و به این صورت طرح‌ریزی شده است: فصل ۱ معادلات مرتبه اول بررسی شده است. فصل ۲ به معادلات مرتبه دوم و دسته‌بندی آن‌ها اختصاص داده شده است. در فصل ۳ سری‌های فوری و انتگرال‌های فوری و کاربرد آن‌ها ارائه شده است. در فصل‌های ۴، ۵ و ۶ به ترتیب معادله گرما، معادله لاپلاس و معادله موج بررسی شده‌اند. فصل ۷ به نگاشت‌های همدیس و کاربرد آن‌ها اختصاص یافته است. در فصل ۸ مسئله اشترم‌لیوویل و سری‌های فوری‌تعمیم‌یافته ارائه شده است. فصل ۹ به توابع گرین و کاربرد آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل اختصاص یافته است. سرانجام در بخش پایانی کتاب حل مسائل با شماره‌های فرد آمده است.

کتاب حاضر حاوی مجموعه‌ای از مثال‌ها و تمرین‌های متنوع است. تمرین‌ها در آخر هر فصل آورده

شده‌اند و در مجموع حدود ۲۲۰ تمرین گردآوری شده است. برای کلیه تمرین‌های با شماره فرد راهنمایی یا حل کامل ارائه شده است.

در اینجا لازم می‌دانم از همکاری همه کسانی که آماده‌سازی این کتاب با کمک آنان میسر شد، سپاسگزاری کنم. به خصوص مراتب تشکر خود را از خانم هانیه اسدپور فعال مشهد که ویرایش ادبی کتاب را انجام دادند، ابراز می‌دارم.

از مدیریت و کارکنان پرتلاش انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد که زحمات نشر این کتاب را برعهده گرفته‌اند نیز قدردانی می‌کنم.

اصغر کرایه‌چیان

زمستان ۱۴۰۰